Wiskunde 1 voor kunstmatige intelligentie

Opgaven voor Calculus - Oplossingen

Opgave 1.
Bepaal de afgeleiden van de volgende functies:

$$\text{(i) } f(x) := \sin(x+x^2), \qquad \text{(ii) } f(x) := \sin(x)+\sin(x^2), \qquad \text{(iii) } f(x) := \sin(\cos(x)),$$

$$\text{(iv) } f(x) := \sin(\sin(x)), \qquad \text{(v) } f(x) := \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right), \qquad \text{(vi) } f(x) := \frac{\sin(\cos(x))}{x},$$

$$\text{(vii) } f(x) := \sin(x+\sin(x)), \qquad \text{(viii) } f(x) := \sin(\cos(\sin(x))).$$

Oplossingen
(i) $f'(x) = \cos(x+x^2)(1+2x)$.
(ii) $f'(x) = \cos(x) + 2\cos(x^2)x$.
(iii) $f'(x) = -\cos(\cos(x))\sin(x)$.
(iv) $f'(x) = \cos(\sin(x))\cos(x)$.
(v) $f'(x) = \cos\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)\frac{-\sin(x)x-\cos(x)}{x^2}$.
(vi) $f'(x) = \frac{-\cos(\cos(x))\sin(x)x-\sin(\cos(x))}{x^2}$.
(vii) $f'(x) = \cos(x+\sin(x))(1+\cos(x))$.
(viii) $f'(x) = -\cos(\cos(\sin(x)))\sin(\sin(x))\cos(x)$.

Opgave 2.
Als je gewone afgeleide vervelend vindt, zou je het misschien interessanter vinden om van de volgende functies de afgeleide $f'(x)$ te berekenen:

$$\text{(i) } f(x) := \sin((x+1)^2(x+2)), \qquad \text{(ii) } f(x) := \sin^3(x^2+\sin(x)),$$

$$\text{(iii) } f(x) := \sin^2((x+\sin(x))^2), \qquad \text{(iv) } f(x) := \sin\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right),$$

$$\text{(v) } f(x) := \sin(x\sin(x)) + \sin(\sin(x^2)), \qquad \text{(vi) } f(x) := \sin^2(x)\sin(x^2)\sin^2(x^2),$$

$$\text{(vii) } f(x) := (x+\sin^5(x))^6, \qquad \text{(viii) } f(x) := \sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x))))),$$

$$\text{(ix) } f(x) := \sin((\sin^7(x^7)+1)^7), \qquad \text{(x) } f(x) := (((x^2+x)^3+x)^4+x)^5,$$

$$\text{(xi) } f(x) := \sin(x^2+\sin(x^2+\sin(x^2))), \qquad \text{(xii) } f(x) := \sin(6\cos(6\sin(6\cos(6x)))),$$

$$\text{(xiii) } f(x) := \frac{\sin(x^2)\sin^2(x)}{1+\sin(x)}, \qquad \text{(xiv) } f(x) := \sin\left(\frac{x^3}{\sin(\frac{x^3}{\sin(x)})}\right).$$

