Deel A

Calculus

Aanbevolen achtergrondliteratuur met veel opgaven (en oplossingen):

- Frank Ayres: (Schaum's Outline of Theory and Problems of) Calculus. McGraw-Hill Companies, 1999, 578 p., ISBN: 0070419736.
- Michael Spivak: Calculus. Addison Wesley World Student Series, 1967, 588 p., ISBN: 0805390235.

Les 1 Differentiatie van functies

Waarschijnlijk heeft iedereen wel een idee ervan wat een functie is, maar voor de duidelijkheid herhalen we voor de meest belangrijke begrippen de definities. We zullen ons beperken tot reële functies, dus functies die op (een deel van) de reële getallen gedefinieerd zijn.

1.1 Functies

Een *reële functie* is een voorschrift dat aan ieder element $x \in D$ van een deelverzameling $D \subseteq \mathbb{R}$ een *functiewaarde* $f(x) \in \mathbb{R}$ toewijst. We noemen D het *domein* van de functie f en de verzameling $\{f(x) \mid x \in D\}$ van alle functiewaarden het *bereik* van de functie f. Merk op dat we hier nog niets over de structuur van het domein D hebben geëist, dit kan inderdaad een willekeurige deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn. Belangrijke voorbeelden zijn:

(i) alle reële getallen, dus $D = \mathbb{R}$,

(ii) alle reële getallen behalve één, bijvoorbeeld $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(iii) intervallen, hierbij onderscheiden we:

  (a) afgesloten intervallen zoals $D = [0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$,

  (b) open intervallen zoals $D = (0, 1) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$,

  (c) halfopen intervallen zoals $D = (0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$,

(iv) de vereniging van (afgesloten, open of halfopen) intervallen.

Een speciaal type van halfopen intervallen zijn intervallen die in een richting onbegrensd zijn. Een voorbeeld hiervoor zijn de niet-negatieve reële getallen $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Deze worden vaak met $D = [0, \infty)$ genoteerd.

> Er zijn echter ook rare domeinen mogelijk, bijvoorbeeld $D = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dit is (net als de rationale getallen $\mathbb{Q}$) een deelverzameling van $\mathbb{R}$ waar tussen elk paar van punten uit D overaftelbaar veel punten uit $\mathbb{R}$ liggen die niet in D bevat zijn. Aan de andere kant liggen de punten van $\mathbb{Q}$ willekeurig dicht bij elkaar, dus geldt dit ook voor D. Dit soort rare domeinen komen we in de praktijk zelden tegen, maar ze zijn in de wiskunde belangrijk om de fundamentele begrippen zuiver te definiëren.

Een functie f wordt beschreven door zijn domein D en een afbeeldingsvoorschrift, dat zegt hoe je aan een $x \in D$ zijn functiewaarde $f(x)$ toewijst. Dit wordt vaak geschreven als $f : D \to \mathbb{R}, x \mapsto y$ als y de waarde van f in het punt x is, dus als $y = f(x)$ geldt.

Hier zijn een paar voorbeelden van functies, die laten zien dat het soms om redelijk gekke dingen gaat:

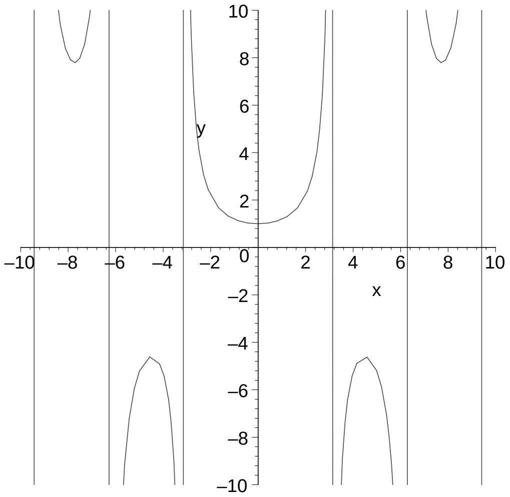
(i) $D = \mathbb{R}$, $f : x \mapsto x^2$,

(ii) $D = \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$ (dit heet soms ook de *signum*-functie),

(iii) $D = \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x & \text{als } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{als } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

(iv) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, $f : x \mapsto \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ (merk op dat voor $x \in D$ de noemer nooit nul wordt),

(v) $D = \mathbb{R} \setminus \{n \cdot \pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $f : x \mapsto \frac{x}{\sin(x)}$,



Figuur A.1: $f(x) := \frac{x}{\sin(x)}$

(vi) $D = \mathbb{R}$, $f(x) := n$ als n het aantal van 7en in de decimale ontwikkeling van x is en $f(x) := \pi$ als er oneindig veel 7en in de decimale ontwikkeling zitten.

Om ingewikkeldere functies te bouwen, worden vaak eenvoudigere functies gecombineerd. Hierbij wordt behalve van het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van functies ook de *samenstelling* van functies gebruikt. Voor een functie f met domein D_f en bereik B_f en een functie g met domein D_g waarvoor $D_g \supseteq B_f$ geldt, definiëren we de *samengestelde functie* $g \circ f$ met domein D_f door

$$g \circ f : D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto g(f(x)).$$

Bijvoorbeeld kunnen we de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ beschrijven als $f = h_1 \circ g_1$ met $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ en $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 + x^2$, maar ook door $f = h_2 \circ g_2$ met $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$ en $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ en zelfs door $f = h_1 \circ g_3 \circ g_2$ met $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1 + x$.

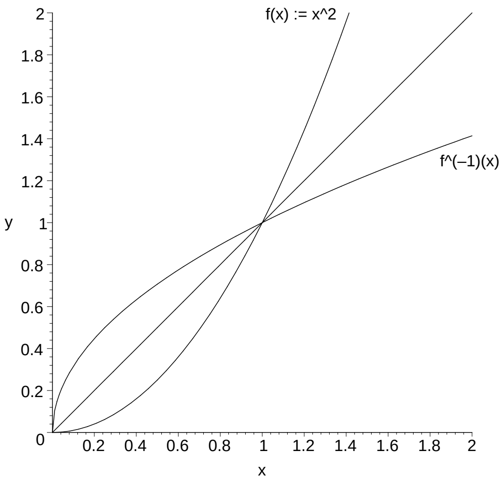
Merk op dat $h_2 = h_1 \circ g_3$ en $g_1 = g_3 \circ g_2$, dus is $(h_1 \circ g_3) \circ g_2 = h_1 \circ (g_3 \circ g_2)$. Omdat ook in het algemeen geldt dat de samenstelling van functies associatief is, d.w.z. dat $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, hoeven we in de samenstelling van drie of meer functies niet op haakjes te letten.

Om een vergelijking $f(x) = y$ naar x op te lossen, moeten we bij een functie f een punt x vinden die een gegeven waarde y oplevert. Hiervoor hebben we een soort van omkering van f nodig. Zo'n omkering kunnen we voor willekeurige y vinden, als er voor de functie f een functie g bestaat, zo dat $g \circ f(x) = x$ voor alle x in het domein van f. Dan geldt namelijk $x = g(f(x)) = g(y)$. Als zo'n functie g bestaat noemen we g de *inverse functie* van f en noteren deze als f^{-1}. Merk op dat het domein van f^{-1} het bereik van f is.

Merk op: De inverse functie f^{-1} kan alleen maar bestaan als f aan verschillende punten $x_1 \neq x_2$ ook verschillende functiewaarden $f(x_1) \neq f(x_2)$ toewijst. Voor $f(x_1) = f(x_2)$ is namelijk $x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$, dus zou voor $f(x_1) = f(x_2)$ met $x_1 \neq x_2$ de inverse functie twee verschillende waarden aan $f(x_1)$ moeten toewijzen, en dat mag niet omdat een functie een *eenduidige* waarde aan een punt toewijst.

Een functie met $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ heet een *injectieve functie*. We hebben dus gezien dat alleen maar injectieve functies een inverse functie hebben.

We kunnen de grafiek van de inverse functie gemakkelijk uit de grafiek van f afleiden: De grafiek van f bestaat uit de punten $(x, f(x))$ in het $x-y$-vlak, en omdat $f^{-1}(f(x)) = x$, bestaat de grafiek van f^{-1} uit de punten $(f(x), x)$. Dit is dus de gespiegelde van de grafiek van f in de diagonaal $x = y$. We zien nu ook meteen in dat f injectief moet zijn, want anders is er een horizontale lijn $x = a$ die twee (of meer) snijpunten met de grafiek van f heeft, en dan heeft de verticale lijn $y = a$ twee snijpunten met de grafiek van f^{-1} en dit kan niet voor een functie.

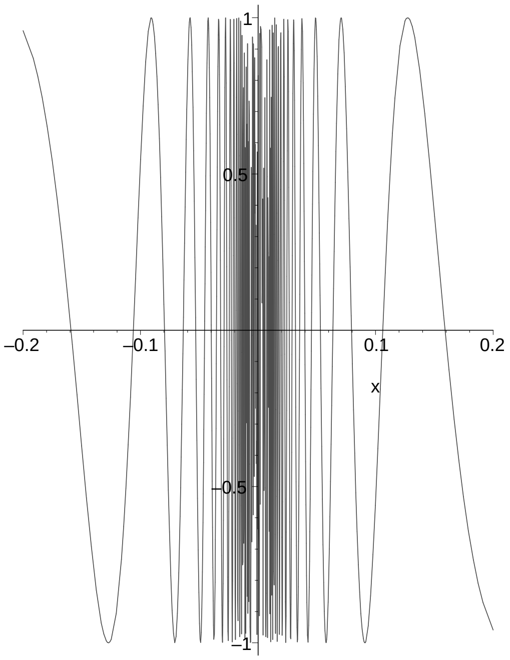


Figuur A.2: $f(x) := x^2$ heeft voor $x \geq 0$ de inverse functie $f^{-1}(x) := \sqrt{x}$

1.2 Continue functies

Een belangrijke klasse van functies zijn functies die we intuïtief *glad* zouden noemen, omdat we hun grafiek kunnen tekenen zonder de pen af te zetten. Dit wil zeggen, dat er geen *sprongen* in de grafiek zijn. Omdat wiskundigen soms heel rare functies verzinnen waarvoor we niet eens weten hoe we de grafiek zouden kunnen tekenen, hebben we een iets algemenere definitie van gladheid nodig.

Bijvoorbeeld schommelt de functie $f(x) := \sin(\frac{1}{x})$ in de buurt van $x = 0$ sneller en sneller tussen -1 en 1 en we kunnen niet zeggen wat voor een waarde we aan 0 moeten toewijzen.



Figuur A.3: $f(x) := \sin(\frac{1}{x})$ in de buurt van $x = 0$

We zeggen dat een functie $f : D \to \mathbb{R}$ *continu* in het punt $a \in D$ is, als de functiewaarden in een klein stukje om a heen allemaal dicht bij $f(a)$ liggen. Dit wordt door de beroemd-beruchte $\varepsilon - \delta$-definitie uitgedrukt:

A.1 Definitie Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ heet continu in het punt $a \in D$ als er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat uit $|x-a| < \delta$ volgt, dat $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ is.

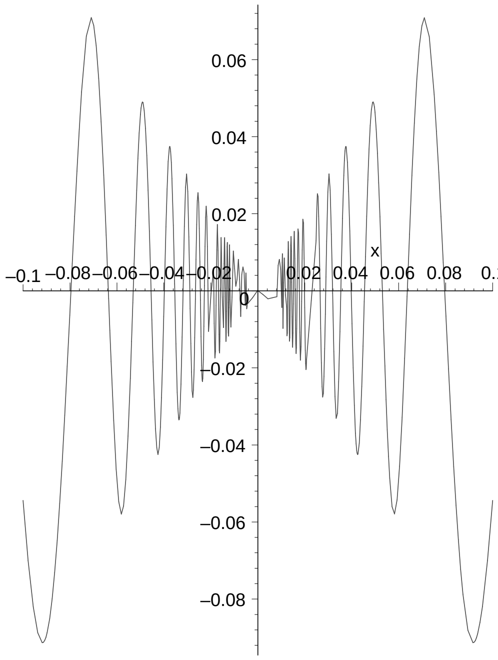
Deze definitie betekent, dat er voor een in a continue functie f voor een willekeurig klein interval $(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$ rond de functiewaarde $f(a)$ een interval $I = (a-\delta, a+\delta)$ om a heen bestaat, zo dat alle functiewaarden $f(x)$ voor $x \in I$ in het gekozen ε-interval rond $f(a)$ liggen.

In het voorbeeld van de functie $f(x) := \sin(\frac{1}{x})$ neemt de functie tussen $-\frac{1}{n}$ en $\frac{1}{n}$ elke waarde tussen -1 en 1 aan. Voor elke mogelijke waarde die we voor $f(0)$ zouden kiezen, vinden we dus al voor $\varepsilon = \frac{1}{2}$ geen $\delta > 0$ zo dat alle functiewaarden in het interval $(f(0)-\frac{1}{2}, f(0)+\frac{1}{2})$ liggen, want δ zou kleiner dan $\frac{1}{n}$ voor elke n moeten zijn. Dit betekent dat $sin(\frac{1}{x})$ niet tot een in 0 continue functie voortgezet kan worden.

