Wiskunde 1 voor kunstmatige intelligentie

Opgaven voor Kansrekening - Oplossingen

Opgave 1.
Je hebt 4 verschillende wiskunde boeken, 6 psychologie boeken en 2 letterkundige boeken. Hoeveel manieren zijn er om deze twaalf boeken op een boord te plaatsen als:

(i) je een genie bent en geen orde nodig hebt,

(ii) je tenminste de wiskunde boeken naast elkaar plaatst,

(iii) de boeken van elk vakgebied naast elkaar moeten staan?

Oplossingen
(i) $12! = 479001600$.
(ii) Als je eerst de wiskunde boeken als één boek bekijkt heb je $9!$ mogelijkheden. De 4 wiskunde boeken kan je nu nog op $4!$ manieren ordenen, dus heb je $9! \cdot 4! = 8709120$ mogelijkheden.
(iii) Voor een groep van n boeken heb je $n!$ mogelijkheden, voor de 3 groepen zijn er $3!$ mogelijkheden, dus zijn er in totaal $4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! = 207360$ mogelijkheden.

Opgave 2.
Hoeveel verschillende getallen van 4 cijfers kan je uit de zestien hexadecimale 'cijfers' $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ maken?

(i) Hoeveel van deze getallen zijn 'echte' 4-cijfer getallen, dus hebben de eerste cijfer $\neq 0$?

(ii) Hoeveel van de getallen uit (i) hebben vier verschillende cijfers?

(iii) Hoeveel van de getallen uit (ii) eindigen op het cijfer 0?

(iv) Hoeveel van de getallen uit (ii) hebben opstijgende cijfers?

Oplossingen
Als we ook in de eerste positie een '0' toelaten zijn er $16^4 = 65536$ getallen.
(i) Als het eerste cijfer niet 0 mag zijn, zijn er voor de eerste positie maar 15 mogelijkheden, dus is het aantal 'echte' getallen $15 \cdot 16^3 = 61440$.
(ii) Voor het eerste cijfer zijn er 15 mogelijkheden, voor het tweede ook 15 (alle behalve het eerste), voor het derde 14 en voor het vierde 13, dus $15 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 = 40950$.
(iii) Voor het eerste cijfer zijn er 15 mogelijkheden, voor het tweede 14 (alle behalve het eerste en 0), voor het derde 13 en het vierde ligt vast, dus $15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$.
(iv) Het cijfer 0 mag niet voorkomen, dus hoeven we alleen maar naar de $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32760$ getallen met verschillende cijfers zonder 0 te kijken. Van de $4! = 24$ permutaties van 4

cijfers is maar een in opstijgende volgorde, dus zijn er $32760/24 = 1365$ getallen met opstijgende cijfers.

Opgave 3.
Een Nederlands kentekenplaatje bestaat uit twee groepen van twee letters en een groep van twee cijfers. De groep van cijfers mag voor, tussen of achter de groepen met letters staan. Verder worden bij de letters geen klinkers gebruikt. Bepaal het aantal mogelijke nummerborden.

Oplossing

Voor een groep van twee letters (zonder klinkers) zijn er $21^2 = 441$ mogelijkheden, voor een groep van twee cijfers zijn er 100 en er zijn 3 mogelijke posities voor de groep van cijfers, dus zijn er $3 \cdot 441^2 \cdot 100 = 58344300$ mogelijkheden.

Opgave 4.
Uit een werkgroep van 8 mannen en 6 vrouwen moet een commissie van 3 mannen en 4 vrouwen gekozen worden. Hoeveel verschillende mogelijkheden bestaan er voor de commissie?

Oplossing

Er zijn $\binom{8}{3} = 56$ mogelijkheden om de 3 mannen te kiezen en $\binom{6}{4} = 15$ mogelijkheden om de 4 vrouwen te kiezen, dus zijn er $56 \cdot 15 = 840$ verschillende mogelijkheden voor de commissie.

Opgave 5.
Een zekere faculteit heeft 6 hoogleraren, 8 UHD's, 4 UD's en 5 AIO's. In de feestcommissie van de faculteit zitten er 2 hoogleraren, 4 UHD's, 3 UD's en 3 AIO's. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de commissie? Hoe veranderd het aantal als een van de hoogleraren een begenadigde zanger en een van de UHD's (oorspronkelijk) een bierbrouwer is en deze twee per se in de commissie moeten zitten?