Oplossingen
(i) $f'(x) = \cos((x+1)^2(x+2))(2(x+1)(x+2)+(x+1)^2)$.
(ii) $f'(x) = 3\sin(x^2+\sin(x))^2\cos(x^2+\sin(x))(2x+\cos(x))$.
(iii) $f'(x) = 4\sin((x+\sin(x))^2)\cos((x+\sin(x))^2)(x+\sin(x))(1+\cos(x))$.
(iv) $f'(x) = \cos\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right)\frac{3x^2\cos(x^3)+3x^5 sin(x^3)}{\cos(x^3)^2}$.
(v) $f'(x) = \cos(x\sin(x))(\sin(x)+xcos(x)) + 2\cos(\sin(x^2))\cos(x^2)x$.
(vi) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)\sin^3(x^2) + 6\sin^2(x)\sin^2(x^2)\cos(x^2)x$.
(vii) $f'(x) = 6(x+\sin^5(x))^5(1+5\sin^4(x)\cos(x))$.
(viii) $f'(x)$
$= \cos(\sin(\sin(\sin(\sin(x)))))\cos(\sin(\sin(\sin(x))))\cos(\sin(\sin(x)))\cos(\sin(x))\cos(x)$.
(ix) $f'(x) = 343\cos((\sin^7(x^7)+1)^7)(\sin^7(x^7)+1)^6\sin^6(x^7)\cos(x^7)x^6$.
(x) $f'(x) = 5(((x+x^2)^3+x)^4+x)^4(4((x+x^2)^3+x)^3(3(x+x^2)^2(2x+1)+1)+1)$.
(xi) $f'(x) = \cos(x^2+\sin(x^2+\sin(x^2)))(2x+\cos(x^2+\sin(x^2))(2x+2\cos(x^2)x))$.
(xii) $f'(x) = 1296\cos(6\cos(6\sin(6\cos(6x))))\sin(6\sin(6\cos(6x)))\cos(6\cos(6x))\sin(6x)$.
(xiii) $f'(x) = \frac{2\cos(x^2)x\sin^2(x)+2\sin(x^2)\sin(x)\cos(x)}{1+\sin(x)} - \frac{\sin(x^2)\sin^2(x)\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}$.
(xiv) $f'(x) = \cos\left(\frac{x^3}{\sin(\frac{x^3}{\sin(x)})}\right)\left(\frac{3x^2}{\sin(\frac{x^3}{\sin(x)})} - \frac{x^3\cos(\frac{x^3}{\sin(x)})\frac{3x^2\sin(x)-x^3\cos(x)}{\sin^2(x)}}{\sin^2(\frac{x^3}{\sin(x)})}\right)$.

Opgave 3.
Vind lokale en globale minima en maxima voor de volgende functies (die op $\mathbb{R}$ met uitzondering van eventuele nulpunten van de noemer gedefinieerd zijn):

$$\text{(i) } f(x) := x^3 - x, \qquad \text{(ii) } f(x) := x^4 - 2x^2, \qquad \text{(iii) } f(x) := \frac{x^2-2x+2}{x-1},$$

$$\text{(iv) } f(x) := x^3 - x^2 - 8x + 1, \qquad \text{(v) } f(x) := x^5 + x + 1, \qquad \text{(vi) } f(x) := 2 + x^{\frac{2}{3}},$$

$$\text{(vii) } f(x) := x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{(viii) } f(x) := x^3 + \frac{48}{x},$$

Oplossingen
(i) $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f''(x) = 6x$. Kritieke punten: $f'(x)$ heeft nulpunten $x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ en $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ lokaal maximum met $f(x_1) = \frac{2}{\sqrt{27}}$, $f''(x_2) > 0 \Rightarrow$ lokaal minimum met $f(x_2) = \frac{-2}{\sqrt{27}}$. De functie $f(x)$ is onbegrensd, daarom bestaat geen globaal minimum of maximum.
(ii) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2-1)$, $f''(x) = 12x^2 - 4$. Kritieke punten: $f'(x)$ heeft nulpunten $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ en $x_3 = 1$. $f''(x_1) > 0 \Rightarrow$ lokaal minimum met $f(x_1) = -1$, $f''(x_2) < 0 \Rightarrow$ lokaal maximum met $f(x_2) = 0$, $f''(x_3) > 0 \Rightarrow$ lokaal minimum met $f(x_3) = -1$. De functie $f(x)$ is onbegrensd naar boven, daarom bestaat geen globaal maximum, maar de twee lokale minima zijn ook globale minima.
(iii) $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. Kritieke punten: $f'(x)$ heeft nulpunten $x_1 = 0$ en $x_2 = 2$ en $f(x)$ is niet gedefinieerd in $x_3 = 1$. In x_1 wisselt het teken van $f'(x)$ van $+$ naar $- \Rightarrow$ lokaal maximum met

