Opgaven voor Lineaire Algebra

Opgave 1.
Breng de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op rijtrapvorm, concludeer of ze oplosbaar zijn en geef, zo ja, alle oplossingen aan.

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &=& 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &=& 3 \end{array} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &=& 7 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 &=& 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &=& -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &=& -2 \end{array}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &=& 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &=& 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &=& 0 \end{array} \qquad \text{(iv)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &=& 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &=& 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &=& 4 \end{array}$$

$$\text{(v)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &=& 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 &=& 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 &=& 4 \end{array} \qquad \text{(vi)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 &=& 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &=& 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 &=& 0 \end{array}$$

Opgave 2.
Bepaal de waarden van de parameter a zo dat het stelsel lineaire vergelijkingen: (a) een eenduidige oplossing heeft, (b) meerdere oplossingen heeft, (c) niet oplosbaar is:

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 &=& 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 &=& 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 &=& 2 \end{array} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + ax_3 &=& 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &=& a \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &=& 1 \end{array}$$

Opgave 3.
Aan welke voorwaarden moeten a, b en c voldoen opdat het volgende stelsel lineaire vergelijkingen een oplossing heeft?

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& a \\ 2x_1 + 6x_2 - 11x_3 &=& b \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 &=& c \end{array} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& a \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &=& b \\ x_1 - 5x_2 + 8x_3 &=& c \end{array}$$

Opgave 4.
Ga na of de volgende stelsels van vectoren lineair afhankelijk of onafhankelijk zijn:

$$\text{(i)}\quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{(ii)}\quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{(iii)}\quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{(iv)}\quad \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Opgave 5.
Ga na of de volgende afbeeldingen lineair zijn en geef, zo ja, de matrix van de afbeelding met betrekking tot de standaardbases aan:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y) := xy$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : f(x) := (2x, 3x)$

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y) := (2x - y, x)$

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x, y) := (x + 1, 2y, x + y)$

(v) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x, y) := (x, 2y, x + y)$

(vi) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x, y) := (x^2, 2y, x + y)$

(vii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y, z) := (z, x + y)$

(viii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y, z) := (x + 1, y + z)$

Opgave 6.
Bereken de volgende determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 7.
Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de volgende matrices. Geef in elk geval aan of er een basis bestaat die alleen maar uit eigenvectoren bestaat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Opgave 8.
Bepaal een basis van de deelruimten die (met betrekking tot het standaardinproduct) orthogonaal op de volgende vectoren staan:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

Opgave 9.
Laat zien dat de afbeelding $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) := x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 3y_1y_2$ een inproduct op $\mathbb{R}^2$ definieert (d.w.z. laat zien dat f een positief definiete, symmetrische bilineaire afbeelding is).

Opgave 10.
Laten $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vectoren in $\mathbb{R}^2$ zijn.

(i) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ definieert de afbeelding

$$f(v_1, v_2) := x_1x_2 - 3x_1y_2 - 3y_1x_2 + ay_1y_2$$

een inproduct op $\mathbb{R}^2$?

(ii) Voor welke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definieert de afbeelding

$$f(v_1, v_2) := ax_1x_2 + bx_1y_2 + cy_1x_2 + dy_1y_2$$

een inproduct op $\mathbb{R}^2$?

Opgave 11.
Bepaal een orthonormaalbasis (met betrekking tot het standaardinproduct) voor de deelvectorruimte $U \subseteq \mathbb{R}^4$ die de vectoren $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ bevat.

Opgave 12.
Geef de orthogonale projectie (met betrekking tot het standaardinproduct) van $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in de richting van $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aan.