Aan de andere kant is de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) & \text{als } x \neq 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \end{cases} .$$

wel continu, want $|\sin(x)| \leq 1$, en dus is $|f(x) - f(0)| = |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x|$, dus kunnen we altijd $\delta = \varepsilon$ kiezen.



Figuur A.4: $f(x) := x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

Dat de abstrakte definitie van continuiteit met onze intuïtie van gladheid overeenkomt, zien we aan het feit dat een functie in een punt, waar een sprong is, inderdaad niet continu is.

Voorbeeld: We kijken naar de *signum-functie*

$$\text{sign} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } x = 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases} .$$

Als we $\varepsilon = \frac{1}{2}$ kiezen, zien we dat $\text{sign}(x)$ niet continu in 0 is, want voor elke $\delta > 0$ is $\text{sign}(\frac{\delta}{2}) = 1$ en $\text{sign}(-\frac{\delta}{2}) = -1$, dus liggen de functiewaarden niet in het ε-interval om $f(0) = 0$.

We hebben nu gezien wat het betekent dat een functie continu in een punt is. We noemen een functie een *continue functie* als hij continu in ieder punt van zijn domein is.

A.2 Definitie Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ heet *continue op* D als f in ieder punt $a \in D$ continu is.

In toepassingen hebben we het meestal met continue functies te maken, maar er zijn ook situaties waar we functies met sprongen nodig hebben. Een voorbeeld hiervoor is het volgende experiment: we willen de intensiteit van het licht op een lijn beschrijven, waar in $x = 1$ een gloeilamp staat en in $x = 0$ een niet-transparante muur. De intensiteit van het licht in een afstand r van de lamp is $1/r^2$. Dus wordt de intensiteit beschreven door de functie $I : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \le 0 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{als } x > 0 \end{cases}$. Voor de beschrijving van dit soort functies is de *Heaviside-functie* H handig: $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{als } x \le 0 \\ 1 & \text{als } x > 0 \end{cases}$. We kunnen de functie I dan beschrijven als $I(x) = \frac{H(x)}{(x-1)^2}$ voor $x \neq 1$.

1.3 De afgeleide van een functie

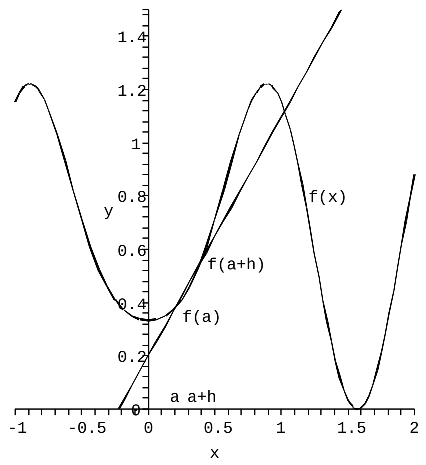
Het meest belangrijke bij een functie zijn natuurlijk de waarden, maar soms zijn we ook nog in andere dingen geïnteresseerd, bijvoorbeeld of een functie rond een gegeven punt afneemt of toeneemt. Bijvoorbeeld willen we weten of de temperatuur stijgend of dalend is en vragen we ons af of het heelal eeuwig expandeert of uiteindelijk weer in elkaar stort. (Eigenlijk willen we zelfs weten of de snelheid van de expansie afneemt of toeneemt.) Als we naar de grafiek van een functie kijken, kunnen we natuurlijk in de meeste gevallen meteen zien, wat er met stijgen en dalen aan de hand is. Maar soms is het voorschrift van een functie te ingewikkeld om er een grafiek van te maken, en soms zijn zelfs de grafieken zo complex, dat we niet kunnen zeggen of een functie stijgt of daalt. Daarom hebben we ook hier (net als bij de continuiteit van functies) een precieze definitie nodig.

Het idee is, dat we een functie in een punt a door een lijn benaderen, die de grafiek van de functie in het punt a raakt. Als deze raaklijn een positieve richtingscoëfficiënt heeft, noemen we de functie stijgend, als hij negatief is noemen we de functie dalend.

Maar hoe vinden we de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt? Hiervoor kijken we naar de functiewaarden van f in de 'buurt' van a, dus we kijken naar $f(a+h)$ voor kleine waarden van h. Als we nu een koorde door de punten $(a, f(a))$ en $(a+h, f(a+h))$ trekken, heeft deze lijn de richtingscoëfficiënt $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Als we h kleiner laten worden, lijkt de koorde door $(a, f(a))$ en $(a + h, f(a + h))$ steeds meer op een raaklijn in het punt a, dus vinden we de richtingscoëfficiënt als de 'limiet' van $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ als h naar 0 gaat.

We moeten nu eerst definiëren, wat het betekent dat een functie een *limiet voor* x *gaat naar* a heeft. Dit lijkt erg op de definitie van continue functies.

A.3 Definitie Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ heeft voor $x \to a$ de limiet b, als er voor alle $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zo dat uit $|x - a| < \delta$ volgt, dat $|f(x) - b| < \varepsilon$ is. We noteren dit als $\lim_{x\to a} f(x) = b$.



Figuur A.5: Benadering van de raaklijn in een punt door een koorde

Merk op dat we niet eisen dat a in het domein van f ligt. Als de limiet $\lim_{x \to a} f(x)$ bestaat en de waarde b heeft, betekent dit, dat we door $f(a) := b$ een functie definiëren die continu in a is.

We kunnen het nu over limieten van functies hebben, en we gebruiken deze nieuwe definitie meteen voor de definitie van de afgeleide.

A.4 Definitie Zij $f : D \to \mathbb{R}$ een continue functie.

(i) De functie f heet in het punt $a \in D$ *differentieerbaar*, als de limiet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

bestaat. In dit geval noteren we de limiet met $f'(a)$ en noemen dit de *afgeleide* van f in het punt a.

(ii) We noemen de functie f een *differentieerbare functie* als de afgeleide $f'(a)$ voor elke $a \in D$ bestaat. In dit geval heet de functie

$$f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x) \text{ de } \textit{afgeleide functie} \text{ van } f.$$

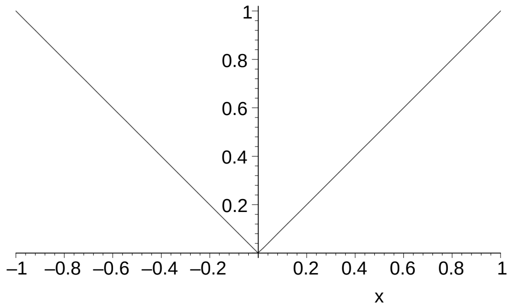
We kunnen de differentieerbaarheid ook nog iets anders formuleren: Een functie f heeft in het punt a de afgeleide $f'(a)$ als de functie

$$\Delta : D \to \mathbb{R},\ h \mapsto \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} & \text{als } h \neq 0 \\ f'(a) & \text{als } h = 0 \end{cases}$$

in het punt $h = 0$ continu is.

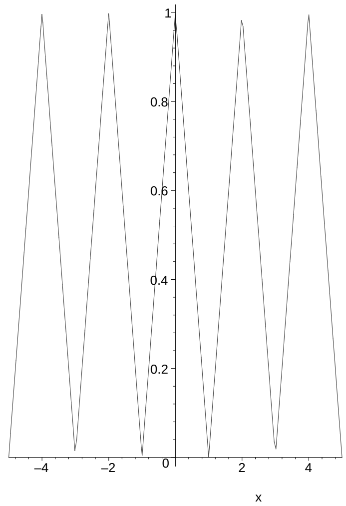
We hebben gezien dat continue functies geen sprongen hebben. Maar dit betekent nog niet dat een continue functie ook differentieerbaar is.

Voorbeeld: De *absoluutwaarde-functie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ is continu, maar in het punt $x = 0$ niet differentieerbaar. Er geldt namelijk $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 1$ voor $h > 0$ en $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -1$ voor $h < 0$, dus bestaat $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ in dit geval niet. Het probleem ligt in het feit dat de absoluutwaarde-functie in het punt $x = 0$ een knik heeft. Differentieerbare functies zijn dus functies die geen *knikken* hebben.



Figuur A.6: $f(x) := |x|$ is voor $x = 0$ niet differentieerbaar

Men zou misschien denken, dat continue functies, alleen maar een paar knikken kunnen hebben, maar in de meeste punten wel differentieerbaar zijn. Helaas is dit niet zo. Het is inderdaad mogelijk een functie aan te geven, die in elk punt continu, maar in geen punt differentieerbaar is. Zo'n functie bestaat dus alleen maar uit knikken.



Figuur A.7: Een zaag-functie

Het idee voor zo'n functie begint met een zaag-functie zo als in Figuur A.7. Vervolgens wordt elk lijnsegment tussen twee knikken in drie even grote delen onderverdeeld. Voor een lijnsegment met richtingscoëfficiënt c krijgt het eerste stuk de oude richtingscoëfficiënt c, het tweede de richtingscoëfficiënt $-c$ en het derde de richtingscoëfficiënt $3c$. Op deze manier komen er twee nieuwe knikken in elk recht lijnsegment.

Als we deze constructie oneindig vaak herhalen, leidt dit tot een 'limiet-functie' die inderdaad continu maar in geen punt differentieerbaar is.

Stijgen en dalen van functies

We komen nu terug op de vraag, of een functie stijgend of dalend is. In principe kunnen we dit ook voor algemene functies definiëren, die niet eens continu hoeven te zijn.

A.5 Definitie Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een functie:

(i) f heet stijgend, als $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.

(ii) f heet strikt stijgend, als $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

(iii) f heet dalend, als $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.

(iv) f heet strikt dalend, als $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Voor differentieerbare functies kunnen we dit nu vertalen naar een criterium voor de afgeleide. Zij f op een interval $[a, b]$ differentieerbaar:

(i) Is $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in [a, b]$ dan is f stijgend op $[a, b]$.

(ii) Is $f'(x) > 0$ voor alle $x \in [a, b]$ dan is f strikt stijgend op $[a, b]$.

(iii) Is $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in [a, b]$ dan is f dalend op $[a, b]$.

(iv) Is $f'(x) < 0$ voor alle $x \in [a, b]$ dan is f strikt dalend op $[a, b]$.

1.4 Regels voor differentiatie

Als we een functie $f : D \to \mathbb{R}$ hebben, dan is f vaak verkregen uit eenvoudigere functies, die we door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en samenstellen combineren. Het zou handig zijn om regels voor de afgeleide van dit soort combinaties te hebben, want het toepassen van de definitie van differentieerbaarheid is vaak erg onhandig.

We gaan ervan uit, dat de functies die we bekijken in de aangegeven punten ook inderdaad differentieerbaar zijn.

(0) Constante functies $f(x) = c$ hebben afgeleide 0, de functie $f(x) = x$ heeft de afgeleide 1.

(1) Optellen:
$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$
Dit geldt omdat $(f + g)(a + h) - (f + g)(a) = (f(a + h) - f(a)) + (g(a + h) - g(a))$ is. Hierbij hebben we nog nodig, dat $\lim_{x\to a}(f + g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ als de twee limieten op de rechterzijde bestaan.

(2) Vermenigvuldigen met een factor $c \in \mathbb{R}$:
$$(cf)'(a) = cf'(a).$$
Hier gebruiken we dat $(cf)(a+h) - (cf)(a) = c(f(a+h) - f(a))$ is.

(3) Vermenigvuldigen (***productregel***):
$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
We hebben $f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) = f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a) = (f(a+h) - f(a))g(a+h) + f(a)(g(a+h) - g(a))$, dus is $\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$, en dus $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(4) Delen (***quotiëntenregel***):
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$
Hiervoor laten we eerst zien dat $(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$: Uit (3) volgt dat $0 = (g\frac{1}{g})'(a) = g'(a)\frac{1}{g(a)} + g(a)(\frac{1}{g})'(a)$, dus is $g(a)(\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)}$. Dit passen we nu samen met (3) op $f \cdot \frac{1}{g}$ toe, dan geldt: $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)}{g(a)} - \frac{f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, en dit geeft de bewering.

[Een manier om de quotiëntenregel te onthouden is het woord `NAT-TAN`, dat een afkorting voor *noemer afgeleide teller - teller afgeleide noemer* is en de term in de teller van de quotiëntenregel aangeeft.]

