Deeltoets 1 (BKI 116)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. De opgaven tellen even zwaar. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zo als $\sqrt{2}$ *of* 0.3^{42}*) toegestaan.*

Opgave 1.
We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat een parameter $a \in \mathbb{R}$ bevat:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ y + az &= 1 \\ -x + y + az &= a. \end{aligned}$$

(i) Bepaal voor de parameterwaarde $a = 2$ de oplossingen van het stelsel.

(ii) Bepaal de waarden van de parameter a waarvoor het stelsel niet oplosbaar is. Is er ook een waarde van a zo dat het stelsel meerdere oplossingen heeft? Zo ja, bepaal zo'n waarde, zo niet, geef een reden.

(iii) Voor welke waarde van de parameter a heeft het stelsel een oplossing met $z = 1$? Is er ook een waarde van a, zo dat het stelsel een oplossing met $z = -\frac{1}{2}$ heeft?

Opgave 2.
Zij A de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

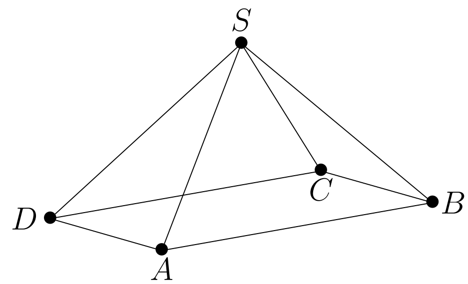
(i) Is er een vector $v \neq 0$ die onder de lineaire afbeelding met matrix A (met betrekking tot de standaardbasis) op zich zelf afgebeeld wordt? Zo ja, geef zo'n vector aan, zo nee, geef een reden.

(ii) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

(iii) Wat zijn de eigenwaarden van de matrix $-A = \begin{pmatrix} -0.3 & -0.4 \\ -0.7 & -0.6 \end{pmatrix}$?

Opgave 3.
Een piramide heeft als basis de rechthoek met hoekpunten

$$A = \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} \text{ en als spits het punt } S = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}.$$



(i) Bepaal de hoek tussen de ribben BA en BS en de hoek tussen de ribben SA en SC. (Het is ook voldoende als je de *cosinus* van de hoeken aangeeft.)

(ii) Bereken de orthogonale projecties van de hoekpunten B en S op het vlak opgespannen door de vectoren $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

(iii) Welk punt ligt dichter bij het vlak uit (ii), het hoekpunt B of de spits S?

Opgave 4.
Op een eiland in de Zuidzee leeft een populatie van vossen en konijnen en natuurlijk eten vossen heel graag konijnen. Zonder konijnen zou het aantal vossen per jaar om 25% afnemen. Maar voor elke 10 konijnen die er wel zijn, komt er per jaar weer één vos erbij. Omgekeerd zou het aantal konijnen om 25% per jaar toenemen als er geen vossen waren. Maar door de vossen wordt het aantal konijnen gereduceerd, elke vos eet namelijk (gemiddeld) x konijnen per jaar.

(i) Beschrijf de ontwikkeling van deze populatie van vossen en konijnen door een overgangsmatrix. Hoe ziet een beginpopulatie van 100 vossen en 1000 konijnen er na afloop van een jaar uit?

(ii) Hoe groot moet het aantal x van gegeten konijnen per vos zijn, zo dat er een evenwichtstoestand voor de ontwikkeling van de populatie bestaat? Bereken voor deze waarde van x het aantal konijnen in de evenwichtstoestand als er 100 vossen zijn.

(iii) Stel nu dat elke vos per jaar precies 1 konijn te pakken krijgt. Dan is op lange termijn een toename van 25% bij de konijnen te weinig om de gegeten konijnen te compenseren. Hoe groot moet de toename van het aantal konijnen per jaar (zonder vossen) zijn, om in dit geval van begerige vossen een evenwichtstoestand te hebben?

De *abc*-formule luidt: $ax^2 + bx + c$ heeft de nulpunten $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Succes ermee!