Les 2 Speciale functies

We hebben in de vorige les een aantal elementaire functies bekeken en hiervoor gezien hoe we deze functies kunnen afleiden. In wezen waren alle deze functies samengesteld uit machtsfuncties $f(x) := x^c$ met $c \in \mathbb{R}$. In deze les hebben we het over verschillende andere elementaire functies die een belangrijke rol in alle soorten van toepassingen spelen.

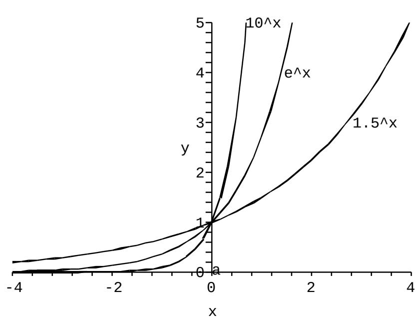
2.1 Exponentiële functie en natuurlijke logaritme

Als we de ontwikkeling van een populatie beschrijven, hebben we het vaak met de volgende situatie te maken: Er is een beginpopulatie van C konijnen en elk jaar verdubbelt het aantal konijnen. Dan zijn er na afloop van één jaar $2C$ konijnen, na twee jaar $4C$, na drie jaar $8C$ enzovoorts. Na afloop van x jaar zijn er dan $2^x C$ konijnen.

Het zou dus handig zijn, iets meer over functies als $f(x) := a^x$ voor $a \in \mathbb{R}$ te weten.

Om te beginnen, moeten we iets erover zeggen hoe we de functiewaarden van zo'n functie berekenen. Voor breuken $x = \frac{m}{n}$ kunnen we a^x wel berekenen, want in dit geval is $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Hier zien we dat $a > 0$ moet zijn, anders zouden we (voor oneven m) uit negative getallen de wortel moeten trekken.

Omdat we graag willen dat $f(x) := a^x$ een continue functie wordt, hebben we nu geen keuze meer bij de berekening van a^x voor een willkeurige $x \in \mathbb{R}$. Als we x namelijk door breuken $\frac{m}{n}$ steeds beter benaderen, moet $\sqrt[n]{a^m}$ een steeds betere benadering van de functiewaarde a^x zijn (dat is juist de definitie van continuiteit).



Figuur A.8: De functies $f(x) := a^x$ voor $a = 1.5, e, 10$

Zo als we dat uit de grafieken in Figuur A.8 zouden verwachten, laat zich aantonen dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ voor $a > 0$ in het punt $x = 0$ differentieerbaar is. Er laat zich ook algemeen bewijzen dat de afgeleide $f'(0)$

groter is naarmate a groter is. Maar als we de afgeleide van a^x in 0 kennen, kunnen we de afgeleide van a^x in elk punt berekenen, want

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \text{ en dus } f'(x) = a^x \cdot f'(0).$$

De exponentiële functie met basis e

Als we nu voor verschillende waarden van a de afgeleide van $f(x) := a^x$ in het punt $x = 0$ berekenen, kunnen we door een benaderingsproces een waarde voor a vinden, zo dat $f'(0) = 1$ is. Op die manier vinden we het *Euler-getal* $e \approx 2.71828$ met de eigenschap dat de functie $f(x) := e^x$ in 0 de afgeleide 1 heeft.

Zo als boven opgemerkt volgt uit het feit dat de afgeleide van $f(x) := e^x$ voor $x = 0$ gelijk aan 1 is, dat $f'(x) = e^x \cdot f'(0) = e^x \cdot 1 = f(x)$. Dit betekent dat $f(x) := e^x$ een functie is die aan de vergelijking $f(x) = f'(x)$ voldoet.

De functie e^x heet de *exponentiële functie* en wordt vaak ook met $f(x) := \exp(x)$ genoteerd. Samenvattend hebben we dus:

$$\exp(x) = e^x \text{ met } e \approx 2.71828 \Rightarrow \exp'(x) = \exp(x) \text{ en } \exp(0) = \exp'(0) = 1.$$

Er laat zich zelfs aantonen dat de exponentiële functie door de eigenschappen $f'(x) = f(x)$ en $f(0) = 1$ eenduidig bepaald is:

Neem aan dat $f(x)$ een functie is met $f'(x) = f(x)$ en $f(0) = 1$, dan bepalen we de afgeleide van de functie $g(x) := \frac{f(x)}{\exp(x)}$. Hiervoor geldt

$$g'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{\exp(x)^2} = \frac{f(x)\exp(x) - f(x)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$$

omdat $\exp'(x) = \exp(x)$ en $f'(x) = f(x)$. Maar hieruit volgt dat $g(x)$ een constante functie is, dus is $f(x) = c \cdot \exp(x)$ en uit $f(0) = \exp(0) = 1$ volgt $c = 1$, dus $f(x) = \exp(x)$.