(5) Samenstelling (***kettingregel***):
$$(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a)f'(a) = g'(f(a))f'(a).$$
In plaats van een voedzame 0 die we bij de productregel gebruikt hebben, gebruiken we nu een voedzame 1: $\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h} = \frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{f(a+h)-f(a)} \cdot \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{g(f(a)+(f(a+h)-f(a))-g(f(a))}{f(a+h)-f(a)} \cdot \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Als we $k := k(h) = f(a+h) - f(a)$ definiëren, gaat wegens de continuïteit van f voor $h \to 0$ ook $k \to 0$. Dus is $\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(f(a)+k)-g(f(a))}{k} \cdot \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

We hebben hier op één plek gesjoemeld, want $f(a+h)-f(a)$ kan ook voor $h \neq 0$ gelijk aan 0 zijn en dan mogen wie hier niet door delen. Maar dit kunnen we herstellen, door in het geval dat $f(a+h)-f(a) = 0$ de quotiënt $\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{f(a+h)-f(a)}$ te vervangen door $g'(f(a))$. Het laat zich aantonen dat de zo gedefinieerde functie continu is en het argument gaat door.

Toepassing: Een slimme toepassing van de kettingregel geeft de afgeleide van de inverse functie $f^{-1}(x)$: Er geldt $(f \circ f^{-1})(x) = x$, dus volgt met de kettingregel dat $f'(f^{-1}(x)) \cdot {f^{-1}}'(x) = 1$ en dus geldt
$${f^{-1}}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

We laten nog een paar belangrijke voorbeelden van afgeleiden zien, die we eenvoudig kunnen bepalen.

- Voor $n \in \mathbb{N}$ is de afgeleide van $f_n(x) = x^n$ de functie $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Dit is duidelijk voor $n = 1$ en als we het voor een n hebben bewezen dan geldt $f_{n+1}'(x) = (f_n f_1)'(x) = f_n'(x) f_1(x) + f_n(x) f_1'(x) = nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n$. Dus klopt het ook voor $n+1$ en dus per volledige inductie voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- Maar dezelfde formule geldt ook voor $f_{-n}(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ voor $n \in \mathbb{N}$. We hebben $f_{-n}'(x) = (\frac{1}{f_n})'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{-n-1}$.
- En dezelfde formule klopt zelfs voor $n = \frac{1}{2}$. Er geldt namelijk $\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \frac{\sqrt{a+h}^2-\sqrt{a}^2}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$, en dus is $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Dus zien we dat ook hier geldt, dat $f_{\frac{1}{2}}'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$. Voor de wortelfunctie $f(x) := \sqrt{x}$ geldt dus:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Het vermoeden ligt nu voor de hand, dat de formule voor de afgeleide van x^n ook voor algemene machtsfuncties $f(x) := x^c$ met $c \in \mathbb{R}$ klopt. Dit is inderdaad het geval, er geldt:

$$f(x) = x^c \Rightarrow f'(x) = cx^{c-1}.$$

Wij gaan dit hier alleen maar voor rationale machten $c = \frac{m}{n}$ aantonen. Hiervoor gebruiken we de formule voor de afgeleide van de inverse functie. We weten dat $f_n^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ de inverse functie van $f_n(x) = x^n$ is, daarom geldt $f_n^{-1\prime}(x) = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}x^{(\frac{1}{n}-1)}$.

We kunnen nu met de kettingregel de afgeleide van $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ berekenen als $f'(x) = \frac{1}{n}(x^m)^{(\frac{1}{n}-1)}mx^{m-1} = \frac{m}{n}x^{(\frac{m}{n}-m)}x^{m-1} = \frac{m}{n}x^{(\frac{m}{n}-1)}$.

Om van rationale machten $c = \frac{m}{n}$ naar algemene reële machten te komen, gebruikt men het feit dat een reëel getal willekeurig goed door een rationaal getal benaderd kan worden.

Belangrijke begrippen in deze les

- functies, domein, bereik, inverse functie
- continuïteit
- afgeleide van een functie
- stijgen en dalen van functies

- productregel, quotiëntenregel, kettingregel
- afgeleide van de inverse functie

Opgaven

1. Bepaal de limiet
$$\lim_{y \to x} \frac{x^n - y^n}{x - y}$$
op twee manieren: rechtstreeks (met behulp van een staartdeling) en via afleiden.

2. Een functie f heet *even* als $f(x) = f(-x)$ voor alle x en *oneven* als $f(x) = -f(-x)$ voor alle x in het domein van f. De grafiek van een even functie is symmetrisch ten opzichte van een spiegeling in de y-as, de grafiek van een oneven functie is symmetrisch ten opzichte van een puntspiegeling in de oorsprong.

   (i) Laat zien dat voor een differentieerbare functie f, die even is, geldt dat $f'(x) = -f'(-x)$ (dus de afgeleide van een even functie is oneven).

   (ii) Laat zien dat voor een differentieerbare functie f, die oneven is, geldt dat $f'(x) = f'(-x)$ (dus de afgeleide van een oneven functie is even).

3. Bepaal voor de volgende functies de intervallen waar de functies stijgen en waar ze dalen:

   (i) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$,

   (ii) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)^2$,

   (iii) $D = [-1, 1]$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$,

   (iv) $D = [4, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x - 4}$,

   (v) $D = \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 20x - 6$.

4. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 7 + \sqrt[5]{3x - 2}$. Bepaal de inverse functie van f.

5. Bepaal de afgeleiden van:

   (i) $f_1(x) := \sqrt{1 + \sqrt{x}}$, (ii) $f_2(x) := 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$, (iii) $f_3(x) := \sqrt[3]{x^5 + 7x}$,

   (iv) $f_4(x) := 2x^2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$, (v) $f_5(x) := \left(\dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)^4$.

Les 2 Speciale functies

We hebben in de vorige les een aantal elementaire functies bekeken en hiervoor gezien hoe we deze functies kunnen afleiden. In wezen waren alle deze functies samengesteld uit machtsfuncties $f(x) := x^c$ met $c \in \mathbb{R}$. In deze les hebben we het over verschillende andere elementaire functies die een belangrijke rol in alle soorten van toepassingen spelen.

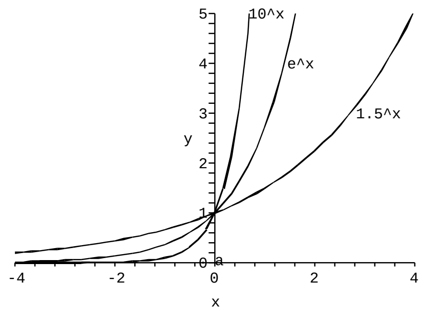
2.1 Exponentiële functie en natuurlijke logaritme

Als we de ontwikkeling van een populatie beschrijven, hebben we het vaak met de volgende situatie te maken: Er is een beginpopulatie van C konijnen en elk jaar verdubbelt het aantal konijnen. Dan zijn er na afloop van één jaar $2C$ konijnen, na twee jaar $4C$, na drie jaar $8C$ enzovoorts. Na afloop van x jaar zijn er dan $2^x C$ konijnen.

Het zou dus handig zijn, iets meer over functies als $f(x) := a^x$ voor $a \in \mathbb{R}$ te weten.

Om te beginnen, moeten we iets erover zeggen hoe we de functiewaarden van zo'n functie berekenen. Voor breuken $x = \frac{m}{n}$ kunnen we a^x wel berekenen, want in dit geval is $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Hier zien we dat $a > 0$ moet zijn, anders zouden we (voor oneven m) uit negative getallen de wortel moeten trekken.

Omdat we graag willen dat $f(x) := a^x$ een continue functie wordt, hebben we nu geen keuze meer bij de berekening van a^x voor een willkeurige $x \in \mathbb{R}$. Als we x namelijk door breuken $\frac{m}{n}$ steeds beter benaderen, moet $\sqrt[n]{a^m}$ een steeds betere benadering van de functiewaarde a^x zijn (dat is juist de definitie van continuiteit).



Figuur A.8: De functies $f(x) := a^x$ voor $a = 1.5, e, 10$

Zo als we dat uit de grafieken in Figuur A.8 zouden verwachten, laat zich aantonen dat de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto a^x$ voor $a > 0$ in het punt $x = 0$ differentieerbaar is. Er laat zich ook algemeen bewijzen dat de afgeleide $f'(0)$

groter is naarmate a groter is. Maar als we de afgeleide van a^x in 0 kennen, kunnen we de afgeleide van a^x in elk punt berekenen, want

$$\frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \text{ en dus } f'(x) = a^x \cdot f'(0).$$

De exponentiële functie met basis e

Als we nu voor verschillende waarden van a de afgeleide van $f(x) := a^x$ in het punt $x = 0$ berekenen, kunnen we door een benaderingsproces een waarde voor a vinden, zo dat $f'(0) = 1$ is. Op die manier vinden we het *Euler-getal* $e \approx 2.71828$ met de eigenschap dat de functie $f(x) := e^x$ in 0 de afgeleide 1 heeft.

Zo als boven opgemerkt volgt uit het feit dat de afgeleide van $f(x) := e^x$ voor $x = 0$ gelijk aan 1 is, dat $f'(x) = e^x \cdot f'(0) = e^x \cdot 1 = f(x)$. Dit betekent dat $f(x) := e^x$ een functie is die aan de vergelijking $f(x) = f'(x)$ voldoet.

De functie e^x heet de *exponentiële functie* en wordt vaak ook met $f(x) := \exp(x)$ genoteerd. Samenvattend hebben we dus:

$$\exp(x) = e^x \text{ met } e \approx 2.71828 \Rightarrow \exp'(x) = \exp(x) \text{ en } \exp(0) = \exp'(0) = 1.$$

Er laat zich zelfs aantonen dat de exponentiële functie door de eigenschappen $f'(x) = f(x)$ en $f(0) = 1$ eenduidig bepaald is:

Neem aan dat $f(x)$ een functie is met $f'(x) = f(x)$ en $f(0) = 1$, dan bepalen we de afgeleide van de functie $g(x) := \frac{f(x)}{\exp(x)}$. Hiervoor geldt

$$g'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{\exp(x)^2} = \frac{f(x)\exp(x) - f(x)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0$$

omdat $\exp'(x) = \exp(x)$ en $f'(x) = f(x)$. Maar hieruit volgt dat $g(x)$ een constante functie is, dus is $f(x) = c \cdot \exp(x)$ en uit $f(0) = \exp(0) = 1$ volgt $c = 1$, dus $f(x) = \exp(x)$.

De exponentiële functie speelt in veel toepassingen een rol, bijvoorbeeld (zo als eerder al gezegd) bij de ontwikkeling van populaties of in de beschrijving van radioactief verval. Maar ook bij het remmen van een auto of bij het verloop van de temperatuur tussen twee kamers met verschillende temperaturen is de functie $\exp(x)$ van toepassing.

We weten (uit ervaring) dat we met evenveel remkracht niet zo snel van 100 naar 80 km per uur kunnen afremmen als van 50 naar 30. De verandering van de snelheid bij het remmen is dus afhankelijk van de snelheid zelfs. Ook bij de temperatuur zien we een soortgelijk effect: als we een kamer van 0° naast een kamer van 50° hebben, zullen de temperaturen sneller veranderen dan bij kamers van 20° en 30°. Bij veel processen vinden we dus een afhankelijkheid tussen de snelheid van de verandering van de functie en de waarde van de functie, d.w.z. een afhankelijkheid van de vorm

$$f'(x) = C \cdot f(x),$$

waarbij C een constante is. Er laat zich aantonen dat alle functies die aan deze vergelijking voldoen van de vorm

$$f(x) := x_0 \cdot \exp(Cx)$$

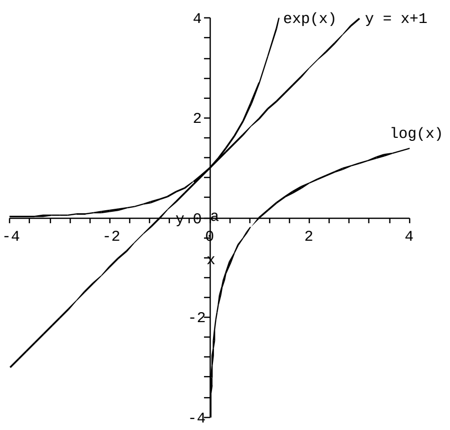
zijn, waarbij x_0 door de randvoorwaarde $x_0 = f(0)$ bepaald is (bijvoorbeeld de temperatuur of positie op het tijdstip $x = 0$).

Algemeen noemt men een vergelijking tussen een functie $f(x)$ en zijn afgeleiden $f'(x)$, $f''(x)$ enz. een *differentiaalvergelijking*.

De natuurlijke logaritme

Uit het feit dat $e > 1$ volgt dat $\exp(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $\exp(x) > 1$ voor alle $x > 0$, daarom is $\exp(y) - \exp(x) = (\exp(y - x) - 1) \exp(x) > 0$ voor $y > x$. Dit toont aan dat $\exp(x)$ een op $\mathbb{R}$ strikt stijgende functie is. Het bereik is $(0, \infty)$, dus kunnen we op het open interval $(0, \infty)$ de inverse functie van $\exp(x)$ definiëren.