Oplossingen

Om m leden uit een groep van n te kiezen zijn er $\binom{n}{m}$ mogelijkheden, dus zijn er $\binom{6}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{3} = 15 \cdot 70 \cdot 4 \cdot 10 = 42000$ mogelijkheden.

Als een hoogleraar en een UHD een vaste plaats in de commissie hebben, veranderd de keuze voor de hoogleraren op $\binom{5}{1} = 5$ mogelijkheden en de keuze voor de UHD's op $\binom{7}{3} = 35$ mogelijkheden. Het totale aantal mogelijke commissies wordt dan $5 \cdot 35 \cdot 4 \cdot 10 = 7000$.

Opgave 6.
In een vaas zitten 8 rode, 3 witte en 9 blauwe knikkers. Je trekt drie keer een knikker zonder terugleggen. Bepaal de volgende kansen:

(i) alle drie getrokken knikkers zijn rood,

(ii) alle drie getrokken knikkers zijn wit,

(iii) twee van de getrokken knikkers zijn rood, de derde is blauw,

(iv) minstens een van de getrokken knikkers is wit,

(v) bij de getrokken knikkers is een van elke kleur,

(vi) de knikkers worden in de volgorde rood, wit, blauw getrokken.

Oplossingen

(i) Het aantal mogelijke grepen uit de vaas is $\binom{20}{3} = 1140$, het aantal grepen waarbij je alleen maar rode knikkers pakt is $\binom{8}{3} = 56$, dus is de kans $\frac{56}{1140} = \frac{14}{285} \approx 4.91\%$.

(ii) In dit geval is er maar een goede greep, dus is de kans $\frac{1}{1140} \approx 0.09\%$.

(iii) Er zijn $\binom{8}{2} = 28$ mogelijkheden om 2 uit de 8 rode knikkers te pakken en $\binom{9}{1} = 9$ mogelijkheden om een blauwe knikker te pakken, dus is de kans $\frac{28 \cdot 9}{1140} = \frac{21}{95} \approx 22.11\%$.

(iv) Er zijn 17 knikkers die niet wit zijn, dus zijn er $\binom{17}{3} = 680$ mogelijkheden om 3 knikkers te pakken die niet wit zijn. De kans op minstens een witte knikker is dus $1 - \frac{680}{1140} = \frac{23}{57} \approx 40.35\%$.

(v) Er zijn $8 \cdot 3 \cdot 9 = 216$ manieren om in een greep van drie knikkers een van elke kleur te hebben, de kans is dus $\frac{216}{1140} = \frac{18}{95} \approx 18.95\%$.

(vi) De kans op rood in de eerste greep is $\frac{8}{20}$, de kans op wit in de tweede is dan $\frac{3}{19}$ en de kans op blauw in de derde is dan $\frac{9}{18}$, de kans is dus $\frac{8 \cdot 3 \cdot 9}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \frac{3}{95} \approx 3.16\%$. We kunnen dit ook uit (v) afleiden, want van de 216 manieren om de drie kleuren te pakken is maar een zesde in de goede volgorde, dus volgt ook hier dat de kans $\frac{72}{1140} = \frac{3}{95}$ is.

Opgave 7.

Bij de schakers A en B wint A een spel gemiddeld met kans $\frac{1}{2}$ en B wint met kans $\frac{1}{3}$, de andere partijtjes eindigen in gelijkspel. Vanavond spelen A en B een match van drie spelen. Wat is de kans dat (a) A alle drie spelen wint, (b) twee spelen in een gelijkspel eindigen, (c) A en B afwisselend winnen, (d) B minstens een spel wint?

Oplossingen

(a) De kans dat A alle drie spelen wint is $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8} = 12.5\%$.

(b) De kans op gelijkspel is $\frac{1}{6}$, dus is de kans $\binom{3}{2}(\frac{1}{6})^2\frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 5}{6^3} = \frac{5}{72} \approx 6.94\%$.

(c) De kans dat de rij van winnende spelers (A, B, A) is, is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, de kans dat de rij (B, A, B) is, is $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$, dus is de kans op afwisselende winsten $\frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36} \approx 13.89\%$.