De exponentiële functie speelt in veel toepassingen een rol, bijvoorbeeld (zo als eerder al gezegd) bij de ontwikkeling van populaties of in de beschrijving van radioactief verval. Maar ook bij het remmen van een auto of bij het verloop van de temperatuur tussen twee kamers met verschillende temperaturen is de functie $\exp(x)$ van toepassing.

We weten (uit ervaring) dat we met evenveel remkracht niet zo snel van 100 naar 80 km per uur kunnen afremmen als van 50 naar 30. De verandering van de snelheid bij het remmen is dus afhankelijk van de snelheid zelfs. Ook bij de temperatuur zien we een soortgelijk effect: als we een kamer van 0° naast een kamer van 50° hebben, zullen de temperaturen sneller veranderen dan bij kamers van 20° en 30°. Bij veel processen vinden we dus een afhankelijkheid tussen de snelheid van de verandering van de functie en de waarde van de functie, d.w.z. een afhankelijkheid van de vorm

$$f'(x) = C \cdot f(x),$$

waarbij C een constante is. Er laat zich aantonen dat alle functies die aan deze vergelijking voldoen van de vorm

$$f(x) := x_0 \cdot \exp(Cx)$$

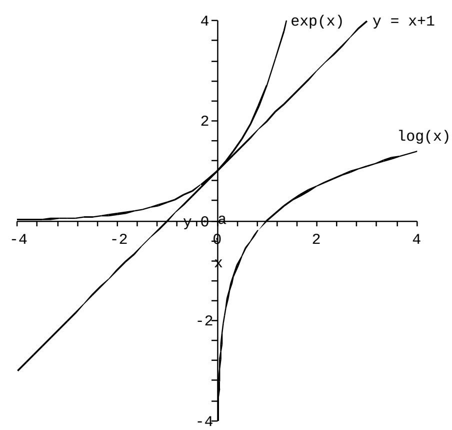
zijn, waarbij x_0 door de randvoorwaarde $x_0 = f(0)$ bepaald is (bijvoorbeeld de temperatuur of positie op het tijdstip $x = 0$).

Algemeen noemt men een vergelijking tussen een functie $f(x)$ en zijn afgeleiden $f'(x)$, $f''(x)$ enz. een *differentiaalvergelijking*.

De natuurlijke logaritme

Uit het feit dat $e > 1$ volgt dat $\exp(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $\exp(x) > 1$ voor alle $x > 0$, daarom is $\exp(y) - \exp(x) = (\exp(y - x) - 1)\exp(x) > 0$ voor $y > x$. Dit toont aan dat $\exp(x)$ een op $\mathbb{R}$ strikt stijgende functie is. Het bereik is $(0, \infty)$, dus kunnen we op het open interval $(0, \infty)$ de inverse functie van $\exp(x)$ definiëren.

De inverse functie van de exponentiële functie $\exp(x)$ noemen we de *natuurlijke logaritme* of kort *logaritme* en noteren deze met $\log(x)$.



Figuur A.9: Exponentiële functie en natuurlijke logaritme

Merk op: De omkeerfunctie van de algemene functie $f(x) := a^x$ heet de *logaritme met basis a* en wordt met ${}^a\log(x)$ genoteerd. Soms (bijvoorbeeld op de middelbare school of bij ingenieurs) wordt met $\log(x)$ de logaritme met basis 10 bedoeld, de natuurlijke logaritme wordt dan met $\ln(x)$ aangegeven. In de wiskunde wordt echter met $\log(x)$ steeds de logaritme met basis e bedoeld en dit houden we ook in deze cursus zo. Bij een logaritme met een andere basis zullen we de basis steeds expliciet aangegeven (bijvoorbeeld ${}^{10}\log(x)$ en ${}^2\log(x)$ voor de logaritmes met basis 10 en 2).

Ook zakrekenmachines kunnen tot verwarring leiden: Vaak is `ln` de toets voor de natuurlijke logaritme terwijl de toets `log` voor de logaritme met basis 10 staat.

We kunnen logaritmes tussen verschillende bases makkelijk omrekenen, want er geldt:

$$^{a}\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

We hebben namelijk $e^{\log(x)} = x = a^{^a\log(x)} = \left(e^{\log(a)}\right)^{^a\log(x)} = e^{\log(a)\cdot{}^a\log(x)}$ en dus $\log(x) = \log(a) \cdot {}^a\log(x)$.