De inverse functie van de exponentiële functie $\exp(x)$ noemen we de *natuurlijke logaritme* of kort *logaritme* en noteren deze met $\log(x)$.



Figuur A.9: Exponentiële functie en natuurlijke logaritme

Merk op: De omkeerfunctie van de algemene functie $f(x) := a^x$ heet de *logaritme met basis a* en wordt met ${}^a\log(x)$ genoteerd. Soms (bijvoorbeeld op de middelbare school of bij ingenieurs) wordt met $\log(x)$ de logaritme met basis 10 bedoeld, de natuurlijke logaritme wordt dan met $\ln(x)$ aangegeven. In de wiskunde wordt echter met $\log(x)$ steeds de logaritme met basis e bedoeld en dit houden we ook in deze cursus zo. Bij een logaritme met een andere basis zullen we de basis steeds expliciet aangegeven (bijvoorbeeld ${}^{10}\log(x)$ en ${}^2\log(x)$ voor de logaritmes met basis 10 en 2).

Ook zakrekenmachines kunnen tot verwarring leiden: Vaak is `ln` de toets voor de natuurlijke logaritme terwijl de toets `log` voor de logaritme met basis 10 staat.

We kunnen logaritmes tussen verschillende bases makkelijk omrekenen, want er geldt:

$$^{a}\log(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

We hebben namelijk $e^{\log(x)} = x = a^{^{a}\log(x)} = (e^{\log(a)})^{^{a}\log(x)} = e^{\log(a)\cdot {^{a}\log(x)}}$ en dus $\log(x) = \log(a) \cdot {^{a}\log(x)}$.

Hiermee volgt ook voor twee willekeurige bases a en b van de logaritme dat

$$^{a}\log(x) = \frac{^{b}\log(x)}{^{b}\log(a)}$$

want $\frac{^{b}\log(x)}{^{b}\log(a)} = \frac{\frac{\log(x)}{\log(b)}}{\frac{\log(a)}{\log(b)}} = \frac{\log(x)}{\log(a)} = {^{a}\log(x)}$.

Uit de formule $f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ voor de afgeleide van de inverse functie kunnen we de afgeleide van $\log(x)$ makkelijk berekenen, er geldt

$$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

We hebben hiermee een belangrijk gat gevuld: We hadden in de vorige les gezien dat we voor een geheel getal $n \in \mathbb{Z}$ de afgeleide van $f(x) := x^n$ vinden als $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$. In het bijzonder vinden we elke van de functies x^n als afgeleide van een andere machtsfunctie, namelijk als afgeleide van $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$. De enige uitzondering hierbij is het geval $n = -1$, want de afgeleide van x^0 is natuurlijk 0. Maar nu hebben we een functie gevonden, die $x^{-1} = \frac{1}{x}$ als afgeleide heeft, namelijk de natuurlijke logaritme $\log(x)$.

Om de algemene exponentiële functie $f(x) := a^x$ af te leiden is het handig om de relatie $a = e^{\log(a)}$ en dus $a^x = e^{\log(a)\cdot x} = \exp(\log(a) \cdot x)$ te gebruiken. Met de kettingregel volgt dan namelijk dat

$$(a^x)' = \exp(\log(a)x) \cdot \log(a) = \log(a) \cdot a^x.$$

Tenslotte nog twee belangrijke relaties voor het optellen en vermenigvuldigen bij exp en log:

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y) \quad \text{en} \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

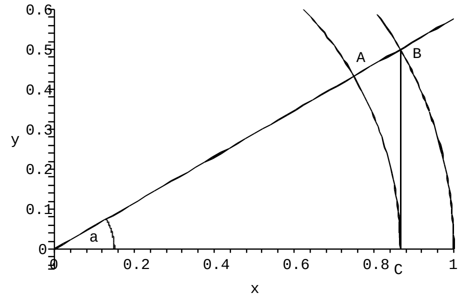
2.2 Trigonometrische functies

De trigonometrische (of goniometrische) functies zijn gebaseerd op de meetkunde van rechthoekige driehoeken.

Als in een rechthoekige driehoek de schuine zijde lengte 1 heeft, en a één van de niet-rechte hoeken is, dan noemen we de lengte van de zijde tegenover a de *sinus van a*, genoteerd met $\sin(a)$ en de lengte van de andere rechthoekzijde de *cosinus van a*, genoteerd met $\cos(a)$.

In het plaatje van Figuur A.10 is $0B$ de schuine zijde in de driehoek $0BC$ en we hebben $\sin(a) = |BC|$ en $\cos(a) = |0C|$. Een van de belangrijkste relaties voor sinus en cosinus volgt meteen uit de stelling van Pythagoras, namelijk

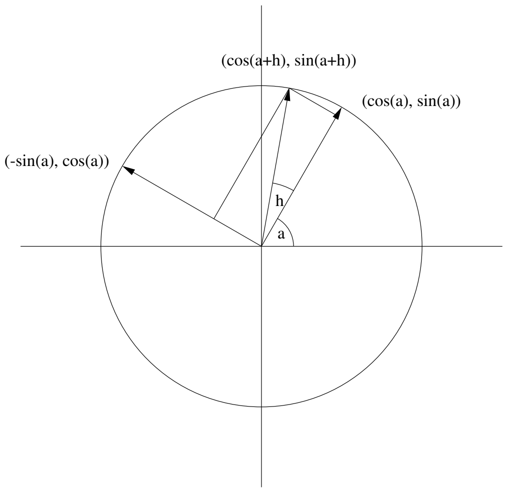
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$



Figuur A.10: $\sin(a) = |BC|$, $\cos(a) = |0C|$

De afgeleiden van $\sin(x)$ **en** $\cos(x)$

Om de afgeleide $\sin'(x)$ van $\sin(x)$ te bepalen moeten we iets over het quotiënt $\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}$ zeggen. Maar hoe kunnen we de sinus van een som van twee hoeken bepalen? Hiervoor geeft Figuur A.11 een aanleiding.



Figuur A.11: De sinus van de som van twee hoeken

We schrijven de vector $w = \begin{pmatrix} \cos(a+h) \\ \sin(a+h) \end{pmatrix}$ als de som van zijn orthogonale projecties op de twee vectoren $v_1 = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} -\sin(a) \\ \cos(a) \end{pmatrix}$ die loodrecht op elkaar staan. Maar de lengte van de projectie van w in de richting van v_1 is $\cos(h)$ en de lengte van de projectie in de richting van v_2 is $\sin(h)$. Dus geldt:

$$\begin{pmatrix} \cos(a+h) \\ \sin(a+h) \end{pmatrix} = \cos(h)\, v_1 + \sin(h)\, v_2 = \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) \\ \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)) \end{pmatrix}.$$

Dit geeft de twee belangrijke opteltheorema's:

$$\cos(a+h) = \cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h),$$

$$\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h).$$

We hebben dus $\sin(a+h) - \sin(a) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a) = \sin(a)(\cos(h) - 1) + \cos(a)\sin(h)$ en hieruit volgt dat

$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a)\frac{\sin(h)}{h}.$$

We weten dat $\lim_{h\to 0} \sin(h) = 0$ en $\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1$, maar dit is nog niet voldoende om de limiet van $\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}$ te berekenen.

Merk op: Vaak worden hoeken niet in graden maar in *radialen* aangegeven. Het idee hierbij is, een hoek door de lengte van de bijhorende cirkelboog in een cirkel van straal 1 te beschrijven. Een hoek van 360° heeft een volle cirkel als boog en die heeft lengte 2π. Omgekeerd hoort een boog van π bij een hoek van 180°. Dus komen we van graden naar radialen door de hoek in graden met $\frac{\pi}{180}$ te vermenigvuldigen en van radialen naar graden door met $\frac{180}{\pi}$ te vermenigvuldigen. We zullen hoeken meestal in radialen aangeven.

Als we de hoek a en de straal r van een cirkelboog kennen, kunnen we de lengte van de cirkelboog aangeven, dit is namelijk $r \cdot a$, waarbij we veronderstellen dat de hoek a in radialen aangegeven is. In Figuur A.10 heeft dus de boog van B naar 1 lengte a en de boog van A naar C lengte $a\cos(a)$. Omdat de boog AC korter is dan de lijn BC geldt $a\cos(a) < \sin(a)$ en omdat de lijn BC korter is dan de boog $B1$ geldt $\sin(a) < a$. Hieruit volgt (voor hoeken a met $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$) dat

$$\cos(a) < \frac{\sin(a)}{a} < 1.$$

Omdat $\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1$, volgt hieruit rechtstreeks dat

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Verder is

$$\begin{aligned}\frac{\cos(h) - 1}{h} &= \frac{(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1)}{h\,(\cos(h) + 1)} = \frac{\cos^2(h) - 1}{h\,(\cos(h) + 1)} = \frac{-\sin^2(h)}{h\,(\cos(h) + 1)} \\ &= \frac{\sin(h)}{h} \cdot \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1}\end{aligned}$$

en omdat $\frac{-\sin(h)}{\cos(h)+1}$ voor $h \to 0$ naar $\frac{0}{2} = 0$ gaat, volgt hieruit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Als we alles bij elkaar nemen volgt dus

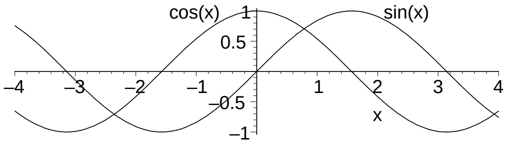
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \sin(a)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos(a)\frac{\sin(h)}{h} \\ &= \sin(a) \cdot 0 + \cos(a) \cdot 1 = \cos(a).\end{aligned}$$

Kort en goed: de afgeleide van de sinus is de cosinus, ofwel

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

We kunnen de afgeleide van de cosinus nu op dezelfde manier bepalen als bij de sinus, maar met een klein trucje gaat het sneller. We weten dat $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ is, dus geldt $0 = (\sin^2(x) + \cos^2(x))' = 2\cos(x)\cos'(x) + 2\sin(x)\sin'(x) = 2\cos(x)(\cos'(x) + \sin(x))$. Hieruit volgt meteen:

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$



Figuur A.12: Sinus- en cosinus-functie

Net zo als we de exponentiële functie $\exp(x)$ door de differentiaalvergelijking $f'(x) = f(x)$ hebben gekarakteriseerd, kunnen we ook sinus en cosinus door een differentiaalvergelijking karakteriseren. Het is duidelijk dat voor de tweede afgeleiden geldt dat $\sin''(x) = -\sin(x)$ en $\cos''(x) = -\cos(x)$.

De bewering is nu, dat een functie $f(x)$ met $f''(x) + f(x) = 0$ een lineaire combinatie van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ is, preciezer gezegd:

$$f''(x) + f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) \text{ met } a = f'(0) \text{ en } b = f(0).$$

Neem eerst aan we hebben een functie $f(x)$ met $f''(x) + f(x) = 0$, $f(0) = 0$ en $f'(0) = 0$. Dan is $0 = f'(x)(f''(x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f'(x)^2 + f(x)^2)'$, dus is $f'(x)^2 + f(x)^2$ een constante functie. Maar omdat $f'(0) = f(0) = 0$, is $f'(x)^2 + f(x)^2 = 0$ voor alle x. Maar een som van kwadraten is alleen maar 0 als alle kwadraten 0 zijn, dus volgt hieruit dat $f(x) = 0$ voor alle x, dus is $f(x)$ de constante 0-functie.

Neem nu aan dat $f''(x) + f(x) = 0$, $f'(0) = a$ en $f(0) = b$. Dan geldt voor $g(x) := f(x) - a\sin(x) - b\cos(x)$ dat $g''(x) + g(x) = 0$, $g'(0) = f'(0) - a = 0$ en $g(0) = f(0) - b = 0$. Dus is $g(x) = 0$ en dus $f(x) = a\sin(x) + b\cos(x)$.

Differentiaalvergelijkingen van de vorm $f''(x) = C \cdot f(x)$ spelen bijvoorbeeld bij de beschrijving van trillingen een belangrijke rol.

Uit de functies $\sin(x)$ en $\cos(x)$ wordt een aantal verdere functies afgeleid, de belangrijkste hiervan is de *tangens* die gedefinieerd is door

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Het domein van de tangens zijn de punten $x \in \mathbb{R}$ met $\cos(x) \neq 0$, dus $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ met $n \in \mathbb{Z}$.