(d) De kans dat B één spel niet wint is $\frac{2}{3}$, dus is de kans dat B geen van de drie spelen wint $(\frac{2}{3})^3$ en dus is zijn kans om minstens een spel te winnen $1 - \frac{2^3}{3^3} = \frac{19}{27} \approx 70.37\%$.

Opgave 8.

Een oneerlijke dobbelsteen is zo gemaakt dat 3 drie keer zo vaak valt als 4 en 2 twee keer zo vaak als 5. Verder vallen 1, 2, 3 en 6 even vaak.

(i) Geef een kansverdeling voor het werpen van deze dobbelsteen aan.

(ii) Bepaal de kans dat bij twee keer werpen van deze dobbelsteen de som minstens 11 is.

Oplossingen

(i) Er geldt $P(1) = P(2) = P(3) = P(6)$, $P(3) = 3P(4)$ en $P(2) = 2P(5)$. We hebben dus $\sum_{i=1}^{6} P(i) = P(1) \cdot (1 + 1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1) = \frac{29}{6} P(1)$. Voor een kansverdeling moet deze som gelijk aan 1 zijn, dus is $P(1) = P(2) = P(3) = P(6) = \frac{6}{29}$, $P(4) = \frac{2}{29}$ en $P(5) = \frac{3}{29}$.

(ii) De som is minstens 11 bij de worpen $(5, 6)$, $(6, 5)$ en $(6, 6)$, dus de kans om een som ≥ 11 is $2 \cdot \frac{3}{29} \cdot \frac{6}{29} + (\frac{6}{29})^2 = \frac{72}{841} \approx 8.56\%$. (Bij een eerlijke dobbelsteen is deze kans kleiner, namelijk $\frac{3}{36} \approx 8.33\%$.)

Opgave 9.
In Nijmegen zijn er 800 families met vijf kinderen. Hoeveel families met (a) 3 meisjes, (b) 5 meisjes, (c) 2 of 3 jongens verwacht je? (Je kunt ervan uit gaan dat er even veel jongens als meisjes geboren worden.)

Oplossingen

(a) De kans op 3 meisjes in een familie met 5 kinderen is $\binom{5}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^2 = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$, dus bij 800 families verwacht je $800 \cdot \frac{5}{16} = 250$ families met 3 meisjes en 2 jongens.

(b) De kans dat er 5 meisjes zijn is $(\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$, dus verwachten we dit $800 \cdot \frac{1}{32} = 25$ keer.

(c) De gevallen van 3 meisjes en 2 jongens en van 2 meisjes en 3 jongens hebben dezelfde kans, uit (a) volgt dat we voor elk van deze gevallen 250 families verwachten, dus in totaal 500 families.

Opgave 10.
Een rad van avontuur heeft vier sectoren waarin het rad met dezelfde kans tot stilstand komt. Het rad wordt gedraaid tot dat het in sector I stopt, maar hooguit 10 keer. Bepaal de kansen voor de volgende gebeurtenissen:

A_i : Het rad stopt bij de i-de draaiing in sector I.

B : Het rad stopt helemaal niet in sector I.

C : Het aantal draaiingen is even.

Oplossingen

De kans dat het rad in sector I stopt is $\frac{1}{4}$, de kans dat het in een andere sector stopt dus $\frac{3}{4}$. De kans $P(A_i)$ is dus $(\frac{3}{4})^{i-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3^{i-1}}{4^i}$.

De kans dat het rad bij geen van de 10 pogingen in sector I stopt is $P(B) = (\frac{3}{4})^{10}$.

Het aantal draaiingen is even als of A_i met i even gebeurt of B, dus is de kans op een even aantal draaiingen $\frac{3}{4^2} + \frac{3^3}{4^4} + \frac{3^5}{4^6} + \frac{3^7}{4^8} + \frac{3^9}{4^{10}} + \frac{3^{10}}{4^{10}} = \frac{120783}{262144} \approx 46.08\%$.

Opgave 11.
In een vaas zitten 7 witte en 1 rode knikkers. Je trekt herhaald een knikker, bekijkt de kleur en legt hem vervolgens terug. Bepaal de kans dat je bij 8 pogingen precies 3 keer de rode knikker pakt. Gebruik hiervoor (a) de binomiale verdeling, (b) de benadering door de Poisson-verdeling.

Hoe zit het met de resultaten als 15 witte en 1 rode knikker hebt en 16 pogingen doet? En hoe zit het bij 79 witte en 1 rode knikker en 80 pogingen?