Hiermee volgt ook voor twee willekeurige bases a en b van de logaritme dat

$$^{a}\log(x) = \frac{^{b}\log(x)}{^{b}\log(a)}$$

want $\frac{^{b}\log(x)}{^{b}\log(a)} = \frac{\frac{\log(x)}{\log(b)}}{\frac{\log(a)}{\log(b)}} = \frac{\log(x)}{\log(a)} =^{a} \log(x)$.

Uit onze formule voor de afgeleide van de inverse functie kunnen we de afgeleide van $\log(x)$ makkelijk berekenen, er geldt

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

We hebben hiermee een belangrijk gat gevuld: We hadden in de vorige les gezien dat we voor een geheel getal $n \in \mathbb{Z}$ de afgeleide van $f(x) := x^n$ vinden als $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. In het bijzonder vinden we elke van de functies x^n als afgeleide van een andere machtsfunctie, namelijk als afgeleide van $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$. De enige uitzondering hierbij is het geval $n = -1$, want de afgeleide van x^0 is natuurlijk 0. Maar nu hebben we een functie gevonden, die $x^{-1} = \frac{1}{x}$ als afgeleide heeft, namelijk de natuurlijke logaritme $\log(x)$.

Om de algemene exponentiële functie $f(x) := a^x$ af te leiden is het handig om de relatie $a = e^{\log(a)}$ en dus $a^x = e^{\log(a)\cdot x} = \exp(\log(a) \cdot x)$ te gebruiken. Met de kettingregel volgt dan namelijk dat

$$(a^x)' = \exp(\log(a)x) \cdot \log(a) = \log(a) \cdot a^x.$$

Tenslotte nog twee belangrijke relaties voor het optellen en vermenigvuldigen bij exp en log:

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{en} \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

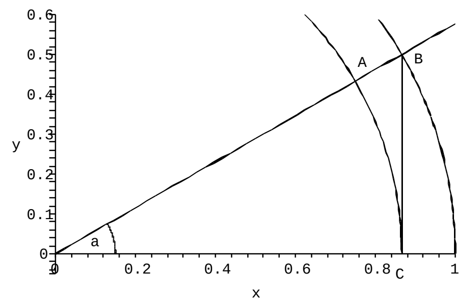
2.2 Trigonometrische functies

De trigonometrische (of goniometrische) functies zijn gebaseerd op de meetkunde van rechthoekige driehoeken.

Als in een rechthoekige driehoek de schuine zijde lengte 1 heeft, en a één van de niet-rechte hoeken is, dan noemen we de lengte van de zijde tegenover a de *sinus van* a, genoteerd met $\sin(a)$ en de lengte van de andere rechthoekzijde de *cosinus van* a, genoteerd met $\cos(a)$.

In het plaatje van Figuur A.10 is $0B$ de schuine zijde in de driehoek $0BC$ en we hebben $\sin(a) = |BC|$ en $\cos(a) = |0C|$. Een van de belangrijkste relaties voor sinus en cosinus volgt meteen uit de stelling van Pythagoras, namelijk

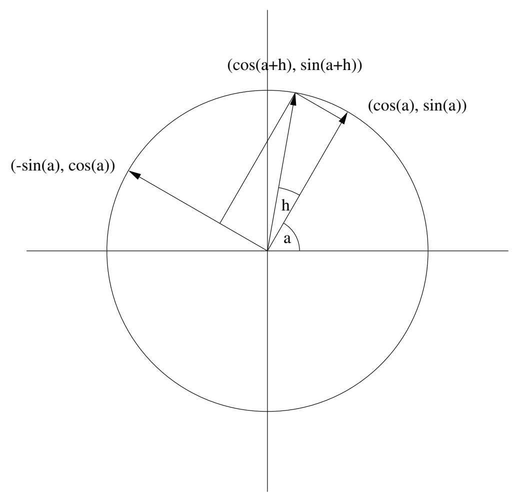
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$



Figuur A.10: $\sin(a) = |BC|$, $\cos(a) = |0C|$

De afgeleiden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$

Om de afgeleide $\sin'(x)$ van $\sin(x)$ te bepalen moeten we iets over het quotiënt $\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}$ zeggen. Maar hoe kunnen we de sinus van een som van twee hoeken bepalen? Hiervoor geeft Figuur A.11 een aanleiding.