Voor de functie $\tan(x)$ geldt de relatie

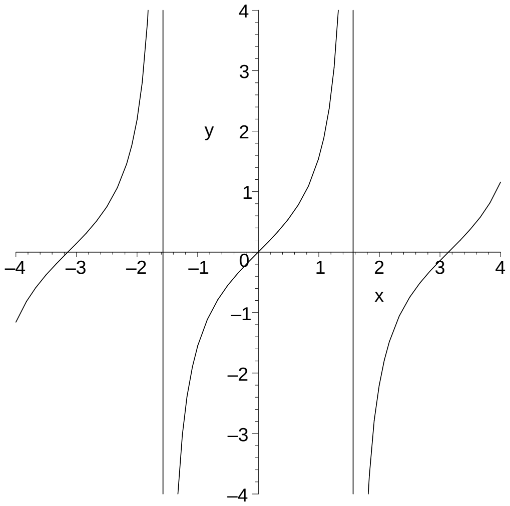
$$1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Toevallig geeft dit juist ook de afgeleide van de tangens, want

$$\tan'(x) = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

We hebben dus:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$



Figuur A.13: Tangens-functie

Inverse functies van de trigonometrische functies

De inverse functies van de trigonometrische functies heten *arcus*-functies en worden als $\arcsin(x) := \sin^{-1}(x)$, $\arccos(x) := \cos^{-1}(x)$ en $\arctan(x) := \tan^{-1}(x)$ genoteerd. De afgeleiden van deze functies kunnen we makkelijk met de formule

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

bepalen.

Het bereik van $\sin(x)$ is het interval $[-1, 1]$ dus heeft $\arcsin(x)$ dit interval als domein. Met behulp van het trucje $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ vinden we:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

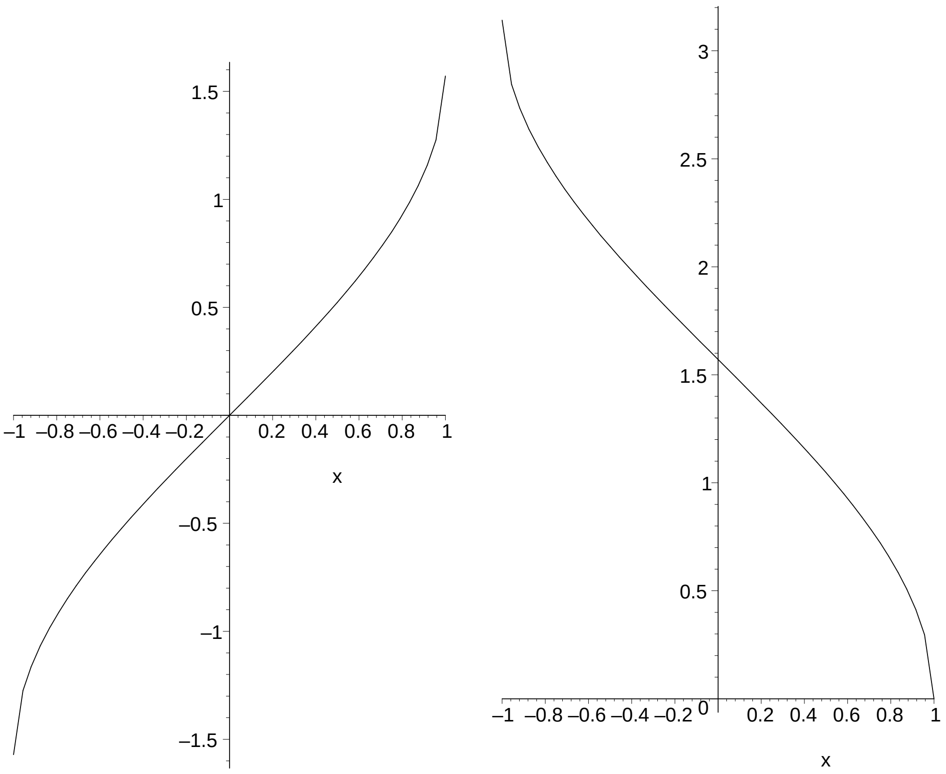
Het domein voor $\arccos(x)$ is ook $[-1, 1]$ en met behulp van $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ tonen we aan dat

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

We hebben dus:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

De meest belangrijke toepassing van de arcussinus en de arcuscosinus ligt in de integratie van functies. We zullen zien dat de integratie de omkering van de differentiatie is, dus hebben we de functie $\arcsin(x)$ nodig om integralen over functies zo als $f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ te berekenen.

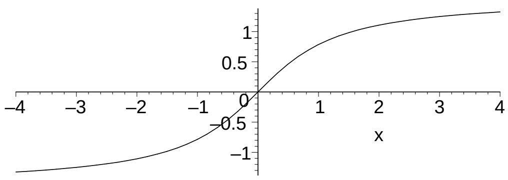


Figuur A.14: Arcussinus- en arcuscosinus-functie

Het bereik van $\tan(x)$ is $\mathbb{R}$, maar de functie is alleen maar injectief op een interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (of een verschuiving hiervan om $n\pi$). De arcustangens-functie is dus op $\mathbb{R}$ gedefinieerd en heeft waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$. Voor de afgeleide vinden we met de formule voor de afgeleide van de inverse functie en de relatie $\cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}$:

$$\begin{aligned}\arctan'(x) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}\right)} = \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

De arcustangens-functie wordt (naast zogeheten *sigmoid-functies*) vaak gebruikt om experimentele waarden naar een genormeerd interval af te



Figuur A.15: Arcustangens-functie

beelden. Bijvoorbeeld wil men als waarden, die een zoekmachine voor de kwaliteit van een zoekresultaat aangeeft, meestal waarden tussen 0 en 1 (of tussen 0% en 100%). Maar de intern in een zoekmachine gebruikte methode levert vaak waarden die niet eens naar beneden of boven begrensd zijn. Dan is het handig om deze waarden af te beelden met de functie

$$f : \mathbb{R} \to [0, 1], x \mapsto \frac{1}{\pi}(\arctan(x) + \frac{\pi}{2})$$

die strikt stijgend is en als bereik het interval $[0, 1]$ heeft.

2.3 Hyperbolische functies

Een verdere klasse van belangrijke functies zijn de hyperbolische functies. Deze zijn afgeleid van de exponentiële functie, maar hebben eigenschappen die op eigenschappen van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ lijken. We definiëren de *sinushyperbolicus* en *cosinushyperbolicus* door

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)), \quad \cosh(x) := \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)).$$

Met behulp van $\exp'(x) = \exp(x)$ gaat men eenvoudig na dat

$$\sinh'(x) = \cosh(x), \qquad \cosh'(x) = \sinh(x).$$

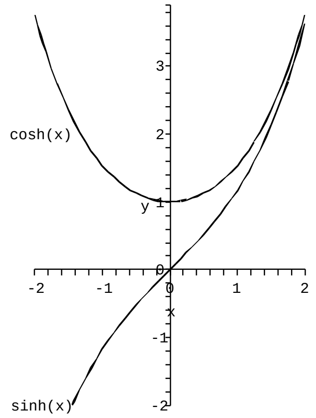
Verder vinden we dat

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

De naam van de hyperbolische functies heeft betrekking tot de *hyperbolische meetkunde*. Terwijl we in de Euclidische meetkunde afstanden in het vlak door $\sqrt{x^2 + y^2}$ berekenen, wordt dit in de hyperbolische meetkunde met $\sqrt{x^2 - y^2}$ gedaan. In de Euclidische meetkunde liggen de punten met afstand r van het nulpunt op een cirkel die we met $r(\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$ kunnen aangeven. Een analoge constructie levert in de hyperbolische meetkunde de punten $r(\cosh(t), \sinh(t))$, die op een hyperbool liggen (vandaar de naam). Een van de meest belangrijke toepassingen van de hyperbolische meetkunde is de ruimtetijd uit de speciale relativiteitstheorie.

Analoog met de tangens-functie wordt ook een *tangenshyperbolicus* gedefinieerd:

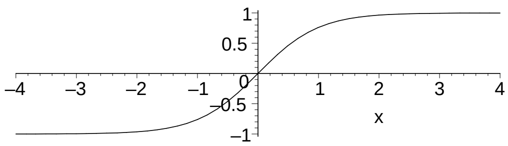
$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$



Figuur A.16: Sinushyperbolicus en cosinushyperbolicus

We hebben $1 - \tanh^2(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$ en voor de afgeleide geldt $\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$, dus

$$\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}.$$



Figuur A.17: Tangenshyperbolicus

Merk op dat ook de functie $\tanh(x)$ net als $\arctan(x)$ voor het normaliseren van experimentele waarden gebruikt kan worden.

Inverse functies van de hyperbolische functies

Ook de hyperbolische functies hebben inverse functies, deze heten de *area*-functies en worden met $\operatorname{arsinh}(x) := \sinh^{-1}(x)$, $\operatorname{arcosh}(x) := \cosh^{-1}(x)$ en $\operatorname{artanh}(x) := \tanh^{-1}(x)$ genoteerd.

We kunnen deze inverse functies expliciet bepalen, want uit $y = \sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ volgt door vermenigvuldiging met $\exp(x)$ dat

$$\exp(x)^2 - 2y\exp(x) - 1 = 0.$$

Dit geeft de oplossingen $\exp(x) = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$, maar wegens $\exp(x) > 0$ is alleen maar het plusteken mogelijk. Het domein van $\operatorname{arsinh}(x)$ is $\mathbb{R}$ omdat dit het bereik van $\sinh(x)$ is. Dus geldt voor $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Voor de afgeleide vinden we met behulp van $\cosh(x) = \sqrt{1+\sinh^2(x)}$:

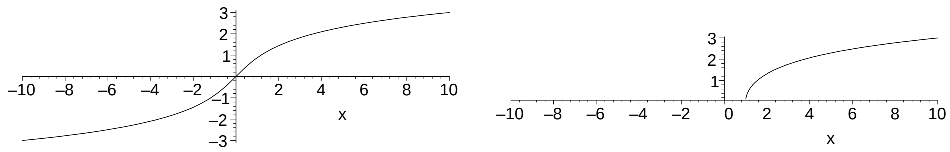
$$\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Het trucje van $\sinh(x)$ toegepast op $\cosh(x)$ geeft $\exp(x)^2 - 2y\exp(x) + 1 = 0$, dus $\exp(x) = y \pm \sqrt{y^2-1}$. In dit geval moeten we erop letten, dat $\cosh(x)$ niet injectief is, we kunnen dus of een inverse functie voor $x > 0$ of voor $x < 0$ aangeven. Voor de inverse functie van $\cosh(x)$ met $x > 0$ geldt het plusteken, dus is

$$\operatorname{arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}).$$

De afgeleide van $\operatorname{arcosh}(x)$ vinden we net als voor $\operatorname{arsinh}(x)$, maar deze keer gebruiken we de relatie $\sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$:

$$\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh}(x)) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$



Figuur A.18: Areasinushyperbolics en areacosinushyperbolics

Tenslotte kijken we naar de inverse functie van de *tangenshyperbolicus*, de *areatangenshyperbolicus* $\operatorname{artanh}(x)$.

Uit $y = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$ volgt $1 + y = \frac{2\exp(x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$ en $1 - y = \frac{2\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$, dus geldt $1 + y = \exp(2x)(1-y) = \exp(x)^2(1-y)$ en dus $\exp(x) = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$. Hieruit volgt

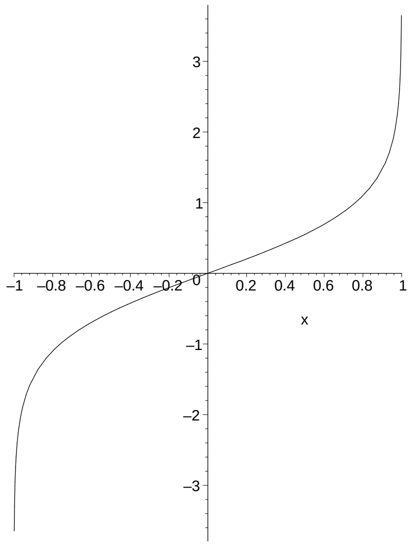
$$\operatorname{artanh}(x) = \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

De afgeleide van $\operatorname{artanh}(x)$ vinden we met behulp van $\cosh^2(x) = \frac{1}{1-\tanh^2(x)}$ door $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh}(x))} = \cosh^2(\operatorname{artanh}(x)) = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2}$, dus is

$$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Ook in dit geval is het belangrijkste argument om de functie $\operatorname{artanh}(x)$ te behandelen, dat we hiermee de integraal over functies zo als $\frac{1}{1-x^2}$ kunnen oplossen.

Deze les wordt samengevat door een tabel die de behandelde functies en hun afgeleiden aangeeft.



Figuur A.19: Areatangenshyperbolicus

$f(x)$	$f'(x)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

Belangrijke begrippen in deze les

- exponentiële functie, logaritme
- trigonometrische functies
- inverse trigonometrische functies
- hyperbolische functies
- inverse hyperbolische functies

Opgaven

6. Laten $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de functies zijn met $f(x) := \log(x^2+1)$ en $g(x) := \exp(3x)$. Bereken de samengestelde functies $f \circ g$ en $g \circ f$ en de afgeleiden $f'(x)$, $g'(x)$, $(f \circ g)'(x)$ en $(g \circ f)'(x)$.