Oplossingen

Er wordt met kans $p = \frac{1}{8}$ een rode knikker getrokken, het aantal pogingen is $m = \frac{1}{p}$. Met de binomiale verdeling bereken je de (juiste) kans, om 3 keer een rode knikker de pakken als $P(k = 3) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} = \binom{8}{3} \frac{1}{8^3} \cdot (\frac{7}{8})^5 = 56 \cdot \frac{16807}{16777216} \approx 5.61\%$.

Bij de benadering met de Poisson-verdeling hebben we $\lambda := m \cdot p = 1$, dus is de kans $P(k = 3)$ volgens deze benadering $po_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-1}}{6} \approx 6.13\%$.

Als we de 8 knikkers naar 16 knikkers veranderen waarbij 1 rood en de andere wit zijn, veranderd p naar $p = \frac{1}{16}$. Het aantal pogingen is zo gekozen dat de parameter λ voor de Poisson-verdeling hetzelfde blijft en dus ook de kans volgens de Poisson-verdeling. De binomiale verdeling geeft in dit geval $P(k = 3) = \binom{16}{3}(\frac{1}{16})^3 \cdot (\frac{15}{16})^{13} = 560 \cdot \frac{1946195068359375}{18446744073709551616} \approx 5.91\%$. De Poisson-verdeling is in dit geval al een betere benadering.

Als we tenslotte 80 knikkers nemen waaronder 1 rode zit en het aantal pogingen weer zo kiezen dat λ hetzelfde blijft (dus 80), geeft de binomiale verdeling $P(k = 3) = \binom{80}{3}\frac{1}{80^3} \cdot (\frac{79}{80})^{77} = \frac{82160}{80^3} \cdot (\frac{79}{80})^{77} \approx 6.09\%$. Het wordt dus duidelijk dat bij grotere waarden van m de benadering door de Poisson-verdeling altijd beter wordt.

Opgave 12.
In vaas I zitten 3 rode en 5 witte knikkers, in vaas II zijn er 4 rode en 2 witte. Er wordt een knikker willekeurig uit vaas I gegrepen en in vaas II gelegd. Vervolgens wordt er een knikker uit vaas II getrokken. Wat is de kans dat deze knikker wit is?

Oplossing

We noemen het trekken van een rode knikker in de i-de greep r_i en het trekken van een witte knikker w_i. We weten dat $P(r_1) = \frac{3}{8}$ en $P(w_1) = \frac{5}{8}$. Verder is $P(w_2 \mid r_1) = \frac{2}{7}$, want in dit geval hebben we een rode knikker uit vaas I in vaas II gelegd en zijn er dus nu 5 rode en 2 witte knikkers. Evenzo is $P(w_2 \mid w_1) = \frac{3}{7}$. De totale kans $P(w_2)$ is gegeven door $P(w_2 \cap r_1) + P(w_2 \cap w_1)$, want in de eerste greep wordt of een rode of een witte knikker gepakt. Er geldt dus $P(w_2) = P(w_2 \mid r_1)P(r_1) + P(w_2 \mid w_1)P(w_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8} = 37.5\%$.

Opgave 13.
In een vaas zitten 3 rode en 2 blauwe knikkers, in een tweede vaas zitten 2 rode en 8 blauwe knikkers. Er wordt eerst een munt geworpen om te bepalen uit welke vaas een knikker getrokken wordt: als kop valt uit de eerste en als munt valt uit de tweede.

(i) Bepaal de kans dat een rode knikker getrokken wordt.

(ii) Stel dat je niet hebt gezien of kop of munt gevallen is, maar wel dat een rode knikker getrokken wordt. Wat is de kans dat kop is gevallen, dus dat de knikker uit de eerste vaas is getrokken?

Oplossingen

(i) Het trekken van een rode of blauwe knikker noteren we met R en B, het vallen van kop of munt met K en M. We weten dat $P(R \mid K) = \frac{3}{5}$, $P(R \mid M) = \frac{1}{5}$, en $P(K) = P(M) = \frac{1}{2}$. Voor de kans $P(R)$ geldt $P(R) = P(R \cap K) + P(R \cap M) = P(R \mid K)P(K) + P(R \mid M)P(M) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5} = 40\%$.

