Wiskunde 1 voor kunstmatige intelligentie

Opgaven voor Lineaire Algebra - Oplossingen

Opgave 1.

Breng de volgende stelsels lineaire vergelijkingen op rijtrapvorm, concludeer of ze oplosbaar zijn en geef, zo ja, alle oplossingen aan.

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &=& 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 &=& 3 \end{array} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &=& 7 \\ 4x_1 + 3x_3 + x_4 &=& 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &=& -2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &=& -2 \end{array}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &=& 0 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 &=& 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 &=& 0 \end{array} \qquad \text{(iv)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &=& 2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &=& 3 \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &=& 4 \end{array}$$

$$\text{(v)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &=& 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 6x_4 &=& 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 &=& 4 \end{array} \qquad \text{(vi)}\quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &=& 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 &=& 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &=& 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 &=& 0 \end{array}$$

Oplossingen

(i) Rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dus is het stelsel oplosbaar met een vrije parameter. De oplossingen zijn $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) + t(-7, 1, 5)$.

(ii) Stappen naar de rijtrapvorm zijn:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 13 & -19 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 11 & -23 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 13 & -19 \\ 0 & 0 & -27 & 63 & -121 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 13 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

De eenduidige oplossing is $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (10/9, 11/9, 17/9, -10/9)$.

(iii) Rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dus is het stelsel oplosbaar met een vrije parameter. De oplossingen zijn $(x_1, x_2, x_3) = t(9, -4, 1)$.

(iv) Rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dus is het stelsel niet oplosbaar.

(v) Rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dus zijn er twee vrije parameters. De oplossingen zijn $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0, 0) + t(2, -2, 0, 1) + s(-1, 2, 1, 0)$.

(vi) Rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dus zijn er drie vrije parameters. De oplossingen zijn $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t(-3, 0, 2, 0, 1) + s(-4, 0, 3, 1, 0) + r(-2, 1, 0, 0, 0)$.

Opgave 2.
Bepaal de waarden van de parameter a zo dat het stelsel lineaire vergelijkingen: (a) een eenduidige oplossing heeft, (b) meerdere oplossingen heeft, (c) niet oplosbaar is:

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + ax_3 & = & 3 \\ x_1 + ax_2 + 3x_3 & = & 2 \end{array} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + ax_3 & = & 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & a \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 1 \end{array}$$

Oplossingen

(i) De rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & (3+a)(2-a) & 2-a \end{pmatrix}$. Voor $a \neq -3$ en $a \neq 2$ zijn er drie pivot elementen en is het stelsel dus eenduidig oplosbaar. Voor $a = -3$ is de laatste rij $(0, 0, 0, 5)$, dus is het stelsel dan niet oplosbaar. Voor $a = 2$ is de laatste rij een 0-rij en is er dus een vrije parameter.

(ii) De rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 2-3a & -6+a \\ 0 & 0 & -3+a & 3-a \end{pmatrix}$. Voor $a \neq 3$ is er een eenduidige oplossing en voor $a = 3$ is er een vrije parameter. Het stelsel is voor elke waarde van a oplosbaar.

Opgave 3.
Aan welke voorwaarden moeten a, b en c voldoen daarmee het volgende stelsel lineaire vergelijkingen een oplossing heeft?

$$\text{(i)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & a \\ 2x_1 + 6x_2 - 11x_3 & = & b \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 & = & c \end{array} \qquad \text{(ii)} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & a \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & b \\ x_1 - 5x_2 + 8x_3 & = & c \end{array}$$

Oplossingen

(i) De rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c+2b-5a \end{pmatrix}$. Het stelsel is dus oplosbaar als $c+2b-5a = 0$. In dit geval is er een vrije parameter.

(ii) De rijtrapvorm is $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 11 & b-3a \\ 0 & 0 & 0 & c-b+2a \end{pmatrix}$. Het stelsel is dus oplosbaar als $c-b+2a = 0$. In dit geval is er een vrije parameter.