$f(x_1) = -2$, in x_2 wisselt het teken van $f'(x)$ van $-$ naar $+ \Rightarrow$ lokaal minimum met $f(x_2) = 2$. Voor $x \to x_3$ van links gaat $f(x)$ naar $-\infty$, voor $x \to x_3$ van rechts gaat $f(x)$ naar $+\infty$, dus is de functie $f(x)$ onbegrensd en bestaan er geen globale minima of maxima.
(iv) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = (x-2)(3x+4)$, $f''(x) = 6x - 2$. Kritieke punten: $f'(x)$ heeft nulpunten $x_1 = -\frac{4}{3}$ en $x_2 = 2$. $f''(x_1) < 0 \Rightarrow$ lokaal maximum met $f(x_1) = \frac{203}{27}$, $f''(x_2) > 0 \Rightarrow$ lokaal minimum met $f(x_2) = -11$. De functie $f(x)$ is onbegrensd en heeft dus geen globale minima of maxima.
(v) $f'(x) = 5x^4 + 1$ heeft geen nulpunten, dus heeft de functie $f(x)$ geen lokale minima of maxima en omdat $f(x)$ continu is ook geen globale minima of maxima.
(vi) $f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ heeft geen nulpunten maar is in $x_1 = 0$ niet gedefinieerd. Omdat $f(x) \geq 2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $f(x_1) = 2$ is $x_1 = 0$ een globaal minimum. Er zijn geen verder lokale minima of maxima. De functie is onbegrensd naar boven, daarom bestaat er geen globaal maximum.
(vii) $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{-2}{3}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}(4-5x)}{3(1-x)^{\frac{2}{3}}}$. Kritieke punten zijn de nulpunten $x_1 = 0$ en $x_2 = \frac{4}{5}$ van $f'(x)$ en het punt $x_3 = 1$ waar $f'(x)$ niet gedefinieerd is. In x_1 wisselt het teken van $f'(x)$ van $-$ naar $+ \Rightarrow$ lokaal minimum met $f(x_1) = 0$, in x_2 wisselt het teken van $f'(x)$ van $+$ naar $- \Rightarrow$ lokaal maximum met $f(x_2) \approx 0.4343$. Voor $x \in (0..1)$ is $f(x) > 0$ en voor $x > 1$ is $f(x) < 0$, dus heeft $f(x)$ in x_3 geen minimum of maximum. Omdat $f(x)$ onbegrensd is, bestaat er geen globale minima of maxima.
(viii) $f'(x) = 3x^2 - \frac{48}{x^2}$. Kritieke punten zijn de nulpunten $x_1 = -2$ en $x_2 = 2$ van $f'(x)$ en het punt $x_3 = 0$ waar $f(x)$ en $f'(x)$ niet gedefinieerd zijn. In x_1 wisselt het teken van $f'(x)$ van $+$ naar $- \Rightarrow$ lokaal maximum met $f(x_1) = -32$, in x_2 wisselt het teken van $f'(x)$ van $-$ naar $+ \Rightarrow$ lokaal minimum met $f(x_2) = 32$. Voor $x \to x_3$ van links gaat $f(x)$ naar $-\infty$, voor $x \to x_3$ van rechts gaat $f(x)$ naar $+\infty$, dus is de functie $f(x)$ onbegrensd en bestaan er geen globale minima of maxima.

Opgave 4.
Een ellips wordt beschreven door de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. De parameters a en b geven de lengten van de twee halfassen van de ellips. Voor $a = b = 1$ is de ellips een cirkel. We bekijken rechthoeken met zijden evenwijdig aan de x- en y-assen, die in de ellips liggen. Bepaal de afmetingen van de rechthoeken: (a) met maximale oppervlakte, (b) met maximale omvang, die in de ellips passen.

Oplossingen
We lossen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ naar y op, dit geeft $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. De hoekpunten van een rechthoek zijn $(-x, y)$, (x, y), $(-x, -y)$ en $(x, -y)$. Voor de oppervlakte O van zo'n rechthoek geldt $O = 2x \cdot 2y = 4xy$ en voor omvang P geldt $P = 2x + 2y = 2(x + y)$.
(a) Er geldt $O(x) = 4bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{x^2 - \frac{x^4}{a^2}}$, dan is $O'(x) = \frac{2b}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}(2 - \frac{4x^2}{a^2})$. Uit $O'(x) = 0$ volgt $2x^2 = a^2$ en dus $x = \frac{1}{\sqrt{2}}a$. Dan is $y = \frac{1}{\sqrt{2}}b$ en de maximale oppervlakte is $O_{max} = 2ab$.
(b) Er geldt $P(x) = 2(x + bx\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}})$, dan is $P'(x) = 2(1 - \frac{b}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$. Uit $P'(x) = 0$ volgt $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en dan is $y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. De maximale omvang is $P_{max} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

Opgave 5.
Een bal wordt uit een hoogte h_0 met snelheid v_0 verticaal omhoog of omlaag gegooid (als $v_0 > 0$ wordt hij omhoog gegooid, als $v_0 < 0$ omlaag). De hoogte van de bal wordt (afhankelijk van de tijd) door een functie $h(t)$ beschreven, voor de snelheid $v(t)$ geldt $v(t) = h'(t)$ en de acceleratie $a(t) = v'(t) = -g$ is constant (we nemen de acceleratie met een minteken, omdat deze omlaag gericht is, de waarde van g is ongeveer $9.81 m/s^2$).