(ii) Hier zoeken we de voorwaardelijke kans $P(K \mid R)$. Met de regel van Bayes geldt hiervoor $P(K \mid R) = \frac{P(R|K)P(K)}{P(R)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4} = 75\%$.

Opgave 14.
Een huis is voorzien met een alarminstallatie. Als er een inbraak is, zal er met 96% kans een alarm komen, maar ook als er geen inbraak is, is er (door aardbevingen of andere storingen) met

een kans van 0.1% een alarm. In de woonwijk van het huis is de kans op een inbraak 0.3%. Vannacht is er een alarm. Hoe groot is de kans dat er daadwerkelijk een inbraak plaats vindt?

Oplossing

We noemen de kans op een inbraak I en de kans op een alarm A. Gegeven zijn de kansen $P(A \mid I) = 0.96$, $P(A \mid I^c) = 0.01$ en $P(I) = 0.003$. Gezocht is de kans $P(I \mid A)$. Met de regel van Bayes geldt $P(I \mid A) = \frac{P(A|I)P(I)}{P(A)} = \frac{P(A|I)P(I)}{P(A|I)P(I)+P(A|I^c)P(I^c)} = \frac{0.96 \cdot 0.003}{0.96 \cdot 0.003+0.01 \cdot 0.997} \approx 22.41\%$. Een redelijke benadering voor dit soort kansen is te verkrijgen door de kansen die dicht bij 1 zijn door 1 te vervangen. In het voorbeeld geeft dit de behoorlijk goede benadering $P(I \mid A) \approx \frac{0.003}{0.003+0.01} \approx 23.08\%$.

Opgave 15.

Er wordt twee keer met een eerlijke dobbelsteen gedobbeld. De uitkomsten A, B en C zijn:

$A:$ Er wordt twee keer hetzelfde getal gedobbeld.

$B:$ Het eerste getal is 1 of 6.

$C:$ Het tweede getal is even.

Zijn A, B, C onafhankelijk? Zijn de uitkomsten paarsgewijs onafhankelijk?

Oplossingen

Er geldt $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ en $P(C) = \frac{1}{2}$. Verder is $P(A \cap B) = \frac{1}{18}$, want de mogelijkheden hiervoor zijn $(1, 1)$ en $(6, 6)$, we hebben $P(A \cap C) = \frac{1}{12}$ en $P(B \cap C) = \frac{1}{6}$. Hieruit zien we dat de uitkomsten paarsgewijs onafhankelijk zijn. Tenslotte is $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}$, want de enige mogelijkheid is $(6, 6)$, dus zijn de uitkomsten inderdaad onafhankelijk.

Opgave 16.

De goedkope random-trein vertrekt op een willekeurig tijdstip tussen 10.00 en 10.30 uur. Je beslist zelf ook op een willekeurig tijdstip in dit half uur op het station op te dagen en hooguit 5 minuten te wachten. Als de trein in dit interval niet komt, pak je een taxi om nog op tijd naar het college te komen. Wat is de kans dat je met de trein zult rijden?

Oplossing

Stel de trein komt om $T = t \cdot 30$ minuten over 10.00 uur, dus $0 \leq t \leq 1$. Als $T \leq 5$ rij je met de trein als je voor de trein komt. De kans, de trein te pakken is dus t. Als $T \geq 5$ rij je met de trein als je om x minuten over 10.00 uur komt waarbij $T - 5 \leq x \leq T$. In dit geval is de kans om de trein te pakken $\frac{T-(T-5)}{30} = \frac{1}{6}$. De totale kans om de trein te pakken is dus $\int_0^{\frac{1}{6}} t\, dt + \int_{\frac{1}{6}}^{1} \frac{1}{6}\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{6}} + \frac{t}{6}\Big|_{\frac{1}{6}}^{1} = \frac{1}{72} + \frac{5}{36} = \frac{11}{72} \approx 15.28\%$.

Opgave 17.

Een stok wordt willekeurig in twee stukken gehakt. Wat is de kans dat het ene stuk minstens twee keer zo lang is als het andere?

Oplossing

We kunnen aannemen dat de stok lengte 1 heeft, dan is de plaats a waar we de stok door hakken een stochast met een gelijkverdeling op $[0, 1]$. Een stuk is minstens twee keer zo lang als het andere als of $a \geq 2(1-a)$ of $2a \leq (1-a)$. In het eerste geval volgt $a \geq \frac{2}{3}$, in het tweede volgt $a \leq \frac{1}{3}$, de totale kans is dus $\frac{2}{3}$.