Figuur A.11: De sinus van de som van twee hoeken

We schrijven de vector $w = \begin{pmatrix} \cos(a+h) \\ \sin(a+h) \end{pmatrix}$ als de som van zijn orthogonale projecties op de twee vectoren $v_1 = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin(a) \\ \cos(a) \end{pmatrix}$ die loodrecht op elkaar staan. Maar de lengte van de projectie van w in de richting van v_1 is $\cos(h)$ en de lengte van de projectie in de richting van v_2 is $\sin(h)$. Dus geldt:

$$\begin{pmatrix} \cos(a+h) \\ \sin(a+h) \end{pmatrix} = \cos(h)\, v_1 + \sin(h)\, v_2 = \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) \\ \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)) \end{pmatrix}.$$

Dit geeft de twee belangrijke opteltheorema's:

$$\cos(a+h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h),$$

$$\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h).$$

We hebben dus $\sin(a+h) - \sin(a) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a) = \sin(a)(\cos(h) - 1) + \cos(a)\sin(h)$ en hieruit volgt dat

$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}.$$

We weten dat $\lim_{h\to 0} \sin(h) = 0$ en $\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1$, maar dit is nog niet voldoende om de limiet van $\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}$ te berekenen.

Merk op: Vaak worden hoeken niet in graden maar in *radialen* aangegeven. Het idee hierbij is, een hoek door de lengte van de bijhorende cirkelboog in een cirkel van straal 1 te beschrijven. Een hoek van $360°$ heeft een volle cirkel als boog en die heeft lengte 2π. Omgekeerd hoort een boog van π bij een hoek van $180°$. Dus komen we van graden naar radialen door de hoek in graden met $\frac{\pi}{180}$ te vermenigvuldigen en van radialen naar graden door met $\frac{180}{\pi}$ te vermenigvuldigen. We zullen hoeken meestal in radialen aangeven.

Als we de hoek a en de straal r van een cirkelboog kennen, kunnen we de lengte van de cirkelboog aangeven, dit is namelijk $r \cdot a$, waarbij we veronderstellen dat de hoek a in radialen aangegeven is. In Figuur A.10 heeft dus de boog van B naar 1 lengte a en de boog van A naar C lengte $a\cos(a)$. Omdat de boog AC korter is dan de lijn BC geldt $a\cos(a) < \sin(a)$ en omdat de lijn BC korter is dan de boog $B1$ geldt $\sin(a) < a$. Hieruit volgt (voor hoeken a met $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$) dat

$$\cos(a) < \frac{\sin(a)}{a} < 1.$$

Omdat $\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1$, volgt hieruit rechtstreeks dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Verder is

$$\begin{aligned}\frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1)}{h\,(\cos(h) + 1)} = \frac{\cos^2(h) - 1}{h\,(\cos(h) + 1)} = \frac{-\sin^2(h)}{h\,(\cos(h) + 1)} \\ &= \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1}\end{aligned}$$

en omdat $\frac{-\sin(h)}{\cos(h)+1}$ voor $h \to 0$ naar $\frac{0}{2} = 0$ gaat, volgt hieruit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Als we alles bij elkaar nemen volgt dus

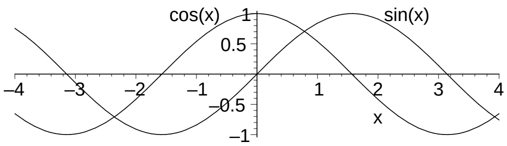
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos(a)\frac{\sin(h)}{h} \\ &= \sin(a) \cdot 0 + \cos(a) \cdot 1 = \cos(a).\end{aligned}$$

Kort en goed: de afgeleide van de sinus is de cosinus, ofwel

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

We kunnen de afgeleide van de cosinus nu op dezelfde manier bepalen als bij de sinus, maar met een klein trucje gaat het sneller. We weten dat $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ is, dus geldt $0 = (\sin^2(x) + \cos^2(x))' = 2\cos(x)\cos'(x) + 2\sin(x)\sin'(x) = 2\cos(x)(\cos'(x) + \sin(x))$. Hieruit volgt meteen:

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$



Figuur A.12: Sinus- en cosinus-functie

Net zo als we de exponentiële functie $\exp(x)$ door de differentiaalvergelijking $f'(x) = f(x)$ hebben gekarakteriseerd, kunnen we ook sinus en cosinus door een differentiaalvergelijking karakteriseren. Het is duidelijk dat voor de tweede afgeleiden geldt dat $\sin''(x) = -\sin(x)$ en $\cos''(x) = -\cos(x)$.