(i) Toon aan dat $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$.

(ii) Wat is de maximale hoogte die de bal bereikt?

(iii) Wat is de snelheid waarmee de bal de grond raakt?

Oplossingen
(i) Omdat $v'(t) = -g$ is $v(t) = -gt + c$ voor een constante $c \in \mathbb{R}$. We hebben $v(0) = v_0$, dus is $c = v_0$. Er geldt nu $h'(t) = -gt + v_0$, dus is $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + d$ voor een constante $d \in \mathbb{R}$. Omdat $h(0) = h_0$ is $d = h_0$.
(ii) De maximale hoogte wordt bereikt voor t_1 met $h'(t_1) = v(t_1) = 0$. Dan is $t_1 = \frac{v_0}{g}$ en dus $h(t_1) = \frac{v_0^2}{2g} + h_0$.
(iii) Uit $h(t) = 0$ volgt $t^2 - 2\frac{v_0}{g}t - \frac{2h_0}{g} = 0$ en dus $t = \frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{v_0^2+2h_0 g}}{g}$. Omdat we een positieve t willen, moeten we de oplossing $t_2 = \frac{v_0}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2+2h_0 g}}{g}$ kiezen. Er geldt dan $v(t_2) = -gt_2 + v_0 = -\sqrt{v_0^2 + 2h_0 g}$. De snelheid is negatief omdat hij omlaag gericht is.

Opgave 6.
Bepaal primitieven voor de volgende functies:

$$\text{(i) } f(x) := \frac{a^x}{b^x}, \qquad \text{(ii) } f(x) := \frac{1}{1+\sin(x)}, \qquad \text{(iii) } f(x) := \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Oplossingen
(i) $f(x) = \frac{a^x}{b^x} = \exp(\log(\frac{a}{b})x)$ heeft primitieve $F(x) = \frac{1}{\log(\frac{a}{b})}\exp(\log(\frac{a}{b})x) = \frac{1}{\log(a)-\log(b)}\frac{a^x}{b^x}$.
(ii) $f(x) = \frac{1}{1+\sin(x)} = \frac{1-\sin(x)}{\cos^2(x)}$. Een primitieve van $\frac{1}{\cos^2(x)}$ is $\tan(x)$ en een primitieve van $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ is $\frac{1}{\cos(x)}$, dus heeft $f(x)$ de primitieve $F(x) = \tan(x) - \frac{1}{\cos(x)}$.
(iii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}$ en dit heeft primitieve $F(x) = \arcsin(\frac{x}{a})$.

Opgave 7.
Bepaal de volgende integralen (bijvoorbeeld door partiële integratie):

$$\text{(i) } \int \cos^3(x)\,dx, \quad \text{(ii) } \int x^3 \exp(x^2)\,dx, \quad \text{(iii) } \int x^2 \sin(x)\,dx, \quad \text{(iv) } \int x \log^2(x)\,dx.$$

Oplossingen
(i) $\int \cos^3(x)dx = \int \cos(x)\cos^2(x)dx = \sin(x)\cos^2(x) - \int \sin(x)2\cos(x)(-\sin(x))dx$
$= \sin(x)\cos^2(x) + 2\int \sin^2(x)\cos(x)dx = \sin(x)\cos^2(x) + 2\int \cos(x)dx - 2\int \cos^3(x)dx = \frac{1}{3}\sin(x)\cos^2(x) + \frac{2}{3}\sin(x)$.
(ii) $\int x^3\exp(x^2)dx = \frac{1}{2}\int x^2(2x)\exp(x^2)dx = \frac{1}{2}x^2\exp(x^2) - \frac{1}{2}\int 2x\exp(x^2)dx$
$= \frac{1}{2}(x^2\exp(x^2) - \exp(x^2))$.
(iii) $\int x^2\sin(x)dx = -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)dx = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - 2\int \sin(x)dx$
$= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)$.
(iv) $\int x\log^2(x)dx = \frac{1}{2}x^2\log^2(x) - \frac{1}{2}\int x^2 2\log(x)\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\log^2(x) - \int x\log(x)dx$
$= \frac{1}{2}x^2\log^2(x) - \frac{1}{2}x^2\log(x) + \frac{1}{2}\int x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2(\log^2(x) - \log(x)) + \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2(\log^2(x) - \log(x) + \frac{1}{2})$.