Opgave 4.
Ga na of de volgende stelsels van vectoren lineair afhankelijk of onafhankelijk zijn:

$$\text{(i)}\ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{(ii)}\ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{(iii)}\ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{(iv)}\ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Oplossingen

(i) De vectoren zijn lineair afhankelijk, want $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) De vectoren zijn lineair onafhankelijk want de matrix van het homogeen stelsel vergelijkingen $x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft rijtrapvorm $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ en dus alleen maar de triviale oplossing $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

(iii) De vectoren zijn lineair afhankelijk, want $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(iv) De vectoren zijn lineair onafhankelijk want de matrix van het homogeen stelsel vergelijkingen $x_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heeft rijtrapvorm $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ en dus alleen maar de triviale oplossing $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Merk op dat hier wel een 0-rij in de rijtrapvorm is, maar dat we geen vrije parameter hebben omdat er meer vergelijkingen dan onbekende waren en er even veel pivots als onbekende zijn.

Opgave 5.
Ga na of de volgende afbeeldingen lineair zijn en geef, zo ja, de matrix van de afbeelding met betrekking tot de standaardbases aan:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y) := xy$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : f(x) := (2x, 3x)$

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y) := (2x - y, x)$

(iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x, y) := (x + 1, 2y, x + y)$

(v) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x, y) := (x, 2y, x + y)$

(vi) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x, y) := (x^2, 2y, x + y)$

(vii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y, z) := (z, x + y)$

(viii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x, y, z) := (x + 1, y + z)$

Oplossingen

(i) Niet lineair, bijvoorbeeld is $f(2 \cdot (1, 1)) = f(2, 2) = 4$, maar $2 \cdot f(1, 1) = 2$.
(ii) Lineair, matrix is $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$.
(iii) Lineair, matrix is $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(iv) Niet lineair, $f(0, 0) = (1, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$.
(v) Lineair, matrix is $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
(vi) Niet lineair, bijvoorbeeld is $f(2(1, 0, 0)) = f(2, 0, 0) = (4, 0, 2)$, maar $2 \cdot f(1, 0, 0) = 2 \cdot (1, 0, 1) = (2, 0, 2)$.
(vii) Lineair, matrix is $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
(viii) Niet lineair, $f(0, 0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

Opgave 6.
Bereken de volgende determinanten:

$$\det\begin{pmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix},$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Oplossingen

We berekenen de determinanten door de matrices op rijtrapvorm te brengen en de elementen op de diagonaal te vermenigvuldigen. Voor 2×2 en 3×3 kunnen we ook de schema's uit het dictaat gebruiken.

$\det \begin{pmatrix} t-5 & 7 \\ -1 & t+3 \end{pmatrix} = (t-5)(t+3) - (-7) = t^2 - 2t - 8 = (t-4)(t+2)$.

$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} = 21$.

$\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 8$.

$\det \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

$\det \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix} = (t+3)(t-3)(t+4) + (-6) + (-30) - (-6)(t+3) - 6(t-3) - (-5)(t+4) = (t+2)(t-2)(t+4)$.

$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix} = -4$.

$\det \begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix} = -54$.

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -131$, want zonder rijen te verwisselen bereiken we de rijtrapvorm $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{131}{18} \end{pmatrix}$.

Opgave 7.

Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de volgende matrices. Geef, als mogelijk, een basistransformatie naar een nieuwe basis aan zo dat de afbeelding met betrekking tot de nieuwe basis een diagonaalmatrix is.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Oplossingen

(A) Het karakteristieke polynoom $\det(A - \lambda I)$ is $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$. De eigenwaarden van A zijn dus 5 en -1. De eigenvectoren voor de eigenwaarde 5 zijn de kern van $A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De eigenvectoren voor de eigenwaarde -1 zijn de kern van $A + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Met betrekking tot de basis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ heeft de afbeelding dus de matrix $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(B) Het karakteristieke polynoom $\det(B - \lambda I)$ is $\lambda^2 - \lambda + 1$ en heeft geen reële nulpunten.