De bewering is nu, dat een functie $f(x)$ met $f''(x) + f(x) = 0$ een lineaire combinatie van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ is, preciezer gezegd:

$$f''(x) + f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) \text{ met } a = f'(0), b = f(0).$$

Neem eerst aan we hebben een functie $f(x)$ met $f''(x) + f(x) = 0$, $f(0) = 0$ en $f'(0) = 0$. Dan is $0 = f'(x)(f''(x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f'(x)^2 + f(x)^2)'$, dus is $f'(x)^2 + f(x)^2$ een constante functie. Maar omdat $f'(0) = f(0) = 0$, is $f'(x)^2 + f(x)^2 = 0$ voor alle x. Maar een som van kwadraten is alleen maar 0 als alle kwadraten 0 zijn, dus volgt hieruit dat $f(x) = 0$ voor alle x, dus is $f(x)$ de constante 0-functie.

Neem nu aan dat $f''(x) + f(x) = 0$, $f'(0) = a$ en $f(0) = b$. Dan geldt voor $g(x) := f(x) - a\sin(x) - b\cos(x)$ dat $g''(x) + g(x) = 0$, $g'(0) = f'(0) - a = 0$ en $g(0) = f(0) - b = 0$. Dus is $g(x) = 0$ en dus $f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$.

Differentiaalvergelijkingen van de vorm $f''(x) = C \cdot f(x)$ spelen bijvoorbeeld bij de beschrijving van trillingen een belangrijke rol.

Uit de functies $\sin(x)$ en $\cos(x)$ wordt een aantal verdere functies afgeleid, de belangrijkste hiervan is de *tangens* die gedefinieerd is door

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Het domein van de tangens zijn de punten $x \in \mathbb{R}$ met $\cos(x) \neq 0$, dus $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ met $n \in \mathbb{Z}$.

Voor de functie $\tan(x)$ geldt de relatie

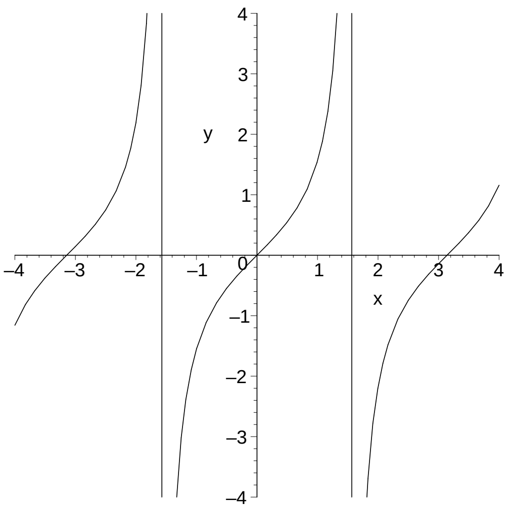
$$1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Toevallig geeft dit juist ook de afgeleide van de tangens, want

$$\tan'(x) = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

We hebben dus:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$



Figuur A.13: Tangens-functie

Inverse functies van de trigonometrische functies

De inverse functies van de trigonometrische functies heten *arcus*-functies en worden als $\arcsin(x) := \sin^{-1}(x)$, $\arccos(x) := \cos^{-1}(x)$ en $\arctan(x) := \tan^{-1}(x)$ genoteerd. De afgeleiden van deze functies kunnen we makkelijk met de formule

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

bepalen.

Het bereik van $\sin(x)$ is het interval $[-1, 1]$ dus heeft $\arcsin(x)$ dit interval als domein. Met behulp van het trucje $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ vinden we:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

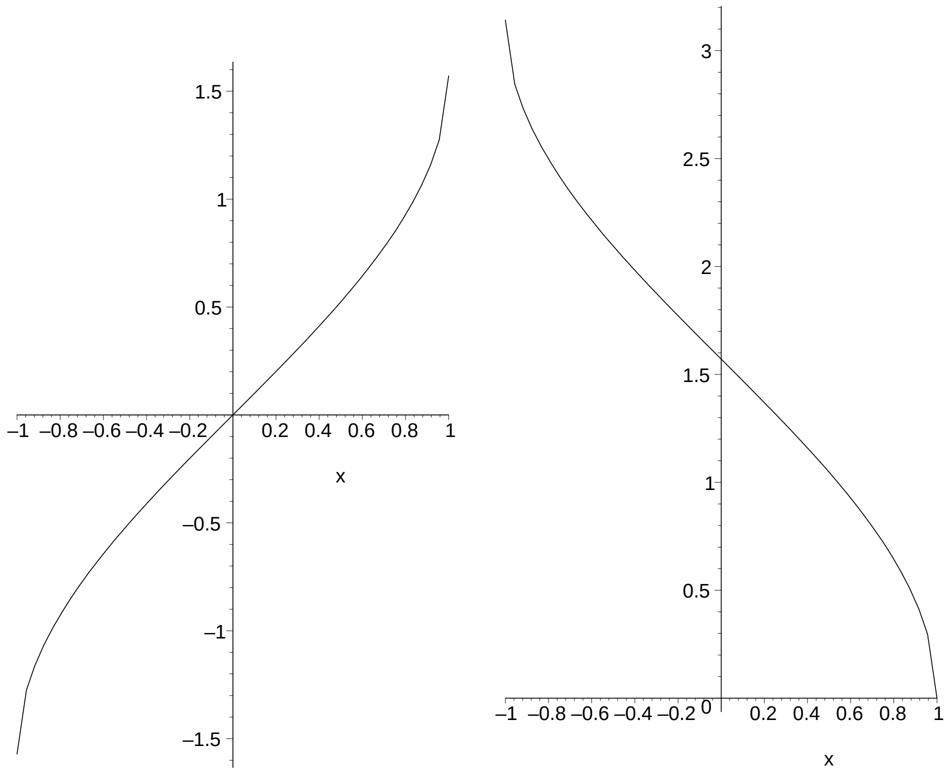
Het domein voor $\arccos(x)$ is ook $[-1, 1]$ en met behulp van $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ tonen we aan dat