Opgave 8.
Bepaal de volgende integralen (bijvoorbeeld door substitutie):

$$\text{(i)} \int \frac{\log(\log(x))}{x}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int \frac{\exp(x)}{\exp(2x) + 2\exp(x) + 1}\,dx,$$

$$\text{(iii)} \int \exp(\exp(x))\exp(x)\,dx, \qquad \text{(iv)} \int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Oplossingen
(i) Substitueer $u = \log(x)$, $du = \frac{1}{x}dx$, dan wordt de integraal $\int \log(u)du = u\log(u) - u = \log(x)\log(\log(x)) - \log(x)$.
(ii) Substitueer $u = \exp(x)$, $du = \exp(x)dx$, dan wordt de integraal $\int \frac{1}{(u+1)^2}du = -\frac{1}{u+1} = -\frac{1}{\exp(x)+1}$.
(iii) Substitueer $u = \exp(x)$, $du = \exp(x)dx$, dan wordt de integraal $\int \exp(u)du = \exp(u) = \exp(\exp(x))$.
(iv) Substitueer $u = x^2$, $du = 2xdx$, dan wordt de integraal $\frac{1}{2}\int \sqrt{1-u}\;du = -\frac{1}{3}(1-u)^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Opgave 9.
Bereken de volgende bepaalde integralen:

$$\text{(i)} \int_0^2 (2+x)\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^2 (2-x)^2\,dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx,$$

$$\text{(iv)} \int_{-1}^2 x(1-x^2)\,dx, \qquad \text{(v)} \int_1^4 \sqrt{x}(1-x)\,dx, \qquad \text{(vi)} \int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx,$$

$$\text{(vii)} \int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx, \qquad \text{(viii)} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx, \qquad \text{(ix)} \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx,$$

$$\text{(x)} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx, \qquad \text{(xi)} \int_3^4 \frac{1}{25-x^2}\,dx, \qquad \text{(xii)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin(3x)\,dx.$$

Oplossingen

(i) Een primitieve van $f(x) = 2 + x$ is $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$. De integraal is dus $F(2) - F(0) = 6 - 0 = 6$.

(ii) Een primitieve van $f(x) = (2-x)^2$ is $F(x) = -\frac{1}{3}(2-x)^3$. De integraal is dus $F(2)-F(0) = 0 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$.

(iii) Een primitieve van $f(x) = 3 - 2x + x^2$ is $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x$. De integraal is dus $F(3) - F(0) = 9 - 0 = 9$.

(iv) Een primitieve van $f(x) = x(1 - x^2) = x - x^3$ is $F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$. De integraal is dus $F(2) - F(-1) = -2 - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$.

(v) Een primitieve van $f(x) = \sqrt{x}(1 - x) = \sqrt{x} - \sqrt{x}^3$ is $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x}^3 - \frac{2}{5}\sqrt{x}^5$. De integraal is dus $F(4) - F(1) = \frac{16}{3} - \frac{64}{5} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{14}{3} - \frac{62}{5} = -\frac{116}{15}$.

(vi) Een primitieve van $f(x) = \sqrt{1 + 3x}$ is $F(x) = \frac{2}{9}\sqrt{1 + 3x}^3$. De integraal is dus $F(8) - F(1) = \frac{250}{9} - \frac{16}{9} = 26$.

(vii) Een primitieve van $f(x) = x^2(x^3 + 1) = x^5 + x^2$ is $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^3$. De integraal is dus $F(2) - F(0) = \frac{32}{3} + \frac{8}{3} = \frac{40}{3}$.

(viii) Een primitieve van $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ is $F(x) = 2\sqrt{1 + x}$. De integraal is dus $F(3) - F(0) = 4 - 2 = 2$.