(C) Het karakteristieke polynoom $\det(C - \lambda I)$ is $(\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$. De eigenwaarden van C zijn dus -2 en 4. De eigenvectoren voor de eigenwaarde -2 zijn de kern van $C + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De eigenvectoren voor de eigenwaarde 4 zijn de kern van $C - 4I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Met betrekking tot de basis $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ heeft de afbeelding dus de matrix $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(D) Het karakteristieke polynoom $\det(D - \lambda I)$ is $(\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$. De eigenwaarden van D zijn dus -2 en 4. De eigenvectoren voor de eigenwaarde -2 zijn de kern van $D + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & 1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De eigenvectoren voor de eigenwaarde 4 zijn de kern van $D - 4I = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In dit geval zijn er maar twee lineair onafhankelijke eigenvectoren, dus bestaat er geen basis met betrekking tot wie de afbeelding een diagonaalmatrix heeft.

(E) De determinant van $(E - \lambda I)$ is $\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(4-\lambda) + 4 -$

$(4-\lambda)-(6-2\lambda)-(6-2\lambda) = -\lambda^3+10\lambda^2-28\lambda+24 = -(\lambda-2)^2(\lambda-6)$. De eigenwaarden zijn dus 2 en 6. De eigenvectoren voor de eigenwaarde 2 zijn de kern van $E-2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De eigenvectoren voor de eigenwaarde 6 zijn de kern van $E-6I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Met betrekking tot de basis $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ heeft de afbeelding dus de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

(F) De determinant van $(F-\lambda I)$ is $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^2-4\lambda)(\lambda+2)+12-7\lambda-14 = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$. De eigenwaarden zijn dus 2, 1 en -1. De eigenvectoren voor de eigenwaarde 2 zijn de kern van $F-2I = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De eigenvectoren voor de eigenwaarde 1 zijn de kern van $F-I = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. De eigenvectoren voor de eigenwaarde -1 zijn de kern van $F+I = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Met betrekking tot de basis $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ heeft de afbeelding dus de matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(G) De determinant van $(G-\lambda I)$ is $\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 10 & -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4 & 6-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = -(\lambda-1)^2(\lambda-1)$. De eigenwaarden zijn dus 1, en 2. De eigenvectoren voor de eigenwaarde 1 zijn de kern van $G-I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & -5 & 5 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. De eigenvectoren voor de eigenwaarde 2 zijn de kern van $G-2I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 10 & -6 & 5 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, dus de vectoren $t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$. Omdat er maar twee lineair onafhankelijke eigenvectoren zijn, bestaat er geen basis met betrekking tot wie de afbeelding een diagonaalmatrix heeft.

Opgave 8.
Bepaal een basis van de deelruimten die (met betrekking tot het standaardinproduct) orthogonaal op de volgende vectoren staan:

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad \text{(ii)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

Oplossingen

(i) Een vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ die loodrecht op de gegeven vectoren staat is een oplossing van het stelsel lineaire vergelijkingen met matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Omdat de twee vectoren lineair onafhankelijk zijn, weten we al dat hier twee vrije parameter uit moeten komen. De oplossingen van dit stelsel zijn $t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus is $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ een basis voor de deelruimte die loodrecht op de gegeven vectoren staat.

(ii) We moeten drie vectoren vinden, die loodrecht op de gegeven vectoren staan, oplossingen van het stelsel lineaire vergelijkingen met matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ zijn de lineaire combinaties van $\begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Deze vectoren zijn dus een basis voor de deelruimte die loodrecht op de gegeven vectoren staat.

Opgave 9.
Laat zien dat de afbeelding $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) := x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 3y_1y_2$ een inproduct op $\mathbb{R}^2$ definieert (d.w.z. laat zien dat f een positief definiete, symmetrische bilineaire afbeelding is).

Oplossingen

De lineariteit in de twee argumenten gaan we door elementair narekenen na. Ook de symmetrie kunnen we meteen aan de formule voor f aflezen. Als we $f(v, v)$ voor een vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

uitrekenen, hebben we $f(v,v) = x^2 - 2xy + 3y^2 = (x-y)^2 + 2y^2 \geq 0$ omdat dit een som van kwadraten is. Verder geldt $f(v,v) = 0$ alleen maar voor $(x-y) = 0$ en $y = 0$, dus als v de nulvector is.