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

We hebben dus:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De meest belangrijke toepassing van de arcussinus en de arcuscosinus ligt in de integratie van functies. We zullen zien dat de integratie de omkering van de differentiatie is, dus hebben we de functie $\arcsin(x)$ nodig om integralen over functies zo als $f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ te berekenen.

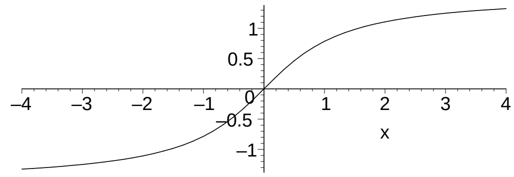


Figuur A.14: Arcussinus- en arcuscosinus-functie

Het bereik van $\tan(x)$ is $\mathbb{R}$, maar de functie is alleen maar injectief op een interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (of een verschuiving hiervan om $n\pi$). De arcustangens-functie is dus op $\mathbb{R}$ gedefinieerd en heeft waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$. Voor de afgeleide vinden we met de formule voor de afgeleide van de inverse functie en de relatie $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$:

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{(\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))})} = \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

De arcustangens-functie wordt (naast zogeheten *sigmoid-functies*) vaak gebruikt om experimentele waarden naar een genormeerd interval af te beelden.



Figuur A.15: Arcustangens-functie

Bijvoorbeeld wil men als waarden, die een zoekmachine voor de kwaliteit van een zoekresultaat aangeeft, meestal waarden tussen 0 en 1 (of tussen 0% en 100%). Maar de intern in een zoekmachine gebruikte methode levert vaak waarden die niet eens naar beneden of boven begrensd zijn. Dan is het handig om deze waarden af te beelden met de functie

$$f : \mathbb{R} \to [0,1], x \mapsto \frac{1}{\pi}(\arctan(x) + \frac{\pi}{2})$$

die strikt stijgend is en als bereik het interval $[0,1]$ heeft.

2.3 Hyperbolische functies

Een verdere klasse van belangrijke functies zijn de hyperbolische functies. Deze zijn afgeleid van de exponentiële functie, maar hebben eigenschappen die op eigenschappen van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ lijken. We definiëren de *sinushyperbolicus* en *cosinushyperbolicus* door

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)), \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)).$$

Met behulp van $\exp'(x) = \exp(x)$ gaat men eenvoudig na dat

$$\sinh'(x) = \cosh(x), \qquad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

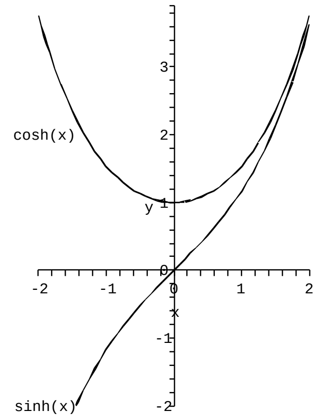
Verder vinden we dat

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

De naam van de hyperbolische functies heeft betrekking tot de *hyperbolische meetkunde*. Terwijl we in de Euclidische meetkunde afstanden in het vlak door $\sqrt{x^2+y^2}$ berekenen, wordt dit in de hyperbolische meetkunde met $\sqrt{x^2-y^2}$ gedaan. In de Euclidische meetkunde liggen de punten met afstand r van het nulpunt op een cirkel die we met $r(\cos(t), \sin(t))$, $0 \le t \le 2\pi$ kunnen aangeven. Een analoge constructie levert in de hyperbolische meetkunde de punten $r(\cosh(t), \sinh(t))$, die op een hyperbool liggen (dus de naam). Een van de belangrijkste toepassingen van de hyperbolische meetkunde is de ruimtetijd uit de speciale relativiteitstheorie.