(ix) Een primitieve van $f(x) = x(1 - \sqrt{x})^2 = x - 2\sqrt{x}^3 + x^2$ is $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{5}\sqrt{x}^5 + \frac{1}{3}x^3$. De integraal is dus $F(1) - F(0) = \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{30}$.

(x) In de integraal $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = a\int \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}dx$ substitueren we $t = \frac{x}{a}$, $dt = \frac{1}{a}dx$, dan wordt de integraal $a^2 \int \sqrt{1 - t^2 dt}$. Nu substitueren we $t = \sin(u)$, $dt = \cos(u)du$, dit geeft de integraal $a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2(u)}\cos(u)du = a^2 \int \cos^2(u)du$. Met partiële integratie zien we dat $a^2 \int \cos^2(u)du = a^2(\sin(u)\cos(u)+\int \sin^2(u)du) = a^2(\sin(u)\cos(u)+\int 1du-\int \cos^2(u)du) = \frac{a^2}{2}(\sin(u)\cos(u) + u) = \frac{a^2}{2}(t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin(t)) = \frac{a^2}{2}(\frac{x}{a}\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2} + \arcsin(\frac{x}{a})) =: F(x)$. De bepaalde integraal is dus $F(a) - F(0) = \frac{a^2}{2}(\arcsin(1) - \arcsin(0)) = a^2\frac{\pi}{4}$.

(xi) Een primitieve van $f(x) = \frac{1}{25-x^2} = \frac{1}{10}(\frac{1}{5-x}+\frac{1}{5+x})$ is $F(x) = \frac{1}{10}(-\log(5-x)+\log(5+x)) = \frac{1}{10}\log(\frac{5+x}{5-x})$. De integraal is dus $F(4) - F(3) = \frac{1}{10}(\log(9) - \log(4)) = \frac{1}{10}\log(\frac{9}{4}) = \frac{1}{5}\log(\frac{3}{2})$.

(xii) We integreren partieel, dit geeft $\int x^2 \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) + \frac{2}{3}\int x\cos(3x)dx = -\frac{1}{3}x^2\cos(3x)+\frac{2}{9}x\sin(3x)dx-\frac{2}{9}\int \sin(3x)dx = -\frac{1}{3}x^2\cos(3x)+\frac{2}{9}x\sin(3x)dx+\frac{2}{27}\cos(3x) =: F(x)$. De integraal is dus $F(\frac{\pi}{3}) - F(0) = \frac{\pi^2}{27} - \frac{2}{27} - \frac{2}{27} = \frac{\pi^2-4}{27}$.

Opgave 10.

Bereken de volgende bepaalde integralen:

$$\text{(i)} \int_3^{11} \sqrt{2x + 3}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_4^9 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^{\sqrt{2}} x^3\exp(x^2)\,dx.$$

Oplossingen

(i) Een primitieve van $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ is $F(x) = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}}$, dus is de integraal $F(11)-F(3) = \frac{1}{3}(125 - 27) = \frac{98}{3}$.

(ii) We schrijven $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1 - \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. In de integraal $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$ substitueren we $x = u^2$, $dx = 2udu$, dan wordt de integraal $\int \frac{2u^2}{1+u}du = 2\int \frac{u^2-1}{1+u}du+2\int \frac{1}{1+u}du = 2\int(u-1)du+2\log(1+u) =$

$u^2 - 2u + 2\log(1+u) = x - 2\sqrt{x} + 2\log(1+\sqrt{x})$. Een primitieve van de oorspronkelijke functie is dus $F(x) = x - 2x + 4\sqrt{x} - 4\log(1+\sqrt{x}) = -x + 4\sqrt{x} - 4\log(1+\sqrt{x})$. De integraal is dus $F(9) - F(4) = (-9 + 12 - 4\log(4) + 4 - 8 + 4\log(3)) = -1 - 4\log(\frac{4}{3})$.
(iii) Een primitieve van $f(x) = x^3\exp(x^2)$ is $F(x) = \frac{1}{2}(x^2\exp(x^2) - \exp(x^2))$ (zie Opgave 7(ii)). De integraal is dus $F(\sqrt{2}) - F(0) = \frac{1}{2}(2e^2 - e^2 + 1) = \frac{e^2+1}{2}$.