7. Toon aan dat voor alle $x \in (0, \infty)$ geldt dat $\log(x) \leq 2\sqrt{x} - 2$.

8. Laat zien dat $\sin x + \tan x > 2x$ voor alle $x \in (0, \pi/2)$.
   (Hint: Differentiëren.)

9. Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) := x + \sin x + \arctan(3x)$.
   Toon aan dat f een inverse functie met domein $\mathbb{R}$ bezit. Daarvoor moet je bewijzen dat f strikt stijgend of dalend is en het geheel van $\mathbb{R}$ als bereik heeft.

10. Bereken voor $f(x) := \dfrac{1}{1+x}$ de functies $g(x) := f(f'(x))$ en $h(x) := f'(f(x))$.

11. Bepaal de afgeleiden van de volgende functies:

$$\text{(i) } f(x) := \sin(x + x^2), \quad \text{(ii) } f(x) := \sin(x) + \sin(x^2), \quad \text{(iii) } f(x) := \sin(\cos(x)),$$

$$\text{(iv) } f(x) := \sin(\sin(x)), \quad \text{(v) } f(x) := \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right), \quad \text{(vi) } f(x) := \frac{\sin(\cos(x))}{x},$$

$$\text{(vii) } f(x) := \sin(x + \sin(x)), \qquad \text{(viii) } f(x) := \sin(\cos(\sin(x))).$$

12. Bepaal de afgeleiden van:

$$\text{(i) } f_1(x) = x^x, \qquad \text{(ii) } f_2(x) = x^{x \sin(x)}, \qquad \text{(iii) } f_3(x) = \log(\cosh(x) + \sinh(x)),$$

$$\text{(iv) } f_4(x) = \sin\big(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\big), \quad \text{(v) } f_5(x) = \exp(-x^2), \quad \text{(vi) } f_6(x) = x\exp(\arctan(x)),$$

$$\text{(vii) } f_7(x) = 5^{\cos(x)}, \quad \text{(viii) } f_8(x) = \log\big(\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\big), \quad \text{(ix) } f_9(x) = \arcsin\big(\frac{1-x}{1+x}\big).$$

13. Als je gewone afgeleiden vervelend vindt, zou je het misschien interessanter vinden om van de volgende functies de afgeleide $f'(x)$ te berekenen:

$$\text{(i) } f(x) := \sin((x+1)^2(x+2)), \qquad \text{(ii) } f(x) := \sin^3(x^2 + \sin(x)),$$

$$\text{(iii) } f(x) := \sin^2((x + \sin(x))^2), \qquad \text{(iv) } f(x) := \sin\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right),$$

$$\text{(v) } f(x) := \sin(x\sin(x)) + \sin(\sin(x^2)), \qquad \text{(vi) } f(x) := \sin^2(x)\sin(x^2)\sin^2(x^2),$$

$$\text{(vii) } f(x) := (x + \sin^5(x))^6, \qquad \text{(viii) } f(x) := \sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x))))),$$

$$\text{(ix) } f(x) := \sin((\sin^7(x^7) + 1)^7), \qquad \text{(x) } f(x) := (((x^2+x)^3 + x)^4 + x)^5,$$

$$\text{(xi) } f(x) := \sin(x^2 + \sin(x^2 + \sin(x^2))), \qquad \text{(xii) } f(x) := \sin(6\cos(6\sin(6\cos(6x)))),$$

$$\text{(xiii) } f(x) := \frac{\sin(x^2)\sin^2(x)}{1 + \sin(x)}, \qquad \text{(xiv) } f(x) := \sin\left(\frac{x^3}{\sin(\frac{x^3}{\sin(x)})}\right).$$

Les 3 Minima en maxima van functies

Een reden waarom we de afgeleide van een functie bekijken is dat we iets over het stijgen of dalen van de functie willen weten. Als we met een differentieerbare functie te maken hebben, is de functie stijgend als de afgeleide positief is en dalend als de afgeleide negatief is. Maar soms zijn we ook geïnteresseerd in de verandering van het stijgen en dalen van een functie. Bijvoorbeeld gaat het er in de economie vaak niet om of een bedrijf een groei in de omzet heeft, maar alleen maar of de groei groter is dan de afgelopen jaren. De groei wordt beschreven door de afgeleide van de omzet-functie, de verandering van de groei door de afgeleide van de groei-functie, dus door de tweede afgeleide van de omzet-functie.

We kijken dus voor een functie $f(x)$ niet alleen maar naar de eerste afgeleide $f'(x)$ maar ook naar de tweede afgeleide $f''(x) := (f'(x))'$ en ook naar hogere afgeleiden $f'''(x)$ enz. Omdat het onhandig wordt, meer en meer streepjes te schrijven, gebruiken we een nieuwe notatie: We schrijven $f^{(3)}(x)$ voor $f'''(x)$ en in het algemeen $f^{(n)}(x)$ voor de n-de afgeleide.

Merk op: Hogere afgeleiden hoeven niet altijd te bestaan, zelfs als de functie $f(x)$ differentieerbaar is. Bijvoorbeeld heeft de functie

$$f(x) := \begin{cases} -x^2 & \text{als } x < 0 \\ x^2 & \text{als } x \geq 0 \end{cases}$$

de afgeleide $f'(x) = 2|x|$ en is dus een differentieerbare functie, maar de tweede afgeleide bestaat voor $x = 0$ niet.

Men zegt soms dat een functie bijvoorbeeld *drievoudig differentieerbaar* is, om aan te duiden dat de derde afgeleide $f'''(x)$ bestaat. De 'beste' functies (d.w.z. de meest gladde functies) zijn functies die willekeurig vaak differentieerbaar zijn. Hierbij is het toegestaan dat de n-de afgeleiden $f^{(n)}(x)$ vanaf een zekere n alle gelijk aan de constante 0-functie zijn. Dit is bijvoorbeeld bij veeltermfuncties van graad $n - 1$ het geval.

Een belangrrijke toepassing van de hogere afgeleiden is de karakterisering van minima en maxima van functies. Dit zullen we in deze les uitvoerig bekijken.

3.1 Minima en maxima van gewone functies

In veel toepassingen komt een probleem er op neer een waarde x te bepalen zo dat een functie $f(x)$ een minimale (of maximale) waarde aanneemt. Bijvoorbeeld wordt er in de productie van blikken naar gekeken, een zo klein mogelijke hoeveelheid materiaal voor een gegeven volume te gebruiken. In de economie hangt de vraag naar een object natuurlijk ook van de prijs af. Die wordt dus zo gekozen dat het product van de prijs en het (verwachte) aantal verkochte objecten maximaal wordt.

De definitie van (absolute) minima en maxima van een functie in zijn domein is heel voor de hand liggend:

A.6 Definitie Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ heeft in a een *absoluut minimum* als $f(a) \leq f(x)$ voor alle $x \in D$.

Analoog heeft een functie een *absoluut maximum* als $f(a) \geq f(x)$ voor alle $x \in D$.

Soms is het ook interessant om naar *lokale* minima en maxima te kijken. Dat zijn punten $a \in D$ zo dat f voor een klein interval om a heen een absoluut minimum/maximum in a heeft. Preciezer zeggen we:

A.7 Definitie Een functie f heeft in $a \in D$ een *lokaal* (of relatief) *minimum* als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $f(a) \leq f(x)$ voor alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Een functie heeft een *lokaal maximum* als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $f(a) \geq f(x)$ voor alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Voor willekeurige functies f kunnen we niet veel verder dan deze definities, maar als f een differentieerbare functie is, zegt de afgeleide inderdaad iets over minima en maxima.

Stel dat f in a een lokaal minimum heeft en differentieerbaar in a is. Dan geldt voor kleine $h < 0$ dat $f(a + h) \geq f(a)$ en dus is $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0$. Maar ook voor kleine $h > 0$ is $f(a + h) \geq f(a)$ en dus $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$. Omdat de afgeleide $f'(a)$ alleen maar bestaat als de limiet $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ voor $h < 0$ en $h > 0$ bestaat en dezelfde waarde heeft, is noodzakelijk $f'(a) = 0$.

Dezelfde redenering geeft ook voor een lokaal maximum dat $f'(a) = 0$ is. We hebben dus gezien:

A.8 Stelling *Voor een functie $f : D \to \mathbb{R}$, die in $a \in D$ differentieerbaar is en een lokaal minimum/maximum in a heeft, geldt $f'(a) = 0$.*

Helaas geldt de omkering van deze stelling niet: Bijvoorbeeld is voor $f(x) = x^3$ de afgeleide $f'(x) = 3x^2$ en dus is $f'(0) = 0$, maar 0 is geen lokaal minimum of maximum, omdat $f(x) < 0$ voor $x < 0$ en $f(x) > 0$ voor $x > 0$.

Maar tenminste kunnen we met behulp van deze stelling vaak een lijstje van kandidaten x maken, waar een functie mogelijk een minimum/maximum heeft, namelijk de punten x waarvoor $f'(x) = 0$ is en we noemen zo'n punt een *kritiek punt*. Andere kandidaten waar een functie een lokaal minimum/maximum kan hebben maar waar we dat niet met behulp van de afgeleide kunnen zien, zijn punten waar $f(x)$ niet differentieerbaar is. Bijvoorbeeld is $f(x) = |x|$ in $x = 0$ niet differentieerbaar, maar zijn (absoluut) minimum zit in $x = 0$. Ook punten die op randpunten van het domein D liggen, moeten we apart onderzoeken. Hierbij noemen we een punt een *randpunt* als in een klein interval links of rechts van a geen verdere punten van D liggen, dus als $[a - \delta, a) \cap D = \emptyset$ of $(a, a + \delta] \cap D = \emptyset$.

A.9 Definitie Voor een functie $f(x) : D \to \mathbb{R}$ noemen we $a \in D$ een kritiek punt van $f(x)$ als:

(i) $f(x)$ in a differentieerbaar is met $f'(a) = 0$;

(ii) $f(x)$ in a niet differentieerbaar is;

(iii) a een randpunt van D is.

De kritieke punten zijn de kandidaten voor lokale minima of maxima van $f(x)$.

Hoe kunnen we nu aflezen of een functie in een punt echt een lokaal minimum of maximum heeft? Voor een lokaal minimum weten we al dat $f'(a) = 0$ moet zijn. Verder weten we dat $f(x)$ dalend is als $f'(x) \leq 0$ en stijgend als $f'(x) \geq 0$. Als we dus zien dat $f'(x) \leq 0$ voor $x < a$ en $f'(x) \geq 0$ voor $x > a$, heeft $f(x)$ inderdaad in a een lokaal minimum.

Omgekeerd heeft $f(x)$ een lokaal maximum in a als $f'(a) = 0$, $f'(x) \geq 0$ voor $x < a$ en $f'(x) \leq 0$ voor $x > a$. Kort gezegd heeft een functie $f(x)$ een lokaal minimum of maximum in het punt a als het teken van de afgeleide $f'(x)$ in a verandert. Merk op dat we de ongelijkheden $f'(x) \geq 0$ en $f'(x) \leq 0$ slechts in een klein interval rond a hoeven te bekijken.

Om een lokaal minimum te identificeren, kunnen we soms ook de tweede afgeleide gebruiken: Als $f'(a) = 0$ en $f''(x) > 0$ voor $x \in (a - \delta, a + \delta)$, dan is $f'(x)$ een op dit interval strikt stijgende functie en dus is $f'(x) < 0$ voor $x < a$ en $f'(x) > 0$ voor $x > a$. Net zo vinden we een lokaal maximum door $f'(a) = 0$ en $f''(x) < 0$ op $(a - \delta, a + \delta)$. Dit houden we in de volgende stelling vast:

A.10 Stelling *Een differentieerbare functie $f(x)$ heeft een lokaal minimum in a als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $f'(a) = 0$, $f'(x) \leq 0$ voor $x \in (a - \delta, a)$ en $f'(x) \geq 0$ voor $x \in (a, a + \delta)$. Dit geldt in het bijzonder als $f'(a) = 0$ en $f''(x) > 0$ voor $x \in (a - \delta, a + \delta)$.*
Een differentieerbare functie $f(x)$ heeft een lokaal maximum in a als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $f'(a) = 0$, $f'(x) \geq 0$ voor $x \in (a - \delta, a)$ en $f'(x) \leq 0$ voor $x \in (a, a + \delta)$. Dit geldt in het bijzonder als $f'(a) = 0$ en $f''(x) < 0$ voor $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Voorbeeld 1

We gaan na hoe we de hoogte van een (gesloten) blik moeten kiezen zo dat het gebruikte materiaal (de oppervlakte) minimaal wordt. Een blik nemen we aan als een cilinder van hoogte h met als grondvlak een cirkel van straal r. Dan is het volume V van de cilinder gegeven door $V = \pi r^2 h$ en de oppervlakte O door $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$. Bij een gegeven volume willen we nu de minimale oppervlakte vinden. Uit de vergelijking voor het volume vinden we $h = \frac{V}{\pi} r^{-2}$, dus kunnen we O schrijven als een functie van r door

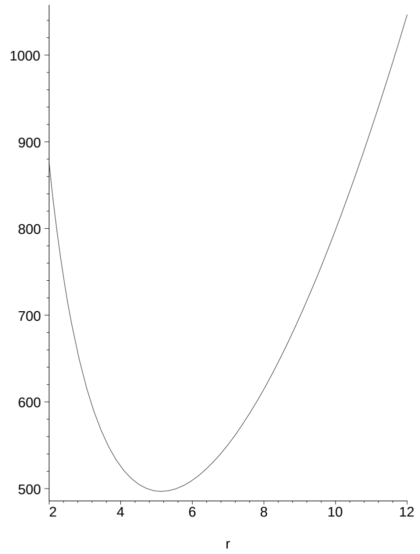
$$O(r) = 2\pi r(r + \frac{V}{\pi} r^{-2}) = 2\pi r^2 + 2V r^{-1}.$$

Voor de afgeleide van $O(r)$ geldt

$$O'(r) = 4\pi r - 2V r^{-2}$$

en we hebben

$$O'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = 2V r^{-2} \Leftrightarrow 2\pi r^3 = V = \pi r^2 h.$$



Figuur A.20: Oppervlakte van een blik van $850ml$ afhankelijk van de straal van het grondvlak

Het geval $r = 0$ kunnen we rustig negeren (dan is het volume $V = 0$), dus volgt dat $2r = h$ en dus is de straal van de cirkel half zo groot als de hoogte van de blik.