Opgave 10.

Laten $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vectoren in $\mathbb{R}^2$ zijn.

(i) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ definieert de afbeelding

$$f(v_1, v_2) := x_1x_2 - 3x_1y_2 - 3y_1x_2 + ay_1y_2$$

een inproduct op $\mathbb{R}^2$?

(ii) Voor welke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definieert de afbeelding

$$f(v_1, v_2) := ax_1x_2 + bx_1y_2 + cy_1x_2 + dy_1y_2$$

een inproduct op $\mathbb{R}^2$?

Oplossingen

(i) Het is duidelijk dat f een bilineaire afbeelding en symmetrisch is, dus hoeven we alleen maar na te gaan, wanneer f positief definiet is. Voor een vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hebben we $f(v,v) = x^2 - 6xy + ay^2 = (x-3y)^2 - 9y^2 + ay^2 = (x-3y)^2 + (a-9)y^2$. Dit is een som van kwadraten als $(a-9) > 0$, dus moet $a > 9$ zijn.

(ii) Het is duidelijk dat f een bilineaire afbeelding is. Als we de argumenten v_1 en v_2 ruilen, krijgen we $f(v_1, v_2) := ax_1x_2 + cx_1y_2 + by_1x_2 + dy_1y_2$, dus is f symmetrisch dan en slechts dan als $c = b$ is.

Voor een vector $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hebben we $f(v,v) = ax^2 + 2bxy + dy^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 - \frac{b^2}{a}y^2 + dy^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + (d - \frac{b^2}{a})y^2$. Dit is een som van kwadraten als $a > 0$ en $d - \frac{b^2}{a} > 0$, dus $ad - b^2 > 0$. De voorwaarden dat f een inproduct is, zijn dus dat $c = b$, $a > 0$ en $ad > b^2$.

Opgave 11.

Bepaal een orthonormaalbasis (met betrekking tot het standaardinproduct) voor de deelvectorruimte $U \subseteq \mathbb{R}^4$ die de vectoren $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ bevat.

Oplossingen

We passen op de vectoren $v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ en $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ de Gram-Schmidt orthogonalisatie toe. In de eerste stap brengen we v_1 op lengte 1, dus $v_1' = \frac{1}{\|v_1\|}v_1 = \frac{1}{6}v_1 =$

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$. Nu trekken we van v_2 zijn projectie in de richting van v_1' af, dan staat het verschil loodrecht op v_1'. We hebben dus $v_2'' = v_2 - \langle v_2, v_1'\rangle v_1' = v_2 - 12v_1' = \begin{pmatrix}-5\\-5\\7\\7\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. We moeten v_2'' nog op lengte 1 brengen, dus wordt $v_2' = \frac{1}{\|v_2''\|}v_2'' = \frac{1}{2}v_2'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.
Tenslotte trekken we van v_3 zijn projecties in de richtingen van v_1' en van v_2' af, de resterende vector staat dan loodrecht op v_1' en v_2'. We berekenen dus $v_3'' = v_3 - \langle v_3, v_1'\rangle v_1' - \langle v_3, v_2'\rangle v_2' = v_3 - 2v_1' - 4v_2' = \begin{pmatrix}4\\-2\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\-3\\3\end{pmatrix}$. Nu nog v_3'' op lengte 1 brengen, dan is $v_3' = \frac{1}{\|v_3''\|}v_3'' = \frac{1}{6}v_3'' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Opgave 12.

Geef de orthogonale projectie (met betrekking tot het standaardinproduct) van $v = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ in de richting van $w = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ aan.

Oplossingen

De projectie v_0 van v in de richting van w is gegeven door $v_0 = \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}w = \frac{\langle v,w\rangle}{\langle w,w\rangle}w = \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. We kunnen dit controleren door na te gaan dat het verschil $v - v_0$ inderdaad loodrecht op w staat. Maar $v - v_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$ en dit staat loodrecht op w.