Opgave 18.
Op een stok van $1m$ lengte kies je willekeurig twee punten en hakt vervolgens de stok op deze twee punten door. Wat is de kans dat je uit de drie zo verkregen stukken een driehoek kunt vormen? (Je kunt een driehoek vormen dan en slechts dan als de som van twee stukken altijd groter is dan het derde stuk.)

De net verkregen kans vind je te klein, daarom kies je voor een andere aanpak. Eerst hak je de stok op een willekeurig punt in twee delen en vervolgens pak je het grotere stuk en hak dit nog eens op een willekeurig gekozen punt door. Wat is nu de kans dat je uit de drie stukken een driehoek kunt vormen?

Oplossingen

We kiezen twee punten a en b op de stok, dan zijn a en b stochasten met een gelijkverdeling op $[0,1]$. We nemen eerst aan dat $a \leq b$, het geval $a \geq b$ moet dan uit symmetrie-redenen nog eens dezelfde kans opleveren. De drie stukken hebben de lengtes a, $b-a$ en $1-b$ en we kunnen een driehoek vormen als $a+(b-a) \geq 1-b$, $a+(1-b) \geq b-a$ en $(b-a)+(1-b) \geq a$. Deze ongelijkheden zijn equivalent met $b \geq \frac{1}{2}$, $b \leq a+\frac{1}{2}$ en $a \leq \frac{1}{2}$. Voor een waarde a met $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ moet b dus tussen $\frac{1}{2}$ en $a+\frac{1}{2}$ liggen, de kans op zo'n waarde voor b is gelijk aan a. We kunnen de kans voor b dus als een functie van a beschrijven en krijgen de kans dat we een driehoek kunnen vormen als het integraal over deze functie over de mogelijke waarden van a, dus $P(\triangle) = \int_0^{\frac{1}{2}} a\ da = \frac{a^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$. Ook het geval $a \geq b$ levert nog eens de kans $\frac{1}{8}$ op, dus is de totale kans dat we een driehoek kunnen vormen gelijk aan $\frac{1}{4}$.

Bij de tweede aanpak kiezen we eerst een punt b willekeurig en hakken dan het langere stuk nog een keer door. We nemen eerst aan dat $b \geq \frac{1}{2}$ is, dan heeft het langere stuk de lengte b en het kortere stuk de lengte $1-b$. Het geval $b \leq \frac{1}{2}$ moet om symmetrie-redenen nog eens dezelfde kans opleveren. Op het stuk van lengte b kiezen we willekeurig een punt a, dan hebben de drie stukken net als boven de lengtes a, $b-a$ en $1-b$. Om een driehoek te kunnen vormen moeten a en b dus weer aan dezelfde voorwaarden $b \geq \frac{1}{2}$, $b \leq a+\frac{1}{2}$ en $a \leq \frac{1}{2}$ voldoen. We gaan nog altijd ervan uit dat $b \geq \frac{1}{2}$ is, dus moet a nu nog voldoen aan $a \geq b-\frac{1}{2}$ en $a \leq \frac{1}{2}$, dus mag a in het interval $[b-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ van lengte $1-b$ liggen. Omdat we a willekeurig op een stuk van lengte b kiezen, is de dichtheidsfunctie voor de kans voor zo'n waarde van a gelijk aan $f(b) = \frac{1-b}{b}$. De kans om een driehoek te kunnen vormen vinden we nu weer als het integraal over de dichtheidsfunctie, namelijk $P(\triangle) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-b}{b}\ db = \int_{\frac{1}{2}}^1 (\frac{1}{b}-1)\ db = \log(b)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - b\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \log(1)-\log(\frac{1}{2})-\frac{1}{2} = \log(2)-\frac{1}{2}$. Omdat het geval $b \leq \frac{1}{2}$ nog eens dezelfde kans oplevert, is de totale kans op een driehoek $2\log(2)-1 \approx 38.63\%$.

Opgave 19.
De kans dat een student bij het grote lustrumfeest een bier krijgt is 99.2% (soms is het bier op, soms denkt de baas dat de student geen 16 jaar oud is). Een slimme verzekeringsmaatschappij biedt eenmalig een verzekeringspolis, waar je voor een premie van 10 € tegen bierarmoede verzekerd bent. In het geval dat je inderdaad geen bier op het feest krijgt betaalt de verzekering 1000 €. Wat is de verwachte winst van de verzekeringsmaatschappij bij elk afgesloten polis?