Voor een blik met een typisch volume van $850ml$ vinden we dus $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \approx 5.13cm$ en $h \approx 10.27cm$. Dit zijn inderdaad ongeveer de afmetingen van een standaardblik van dit volume.

Voorbeeld 2

De kosten van een auto zijn bepaald door de kosten van de benzine en de vaste kosten die alleen maar afhankelijk zijn van de tijd die de auto rijdt. Neem aan dat de kosten voor de benzine met het kwadraat van de snelheid stijgen. Wat is dan de optimale snelheid om een gegeven afstand zo goedkoop mogelijk af te leggen?

Als in de tijd t de afstand s met snelheid v gereden wordt, dan geldt $v = \frac{s}{t}$. De kosten voor de benzine op een afstand s zijn dus $k_b = cv^2t = cv^2\frac{s}{v} = csv$ (waarbij c de benzineprijs aangeeft) en de vaste kosten voor dezelfde afstand zijn $k_v = dt = d\frac{s}{v}$ (voor een constante d). De totale kosten afhankelijk van de snelheid v zijn dus

$$k(v) = csv + dsv^{-1}$$

en de afgeleide hiervan is

$$k'(v) = cs - dsv^{-2}.$$

We hebben $k'(v) = 0$ voor $v^2 = \frac{d}{c}$, dus is de meest economische snelheid $v = \sqrt{\frac{d}{c}}$. Dit kunnen we ook kwalitatief bevestigen, want als de vaste kosten relatief hoger worden, is het goedkoper om sneller te rijden.

Voorbeeld 3

We hebben n punten $a_1, \ldots, a_n$ op de x-as gegeven en willen een punt x bepalen zo dat de som $f(x) := (x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$ van de kwadratische afstanden van x van de gegeven punten minimaal wordt. Voor de afgeleide $f'(x)$ geldt

$$f'(x) = 2(x-a_1) + \ldots + 2(x-a_n) = 2nx - 2(a_1 + \ldots a_n).$$

We hebben dus $f'(x) = 0$ als $x = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots, a_n)$, dus als x het rekenkundig gemiddelde van de a_i is.

3.2 Functies van meerdere variabelen en de partiële afgeleide

Tot nu toe hebben we alleen maar naar functies gekeken die van één variabel afhangen. Maar in de praktijk komen we vaak functies tegen die van een aantal parameters afhangen. Bijvoorbeeld is de afstand van de oorsprong van een punt (x, y, z) in de 3-dimensionale ruimte gegeven door de functie $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die drie variabelen heeft.

Het is nu niet meer onmiddellijk duidelijk, hoe we een afgeleide van zo'n functie moeten definiëren. Het zou handig zijn als de afgeleide weer de richtingscoëfficient van de raaklijn aan de grafiek van de functie is, maar het probleem is dat er in één punt raaklijnen voor elke mogelijke richting zijn. We moeten dus ook de richting aangeven in die we de raaklijn aan de grafiek willen leggen.

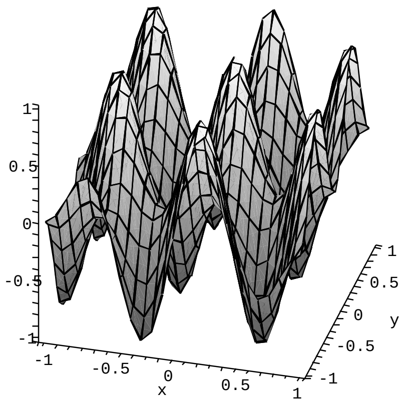
Het belangrijkste zijn de afgeleiden in de richtingen van de coördinatenassen. Deze vinden we door alle variabelen tot op één na als constant op te vatten. Dan is de functie slechts nog een functie van de overgebleven variabel en die kunnen we met de gewone regels afleiden.

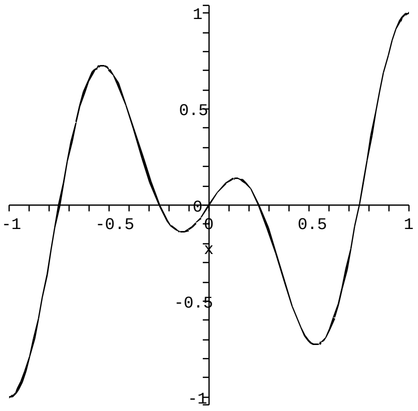
Voor een functie van twee variabelen kunnen we dit ook grafisch interpreteren: De grafiek van zo'n functie kunnen we zien als de verzameling van punten $(x, y, f(x, y))$ in de 3-dimensionale ruimte, net zo als we de grafiek van een gewone functie als de verzameling van punten $(x, f(x))$ in het 2-dimensionale vlak bekijken. Als we nu y tot een constante y_0 verklaren, dan kijken we naar de doorsnede van de grafiek $(x, y, f(x, y))$ met het vlak dat bepaald is door de vergelijking $y = y_0$, dus naar de punten (x, y_0, z) met $z = f(x, y_0)$. Dit is een gewone grafiek van een functie in één variabel zo als in de plaatjes in Figuur A.21 te zien.

Maar voor zo'n doorsnede kunnen we natuurlijk zeggen wat de afgeleide zou zijn, namelijk de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan deze gewone grafiek. Deze afgeleide noemen we de *partiële afgeleide* naar x. Als we nu terug gaan naar de definitie van de gewone afgeleide, zien we dat de partiële afgeleide naar x in dit geval gegeven is door de limiet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Omdat we voor de partiële afgeleide naar x alleen maar naar de verandering van $f(x, y)$ in de richting van x kijken, noemen we dit ook de *richtingsafgeleide* in de richting van x.





Figuur A.21: Functie $f(x, y)$ en snede door deze functie voor $y = 0.5$

Analoog definiëren we nu de partiële afgeleide voor een algemene functie $f(x_1, \ldots, x_n)$ van n variabelen. Voor de partiële afgeleide naar x_i behandelen we de variabelen $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ als constanten (d.w.z. net zo als de constanten 5 of π) en interpreteren f zodanig als een functie van één variabel (namelijk x_i). Als we op de zo geïnterpreteerde functie de definitie van de gewone afgeleide toepassen krijgen we de volgende algemene definitie voor de partiële afgeleide:

A.11 Definitie Voor een functie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ van n variabelen heet

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

de *partiële afgeleide* van f naar x_i, als deze limiet bestaat.

Vaak wordt de partiële afgeleide $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ook kort als f_{x_i} geschreven.

Natuurlijk gebruiken we nooit deze limiet-definitie om een partiële afgeleide te berekenen, maar passen de gewone regels voor functies van één variabel toe (waarbij we gewoon een paar constanten meer in de functie hebben).

Voorbeeld: Zij $f(x, y, z)$ de functie van drie variabelen, gegeven door $f(x, y, z) := x \log(yz)$, dan geldt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \log(yz), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x(yz)^{-1}z = \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x(yz)^{-1}y = \frac{x}{z}.$$

Merk op dat we ook partiële afgeleide kunnen itereren, dus we kunnen $\frac{\partial f}{\partial x} = \log(yz)$ weer partieel afleiden. Als we dit bijvoorbeeld partieel naar y afleiden, schrijven we dit als

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = (yz)^{-1}z = y^{-1}.$$

Omgekeerd kunnen we ook $\frac{\partial f}{\partial y}$ partieel naar x afleiden, dit geeft $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = y^{-1}$. We zien dus dat het geen verschil maakt of we eerst partieel naar x en dan naar y afleiden, of andersom.

Merk op: Het is helemaal niet vanzelfsprekend dat $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ geldt, maar dit is inderdaad altijd (behalve in kunstmatig geconstrueerde gevallen) zo en heet de *Stelling van Schwarz*. We hoeven dus bij het achter elkaar uitvoeren van meerdere partiële afgeleiden *niet* op de volgorde te letten.

Notatie: We hebben al gezien dat we een tweede partiële afgeleide $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ schrijven als $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$. Als we twee keer in dezelfde richting afleiden, wordt dit afgekort met $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x}$.

In de vorige les hebben we gezien, dat sommige belangrijke functies door relaties met hun afgeleiden gekarakteriseerd kunnen worden. Zo is de exponentiële functie een oplossing van de differentiaalvergelijking $f'(x) = f(x)$ en de sinus en cosinus zijn oplossingen van de vergelijking $f(x) + f''(x) = 0$.

Dit soort vergelijkingen bestaat ook voor de partiële afgeleiden, we noemen zo'n vergelijking een *partiële differentiaalvergelijking*. Als voorbeeld kijken we naar de vergelijking:

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

We laten zien dat de functie $f(x, y) := \frac{xy}{x-y}$ een oplossing hiervan is:

We hebben $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x-y)-xy}{(x-y)^2} = -\frac{y^2}{(x-y)^2}$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x-y)+xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}$. Hieruit volgt $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2}{(x-y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{2x(x-y)^2 - x^2 \cdot 2(x-y)}{(x-y)^4} = \frac{-2xy}{(x-y)^3}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{(x-y)^3}$ en we zien dat $f(x, y)$ inderdaad aan de vergelijking voldoet.

In het algemeen is het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen een ingewikkeld probleem, meestal laten zich oplossingen alleen maar door numerieke benaderingsmethoden vinden.

Soms spelen bij de beschrijving van problemen verschillende soorten van variabelen een rol, bijvoorbeeld ruimtelijke coördinaten en tijd of temperatuur en druk. Als voorbeeld hiervoor bekijken we de functie

$$f(x, y, t) := \exp(-t)(\sin(x) + \cos(y)).$$

Hiervoor geldt: $\frac{\partial f}{\partial x} = \exp(-t)\cos(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\exp(-t)\sin(y)$, dus hebben we $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\exp(-t)\sin(x)$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\exp(-t)\cos(y)$. Aan de andere kant geldt $\frac{\partial f}{\partial t} = -\exp(-t)(\sin(x) + \cos(y))$, dus voldoet de functie aan de vergelijking

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Deze vergelijking beschrijft de uitbreiding van de hitte (de parameter t) op een gegeven oppervlak (met coördinaten x en y) en heet de *hittevergelijking*.

3.3 Minima en maxima van functies van meerdere variabelen

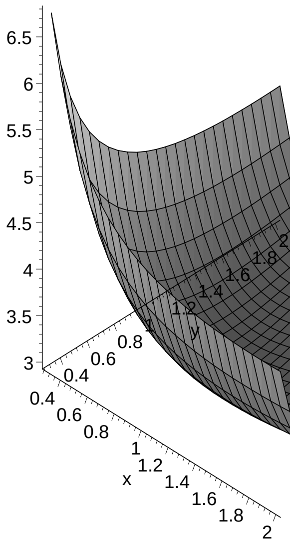
Ook bij functies van meerdere variabelen kunnen we ons natuurlijk afvragen hoe we minima en maxima kunnen vinden. Door de interpretatie van de partiële afgeleide als richtingscoëfficient van de raaklijn parallel met een van de coördinatenassen zien we, dat in een lokaal minimum alle partiële afgeleiden gelijk aan 0 moeten zijn. Net als bij de functies van één variabel is dit alleen maar een noodzakelijke voorwaarde, maar geeft toch kandidaten voor minima en maxima.

