Deeltoets 2 (BKI 116)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zoals $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, maar niet het gebruik van de statistische functies.

Opgave 1. (8 punten)
In sommige studies is er na het eerste semester een advies aan de studenten die weliswaar niet bindend is.

Neem aan dat in een (moeilijk) studievak gemiddeld 45% van de studenten vroegtijdig afhaken. Het blijkt dat van de afhakende studenten 90% een negatief studieadvies kregen, terwijl slechts 2% van de studenten die afstuderen een negatief advies hadden.

(i) Wat is de kans dat een student met negatief studieadvies alsnog in dit vak zal afstuderen?

(ii) Een zeer voorzichtige student vindt, dat hij beter een ander studievak kan kiezen, als na een positief studieadvies zijn kans op afstuderen kleiner dan 95% is. Zou deze student het vak volhouden?

Opgave 2. (10 punten)
Je dobbelt met twee rare dobbelstenen: de eerste dobbelsteen is een tetraëder (dus regelmatig met 4 zijvlakken) met de cijfers 1 t/m 4, de tweede dobbelsteen is een octaëder (dus regelmatig met 8 zijvlakken) met de cijfers 1 t/m 8.

(i) De stochast X geeft het maximum van de twee dobbelstenen aan. Bepaal de kansverdeling en de verwachtingswaarde van X.

(ii) Stel iemand pakt willekeurig (dus met kans 0.5) één van de twee dobbelstenen, dobbelt (zonder dat je het kunt zien) en roept zijn resultaat tegen jou. Als het resultaat 5 of hoger is, kan je natuurlijk concluderen dat hij de octaëder heeft gepakt.

  (a) Wat is de kans dat hij de tetraëder heeft gepakt als het resultaat tussen 1 en 4 ligt?

  (b) Als hij nu drie keer met de willekeurig gepakte dobbelsteen dobbelt, en alle drie resultaten tussen 1 en 4 liggen, wat is dan de kans dat hij de tetraëder heeft gepakt?

Opgave 3. (4 punten)
Zij X een continue stochast die een uniforme verdeling op het interval $[0, \theta]$ heeft, waarvoor de bovengrens een onbekende parameter is.

Stel je hebt waarnemingen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ voor de stochast X. Bepaal de maximum-likelihood schatting voor de bovengrens θ van het interval.

z.o.z.

Opgave 4. (12 punten)
Uit een vaas met een rode, een witte en drie zwarte knikkers trekken we zonder terugleggen vijf keer een knikker. De stochast X beschrijft het *rangnummer* van de trekking van de witte knikker (dus $X = 2$ betekent dat we de witte knikker bij de tweede trekking pakken) en de stochast Y geeft het rangnummer van de eerste trekking van een zwarte knikker aan.

(i) Zijn de stochasten X en Y onafhankelijk? (Licht je antwoord toe.)

(ii) Bereken de verwachtingswaarden $E(X)$ en $E(Y)$ van de stochasten X en Y.

(iii) Bereken de varianties $Var(X)$ en $Var(Y)$ van de stochasten X en Y.

(iv) De stochast Z krijgt de waarde 0 als X een kleinere waarde heeft dan Y, en Z krijgt de waarde 1 als X een grotere waarde heeft dan Y. Bepaal de kansverdeling van Z.

Opgave 5. (6 punten)
Je wilt een experiment met een stochast X simuleren die een driehoeksverdeling heeft en beschreven wordt door de dichtheidsfunctie

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{als } x \in [-1, 0]; \\ 1 - x & \text{als } x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{als } x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Je hebt een randomgenerator ter beschikking die een rij uniform verdeelde toevalsgetallen $U_1, U_2, U_3, \ldots$ op het interval $[0, 1]$ produceert.

(i) Maak een schets van de dichtheidsfunctie en van de verdelingsfunctie van de stochast X.

(ii) Beschrijf een manier om met behulp van de randomgetallen $U_1, U_2, U_3, \ldots$ de stochast X te simuleren.

Gegevens voor verschillende belangrijke verdelingen:

verdeling	kans	$E(X)$	$Var(X)$
hypergeometrisch	$h(n, m, s; k) = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{n-s}{m-k}}{\binom{n}{m}}$	$m \cdot \frac{s}{n}$	$m \cdot \frac{s}{n}(1 - \frac{s}{n})\frac{n-m}{n-1}$
binomiaal	$b(m, p; k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$	$m \cdot p$	$m \cdot p(1-p)$
Poisson	$po_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
exponentieel	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normaal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

Succes ermee!