Oplossing

Als een student een bier krijgt hoeft de verzekeringsmaatschappij niets te betalen en boekt dus een winst van 10 €. Dit gebeurt met een kans van 0.992. Omgekeerd maken ze voor het geval dat een student inderdaad geen bier krijgt een verlies van 990 €, maar de kans hiervoor is maar 0.008. De verwachtingswaarde voor de winst is dus $0.992 \cdot 10 + 0.008 \cdot (-990) = 2$. Ze kunnen dus gemiddeld op een winst van 2 € per polis rekenen.

Opgave 20.

Er wordt met twee (eerlijke) dobbelstenen gedobbeld. De stochast X beschrijft het maximale getal in een worp. Bereken $P(X = k)$ voor $k = 1, \ldots, 6$ en de verwachtingswaarde $E(X)$.

Bekijk hetzelfde probleem voor drie dobbelstenen.

Oplossingen

De mogelijke worpen met maximum k zijn (k, i), (i, k) met $i < k$ en (k, k), dus zijn er $2k - 1)$ mogelijkheden. De kans $P(X = k)$ is dus $P(X = k) = \frac{2k-1}{36}$ en de verwachtingswaarde is $\frac{1}{36} \sum_{k=1}^{6} k(2k - 1) = \frac{161}{36} \approx 4.47$.

Bij drie dobbelstenen is het maximum k voor de worpen (k, i, j), (i, k, j), (i, j, k) met $i, j < k$, voor de worpen (k, k, i), (k, i, k), (i, k, k) met $i < k$ en voor de worp (k, k, k), dus zijn er $3(k - 1)^2 + 3(k - 1) + 1 = 3k^2 - 3k + 1$ mogelijkheden. De kans $P(X = k)$ is dus $P(X = k) = \frac{3k^2-3k+1}{216}$ en de verwachtingswaarde is $\frac{1}{216} \sum_{k=1}^{6} k(3k^2 - 3k + 1) = \frac{1071}{216} \approx 4.96$.

Opgave 21.

Bij een bloedtest van 10 personen is bekend dat 2 een zeker virus in hun bloed hebben. Om het aantal tests in te krimpen wordt te volgende methode toegepast: De 10 personen worden willekeurig in twee groepen van 5 personen ingedeeld. Het bloed van de personen in een groep wordt vermengd en getest. Als het virus in het mengsel gevonden wordt, wordt het bloed van elk persoon in de groep apart getest.

Beschrijf een geschikte ruimte Ω met een kansverdeling P, zo dat het aantal van bloedtests een stochast op deze kansruimte is. Bereken de verwachtingswaarde voor het aantal bloedtests.

Oplossing

Na indeling van de groepen noemen we de personen 1 t/m 10, zo dat de eerste groep de personen 1 t/m 5 bevat en de tweede de personen 6 t/m 10. Als kansruimte Ω nemen we de (ongeordende) paren van personen, dus $\Omega = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i < j \leq 10\}$, waarbij $|\Omega| = \binom{10}{2} = 45$. De kansverdeling op Ω is de gelijkverdeling met $P(\{i, j\}) = \frac{1}{45}$. De stochast X die het aantal bloedtests beschrijft is gegeven door $X(\{i, j\}) = 7$ als $i, j \leq 5$ of $i, j \geq 6$ en door $X(\{i, j\}) = 12$ in alle andere gevallen. Er zijn $\binom{5}{2} = 10$ paren met $i, j \leq 5$, evenzo 10 paren met $i, j \geq 6$ en 25 paren waar een persoon in de eerste groep en de andere in de tweede groep zit. Voor de verwachtingswaarde krijgen we dus $E(X) = 7 \cdot \frac{10}{45} + 7 \cdot \frac{10}{45} + 12 \cdot \frac{25}{45} = \frac{88}{9} \approx 9.78$. We kunnen dus bij deze methode een iets kleiner aantal bloedtests verwachten dan bij het testen van de enkele personen.

Opgave 22.

