Wiskunde 1 voor kunstmatige intelligentie **23 maart 2004**

Deeltoets 1 (WB033B)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. De opgaven tellen even zwaar. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat.

Opgave 1.
Bekijk het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat een parameter $\beta \in \mathbb{R}$ bevat:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & \beta z & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & \beta \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \end{array}$$

(i) Bepaal voor de parameterwaarde $\beta = 2$ de oplossingen van het stelsel.

(ii) Vind een waarde van de parameter β zo dat het stelsel meerdere oplossingen heeft. Geef voor deze waarde van β de oplossingen aan.

(iii) Laat zien dat de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ inverteerbaar is.

(iv) Kan je de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ als lineaire combinatie van de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ schrijven? (Geef een reden voor je antwoord.)

Opgave 2.
Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bepaal de determinant van A.

(ii) Ga na of $\lambda = 2$ of $\lambda = 0$ eigenwaarden van A zijn.

(iii) Laat zien dat $\lambda = 1$ een eigenwaarde van A is en bepaal een eigenvector voor deze eigenwaarde.

(iv) Bereken voor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de vector $A^{42} \cdot v$.

Opgave 3.
Een piramide heeft als basis het vierkant met hoekpunten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en als spits het punt } S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Welk van de hoekpunten heeft de kleinste afstand van het punt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$? Wat is deze afstand?

(ii) Bereken de orthogonale projecties van de vijf hoekpunten A, B, C, D, S op de lijn langs de vector $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii) Bereken de orthogonale projecties van de vijf hoekpunten van de piramide op het vlak opgespannen door de vectoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(iv) Welk punt ligt dichter bij het vlak uit (iii), het hoekpunt B of de spits S?

Opgave 4.
Via een heel slechte verbinding wordt een digitale boodschap gestuurd, die uit 0en en 1en bestaat. Omdat er zo veel ruis is, wordt de helft van de 0en als 1en ontvangen en 10% van de 1en als 0en (de 1en staan voor een signaal, de 0en voor *geen* signaal, daarom steken de meeste 1en nog boven de ruis uit).

(i) Beschrijf de transmissie over deze verbinding met een matrix voor de overgangen tussen 0en en 1en.

(ii) Een gemiddelde boodschap heeft even veel 0en als 1en. Geef voor een boodschap van 1000 0en en 1000 1en aan, hoeveel 0en en 1en ontvangen worden.

(iii) Zijn er boodschappen, waarvoor het aantal 0en en 1en tijdens de transmissie niet verandert (de boodschap zelf mag natuurlijk wel veranderen)? Zo ja, geef een voorbeeld voor het aantal 0en en 1en in zo'n boodschap.

(iv) Stel, een boodschap van 1000 0en en 1000 1en gaat niet slechts één keer, maar drie keer over de verbinding voordat de ontvanger hem leest (dus $A \to B \to A \to B$). Zal de zo ontvangen boodschap al vier keer zo veel 1en als 0en bevatten? Als de boodschap nog vaker tussen A en B hen en weer gaat, zou hij dan ooit meer dan tien keer zo veel 1en als 0en bevatten?

Succes ermee!