Analoog met de tangens-functie wordt ook een *tangenshyperbolicus* gedefinieerd:

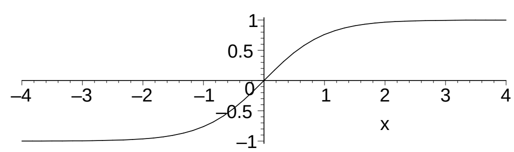
$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$



Figuur A.16: Sinushyperbolicus en cosinushyperbolicus

We hebben $1 - \tanh^2(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ en voor de afgeleide geldt $\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$, dus

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$



Figuur A.17: Tangenshyperbolicus

Merk op dat ook de functie $\tanh(x)$ net als $\arctan(x)$ voor het normaliseren van experimentele waarden gebruikt kan worden.

Inverse functies van de hyperbolische functies

Ook de hyperbolische functies hebben inverse functies, deze heten de *area-functies* en worden met $\operatorname{arsinh}(x) := \sinh^{-1}(x)$, $\operatorname{arcosh}(x) := \cosh^{-1}(x)$ en $\operatorname{artanh}(x) := \tanh^{-1}(x)$ genoteerd.

We kunnen deze inverse functies expliciet bepalen, want uit $y = \sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ volgt door vermenigvuldiging met $\exp(x)$ dat

$$\exp(x)^2 - 2y \exp(x) - 1 = 0.$$

Dit geeft de oplossingen $\exp(x) = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$, maar wegens $\exp(x) > 0$ is alleen maar het plusteken mogelijk. Het domein van $\operatorname{arsinh}(x)$ is $\mathbb{R}$ omdat dit het bereik van $\sinh(x)$ is. Dus geldt voor $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Voor de afgeleide vinden we met behulp van $\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$:

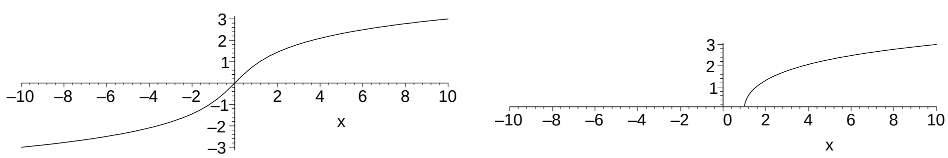
$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Het trucje van $\sinh(x)$ toegepast op $\cosh(x)$ geeft $\exp(x)^2 - 2y\exp(x) + 1 = 0$, dus $\exp(x) = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. In dit geval moeten we erop letten, dat $\cosh(x)$ niet injectief is, we kunnen dus of een inverse functie voor $x > 0$ of voor $x < 0$ aangeven. Voor de inverse functie van $\cosh(x)$ met $x > 0$ geldt het plusteken, dus is

$$\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

De afgeleide van $\operatorname{arcosh}(x)$ vinden we net als voor $\operatorname{arsinh}(x)$, maar deze keer gebruiken we de relatie $\sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$:

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh}(x)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$



Figuur A.18: Areasinushyperbolics en areacosinushyperbolics

Tenslotte kijken we naar de inverse functie van de *tangenshyperbolicus*, de *areatangenshyperbolicus* $\operatorname{artanh}(x)$.

Uit $y = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$ volgt $1 + y = \frac{2\exp(x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$ en $1 - y = \frac{2\exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$, dus geldt $1 + y = \exp(2x)(1 - y) = \exp(x)^2(1 - y)$ en dus $\exp(x) = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$. Hieruit volgt

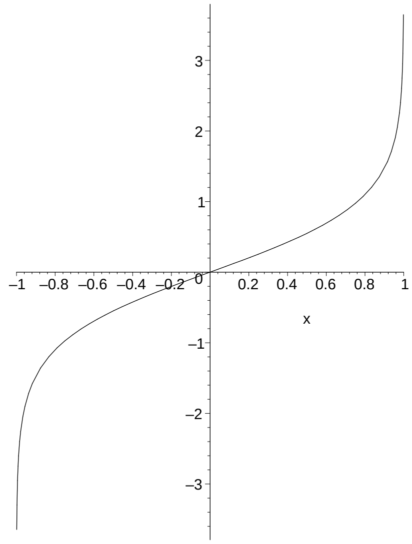
$$\operatorname{artanh}(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

De afgeleide van $\operatorname{artanh}(x)$ vinden we met behulp van $\cosh^2(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(x)}$ door $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh}(x))} = \cosh^2(\operatorname{artanh}(x)) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$, dus is

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Ook in dit geval is het belangrijkste argument om de functie $\operatorname{artanh}(x)$ te behandelen, dat we hiermee de integraal over functies zo als $\frac{1}{1-x^2}$ kunnen oplossen.