Een winnaar bij een televisiequiz krijgt een van drie prijzen. De prijzen worden één voor één aangeboden en de winnaar mag of een prijs accepteren (dan worden de verdere prijzen niet meer getoond) of weigeren (dan mag hij op deze prijs niet meer terug komen). Stel dat de winnaar een duidelijke rangschikking voor de prijzen heeft. Er zijn nu twee voor de hand liggende strategieën:

(A) Kies in ieder geval de eerste prijs.

(B) Als de tweede prijs aantrekkelijker is dan de eerste, kies de tweede, als niet, kies de derde.

Bepaal voor elk van de twee strategieën de kansen om de meest aantrekkelijke en de minst aantrekkelijke prijs te kiezen.

Oplossing

We noemen de prijzen met afstijgende aantrekkelijkheid $1, 2, 3$, dan kunnen we de mogelijke volgordes hoe de prijzen aangeboden worden en de keuzes die met de twee strategieën gemaakt worden in een tabelletje schrijven

volgorde	A	B
$(1, 2, 3)$	1	3
$(1, 3, 2)$	1	2
$(2, 1, 3)$	2	1
$(2, 3, 1)$	2	1
$(3, 1, 2)$	3	1
$(3, 2, 1)$	3	2

Met strategie A pak je dus met kans $\frac{1}{3}$ de meest en ook de minst aantrekkelijke prijs. Strategie B is beter, want je pakt met kans $\frac{1}{2}$ de meest aantrekkelijke, maar alleen maar met kans $\frac{1}{6}$ de minst aantrekkelijke prijs.

Opgave 23.

Er wordt twee keer met een dobbelsteen gedobbeld. De stochast X_1 beschrijft het aantal ogen in de eerste worp, de stochast X_2 het aantal ogen in de tweede. Verder geeft $U := \min(X_1, X_2)$ het kleinste en $V := \max(X_1, X_2)$ het grootste van de twee aantallen.

(i) Zijn U en V onafhankelijk?

(ii) Bepaal de kansverdeling van U.

(iii) Bepaal de verwachtingswaarden $E(U)$ en $E(U + V)$.

(iv) Bepaal de voorwaardelijke kans $P(X_1 = 3 \mid U = 3)$.

Oplossingen

(i) De stochasten U en V zijn niet onafhankelijk, want het maximum van twee worpen is altijd groter of gelijk aan het minimum. Voor $k > l$ is dus $P(U = k, V = l) = 0$, terwijl $P(U = k)$ en $P(V = l)$ allebei > 0 zijn. In het bijzonder is dus $P(U = k, V = l) \neq P(U = k) \cdot P(V = l)$.

(ii) De mogelijke worpen met minimum k zijn (k, i) of (i, k) met $i > k$ en (k, k), dus is het aantal mogelijkheden $2(6 - k) + 1$. De kansverdeling voor U is dus gegeven door $P(U = k) = \frac{12-2k+1}{36}$. Analoog vinden we voor de stochast V dat $P(V = k) = \frac{2k-1}{36}$.

(iii) De verwachtingswaarde voor U is $E(U) = \frac{1}{36}(\sum_{k=1}^{6} k(12-2k+1)) = \frac{91}{36} \approx 2.53$.

De verwachtingswaarde voor $U+V$ is $E(U+V) = \sum_{k=2}^{12} k \cdot P(U+V=k)$. Maar de mogelijkheden dat de som van U en V gelijk aan k is, krijgen we ook als we over de verschillende mogelijkheden voor U en V lopen, dus $E(U+V) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j)P(U=i, V=j)$. Het geval $i=j$ hebben we alleen maar als $X_1 = i$ en $X_2 = i$ en voor $i < j$ zijn er de twee mogelijkheden $X_1 = i, X_2 = j$ en $X_1 = j, X_2 = i$. We kunnen dus net zo goed over alle mogelijkheden van X_1 en X_2 lopen, en krijgen $E(U+V) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j)P(X_1 = i, X_2 = j) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j)\frac{1}{36} = \frac{1}{36}(\sum_{i=1}^{6} 6i + 21) = \frac{1}{36}(6 \cdot 21 + 6 \cdot 21) = \frac{21}{3} = 7$.

(iv) We hebben $P(U=3) = \frac{7}{36}$ en $P(X_1 = 3, U = 3) = \frac{4}{36}$, dus is $P(X_1 = 3 \mid U = 3) = \frac{4}{7}$.