Deze les wordt samengevat door een tabel die de behandelde functies en hun afgeleiden aangeeft.



Figuur A.19: Areatangenshyperbolicus

$f(x)$	$f'(x)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\mathrm{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

Belangrijke begrippen in deze les

- exponentiële functie, logaritme
- trigonometrische functies
- inverse trigonometrische functies
- hyperbolische functies
- inverse hyperbolische functies

Opgaven

6. Laten $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functies zijn met $f(x) := \log(x^2+1)$ en $g(x) := \exp(3x)$. Bereken de samengestelde functies $f \circ g$ en $g \circ f$ en de afgeleiden $f'(x)$, $g'(x)$, $(f \circ g)'(x)$ en $(g \circ f)'(x)$.

7. Toon aan dat voor alle $x \in (0, \infty)$ geldt dat $\log(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$.

8. Laat zien dat $\sin x + \tan x > 2x$ voor alle $x \in (0, \pi/2)$. (Hint: Differentiëren.)

9. Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) := x + \sin x + \arctan(3x)$. Toon aan dat f een inverse functie met domein $\mathbb{R}$ bezit. Daarvoor moet je bewijzen dat f strikt stijgend of dalend is en het geheel van $\mathbb{R}$ als bereik heeft.

10. Bereken voor $f(x) := \dfrac{1}{1+x}$ de functies $g(x) := f(f'(x))$ en $h(x) := f'(f(x))$.

11. Bepaal de afgeleiden van de volgende functies:

$$\text{(i) } f(x) := \sin(x+x^2), \quad \text{(ii) } f(x) := \sin(x) + \sin(x^2), \quad \text{(iii) } f(x) := \sin(\cos(x)),$$

$$\text{(iv) } f(x) := \sin(\sin(x)), \quad \text{(v) } f(x) := \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right), \quad \text{(vi) } f(x) := \frac{\sin(\cos(x))}{x},$$

$$\text{(vii) } f(x) := \sin(x + \sin(x)), \qquad \text{(viii) } f(x) := \sin(\cos(\sin(x))).$$

12. Bepaal de afgeleiden van:

$$\text{(i) } f_1(x) = x^x, \qquad \text{(ii) } f_2(x) = x^{x\sin(x)}, \qquad \text{(iii) } f_3(x) = \log(\cosh(x) + \sinh(x)),$$

$$\text{(iv) } f_4(x) = \sin\big(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\big), \quad \text{(v) } f_5(x) = \exp(-x^2), \quad \text{(vi) } f_6(x) = x\exp(\arctan(x)),$$

$$\text{(vii) } f_7(x) = 5^{\cos(x)}, \quad \text{(viii) } f_8(x) = \log\big(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\big), \quad \text{(ix) } f_9(x) = \arcsin\big(\frac{1-x}{1+x}\big).$$

13. Als je gewone afgeleiden vervelend vindt, zou je het misschien interessanter vinden om van de volgende functies de afgeleide $f'(x)$ te berekenen:

$$\text{(i) } f(x) := \sin((x+1)^2(x+2)), \qquad \text{(ii) } f(x) := \sin^3(x^2 + \sin(x)),$$

$$\text{(iii) } f(x) := \sin^2((x+\sin(x))^2), \qquad \text{(iv) } f(x) := \sin\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right),$$

$$\text{(v) } f(x) := \sin(x\sin(x)) + \sin(\sin(x^2)), \qquad \text{(vi) } f(x) := \sin^2(x)\sin(x^2)\sin^2(x^2),$$

$$\text{(vii) } f(x) := (x + \sin^5(x))^6, \qquad \text{(viii) } f(x) := \sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x))))),$$

$$\text{(ix) } f(x) := \sin((\sin^7(x^7)+1)^7), \qquad \text{(x) } f(x) := (((x^2+x)^3+x)^4+x)^5,$$

$$\text{(xi) } f(x) := \sin(x^2 + \sin(x^2 + \sin(x^2))), \qquad \text{(xii) } f(x) := \sin(6\cos(6\sin(6\cos(6x)))),$$

$$\text{(xiii) } f(x) := \frac{\sin(x^2)\sin^2(x)}{1+\sin(x)}, \qquad \text{(xiv) } f(x) := \sin\left(\frac{x^3}{\sin(\frac{x^3}{\sin(x)})}\right).$$