A.12 Stelling *Een noodzakelijke voorwaarde dat een functie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ van n variabelen in een punt een lokaal minimum of maximum heeft, is dat in dit punt de partiële afgeleiden naar alle variabelen gelijk aan 0 zijn.*

Met behulp van deze stelling kunnen we bijvoorbeeld na gaan dat een kubus de (gesloten) doos met minimale oppervlakte voor gegeven volume is. Het volume van een doos met zijden x, y, z is geven als $V = xyz$ de oppervlakte als $O(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$. We kunnen de derde coördinaat z uitdrukken door $z = \frac{V}{xy}$, dan wordt

$$O = O(x, y) = 2(xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}).$$

We hebben $\frac{\partial O}{\partial x} = 2(y - \frac{V}{x^2})$ en $\frac{\partial O}{\partial y} = 2(x - \frac{V}{y^2})$. Uit $\frac{\partial O}{\partial x} = \frac{\partial O}{\partial y} = 0$ volgt dus $x^2 y = V$ en $xy^2 = V$. Als we deze twee vergelijkingen van elkaar aftrekken vinden we $xy(x - y) = 0$ en hieruit volgt $x = y$, want voor $x = 0$ of $y = 0$ is $V = 0$. Dan geldt $V = x^2 y = x^3$ en dus is $z = \frac{V}{xy} = x$.



Figuur A.22: Oppervlakte van een (gesloten) doos van volume 1 afhankelijk van de lengten van de x- en y-zijden

Hoe zou dit (niet onverwachte) resultaat veranderen als we naar een open doos zonder deksel kijken? We kunnen deze vraag ook zo interpreteren, dat het materiaal voor bodem en deksel van een gesloten doos slechts half zo duur is als het materiaal voor de zijvlakken. Dan zouden we verwachten dat het goedkoper wordt, als we bodem en deksel iets groter en de zijvlakken iets kleiner maken.

Het volume van een open doos is nog steeds $V = xyz$, maar de oppervlakte wordt nu $O(x, y, z) = xy + 2yz + 2zx$ (als de z-as de verticale as is). Door weer z door $\frac{V}{xy}$ te vervangen krijgen we deze keer

$$O(x, y) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}.$$

Voor de partiële afgeleiden geldt $\frac{\partial O}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2}$ en $\frac{\partial O}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2}$, dus krijgen we uit $\frac{\partial O}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial O}{\partial y} = 0$ de noodzakelijke voorwaarden $x^2 y = 2V$ en $xy^2 = 2V$. Deze vergelijkingen trekken we weer van elkaar af, dan volgt $xy(x - y) = 0$ en dus $x = y$ en dus $x^3 = 2V$. We hebben dus $x = y = \sqrt[3]{2V}$ en hieruit volgt $z = \sqrt[3]{\frac{1}{4}V}$.

Tegenover de gesloten doos met $x = y = z = \sqrt[3]{V}$ zijn dus x en y een factor $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$ groter en de hoogte z is een factor $\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 0.63$ kleiner.

Coëfficiënten van een regressielijn

Een verdere toepassing voor het vinden van minima van een functie van meerdere variabelen ligt in het vinden van een regressielijn door een aantal gegeven punten. De regressielijn door de punten is bepaald door de eigenschap dat de som van de kwadraten van de verticale afstanden tussen de punten en de lijn minimaal wordt. Stel we hebben punten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ gegeven. Als we door deze punten de lijn $y = ax + b$ leggen, wordt de som van de kwadratische afstanden gelijk aan

$$f(a, b) := (ax_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

De partiële afgeleiden van f naar a en b zijn gegeven door

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2(ax_1 + b - y_1)x_1 + \ldots + 2(ax_n + b - y_n)x_n = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i;$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 2(ax_1 + b - y_1) + \ldots + 2(ax_n + b - y_n) = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i).$$

De voorwaarden $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ kunnen we nu schrijven als een stelsel lineaire vergelijkingen voor a en b. Hiervoor is het handig een (door C.F. Gauss voorgestelde) notatie te gebruiken, namelijk een som $\sum_{i=1}^{n} z_i$ af te korten door $[z]$. Hiermee worden de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial a}$ en $\frac{\partial f}{\partial b}$ herschreven tot

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 2(a[x^2] + b[x] - [yx]) \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 2(a[x] + nb - [y])$$

en na schrappen van de 2 worden de vergelijkingen $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$:

$$a[x^2] + b[x] = [xy] \quad \text{en} \quad a[x] + nb = [y].$$

De tweede vergelijking geeft al aan, dat de regressielijn $ax + b$ door het zwaartepunt $(\frac{1}{n}[x], \frac{1}{n}[y])$ van de punten loopt, want er geldt $\frac{1}{n}[y] = a\,\frac{1}{n}[x] + b$.

Uit de tweede vergelijking krijgen we

$$b = \frac{1}{n}([y] - a[x])$$

en invullen hiervan in de eerste vergelijking geeft

$$a[x^2] + \frac{1}{n}([y] - a[x])[x] = [xy].$$

Vermenigvuldigen met n en oplossen naar a geeft

$$na[x^2] + [x][y] - a[x]^2 = n[xy] \Rightarrow a = \frac{n[xy] - [x][y]}{n[x^2] - [x]^2}.$$

Ten slotte moeten we dit resultaat nog in de vergelijking voor b invullen, dit geeft:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{n}([y] - a[x]) = \frac{1}{n}([y] - \frac{(n[xy] - [x][y])[x]}{n[x^2] - [x]^2}) \\ &= \frac{1}{n}\,\frac{n[x^2][y] - [x]^2[y] - n[x][xy] + [x]^2[y]}{n[x^2] - [x]^2} = \frac{[x^2][y] - [x][xy]}{n[x^2] - [x]^2}. \end{aligned}$$

Samengevat hebben we aangetoond dat de coëfficiënten van de regressielijn $ax + b$ door de punten $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ gegeven zijn door:

$$\begin{aligned} a &= \frac{n[xy] - [x][y]}{n[x^2] - [x]^2} = \frac{n(\sum_{i=1}^n x_i y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}; \\ b &= \frac{[x^2][y] - [x][xy]}{n[x^2] - [x]^2} = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}. \end{aligned}$$

Belangrijke begrippen in deze les

- hogere afgeleide
- lokaal (absoluut) minimum/maximum
- kritieke waarden
- functies van meerdere variabelen
- partiële afgeleide
- regressielijn

Opgaven

14. Bepaal voor de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \exp(x)$ de lokale minima en maxima.

15. Bepaal voor ieder van de volgende functies de lokale minima en maxima op het gegeven domein (let ook op de randpunten).

    (i) $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}, x \mapsto 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$,

    (ii) $f : [-\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^5+x+1}$,

    (iii) $f : [-1, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1}$,

    (iv) $f : [0, 5] \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$.

16. Vind lokale en globale minima en maxima voor de volgende functies (die op $\mathbb{R}$ met uitzondering van eventuele nulpunten van de noemer gedefinieerd zijn):

    (i) $f(x) := x^3 - x$, (ii) $f(x) := x^4 - 2x^2$, (iii) $f(x) := \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$,

    (iv) $f(x) := x^3 - x^2 - 8x + 1$, (v) $f(x) := x^5 + x + 1$, (vi) $f(x) := 2 + x^{\frac{2}{3}}$,

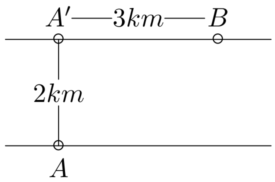
    (vii) $f(x) := x^{\frac{4}{3}}(1 - x)^{\frac{1}{3}}$, (viii) $f(x) := x^3 + \dfrac{48}{x}$,

17. Zij $a > 0$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

    $$f(x) := \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - a|}.$$

    Bepaal het absolute maximum van f. (Hint: Bepaal de afgeleide apart op de deelintervallen $(-\infty, 0)$, $(0, a)$ en (a, ∞).

18. Iemand wil van een punt A aan de oever van een $2km$ breed kanaal naar een punt B aan de andere oever van het kanaal. Het punt A' rechtstreeks tegenover A aan het andere oever heeft een afstand van $3km$ van het punt B. Op het kanaal kan hij met een snelheid van $3km/h$ roeien, aan land loopt hij met een snelheid van $6km/h$. Wat is de snelste weg om van A naar B te komen?

19. Bepaal de hoogte en het volume van de grootste cilinder (qua volume) die in een kogel van straal r past.

20. Een ellips wordt beschreven door de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. De parameters a en b geven de lengten van de twee halfassen van de ellips. Voor $a = b = 1$ is de ellips een cirkel. We bekijken rechthoeken met zijden evenwijdig aan de x- en y-assen, die in de ellips liggen. Bepaal de afmetingen van de rechthoeken: (a) met maximale oppervlakte, (b) met maximale omvang, die in de ellips passen.

21. Een bal wordt uit een hoogte h_0 met snelheid v_0 verticaal omhoog of omlaag gegooid (als $v_0 > 0$ wordt hij omhoog gegooid, als $v_0 < 0$ omlaag). De hoogte van de bal wordt (afhankelijk van de tijd) door een functie $h(t)$ beschreven, voor de snelheid $v(t)$ geldt $v(t) = h'(t)$ en de acceleratie $a(t) = v'(t) = -g$ is constant (we nemen de acceleratie met een minteken, omdat deze omlaag gericht is, de waarde van g is ongeveer $9.81m/s^2$).

(i) Toon aan dat $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$.

(ii) Wat is de maximale hoogte die de bal bereikt?

(iii) Wat is de snelheid waarmee de bal de grond raakt?

22. Baron Münchhausen wordt op zijn kogel met een hoek van α tegen de grond en een snelheid van v afgevuurd. Zijn traject wordt beschreven door $(x, y) = (v\cos(\alpha)t, v\sin(\alpha)t - \frac{g}{2}t^2)$, waarbij g de acceleratie door de aantrekking van de aarde is (dus ongeveer $9.81\frac{m}{s^2}$).

    (i) Na welke tijd t komt de Baron weer naar de grond?

    (ii) Bepaal de hoek α zo dat de Baron zo ver als mogelijk op zijn kogel kan rijden.

    (iii) Als de Baron van een hogere punt (bijvoorbeeld zijn dakterras) wordt afgevuurd, moet de optimale hoek α dan groter of kleiner gekozen worden?

23. Bepaal voor elk van de volgende functies de partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ naar x en naar y:

    (i) $f(x, y) := \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$,

    (ii) $f(x, y) := \sin(2x + 3y)$,

    (iii) $f(x, y) := \arctan(x^2y) + \arctan(xy^2)$,

    (iv) $f(x, y) := \exp(x^2 + xy)$.

24. Een ellipsoïd is gegeven door de vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (voor $a = b = c = r$ geeft dit een kogel van straal r). Bepaal het maximale volume van een doos die in het ellipsoïd past.

Les 4 Primitieve en integraal

Een motivatie om naar de afgeleide $f'(x)$ van een functie $f(x)$ te kijken is het bepalen van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van $f(x)$. Uiteindelijk hebben we de afgeleide gedefinieerd als de limiet

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

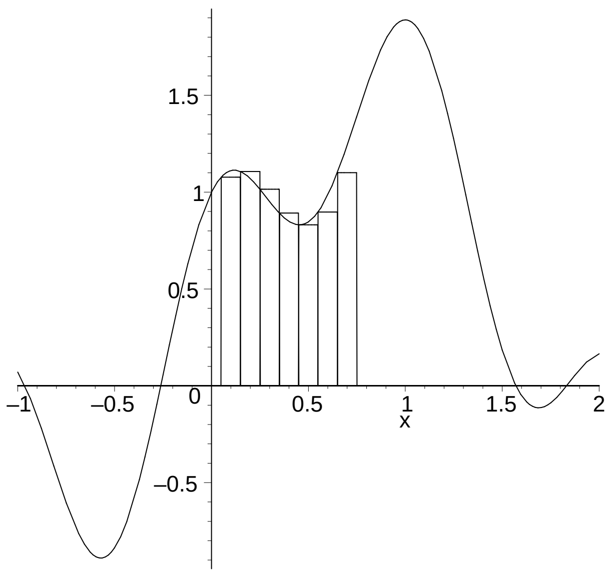
als deze bestaat. De afgeleide $f'(x)$ geeft informatie over het stijgen en dalen van $f(x)$ en is daarom ook een belangrijk hulpmiddel bij het opsporen van minima en maxima van de functie $f(x)$.

Het is nu een (min of meer) voor de hand liggende vraag, of we ook aan de omgekeerde overgang van $f'(x)$ naar $f(x)$ iets hebben. Met andere woorden: Stel, $F(x)$ is een functie zo dat $F'(x) = f(x)$, wat voor informatie geeft dan de functie $F(x)$? Er geldt in dit geval

$$f(x) = F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \text{ en dus } f(x) \cdot h \approx F(x+h) - F(x)$$

en dus benadert het verschil $F(x+h) - F(x)$ de oppervlakte van de rechthoek met hoogte $f(x)$ en breedte h. We kunnen dus verwachten, dat de functie $F(x)$ iets met de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ de maken heeft. Preciezer:

Om de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ tussen a en b te bepalen, delen we het interval $[a, b]$ in N even grote delen, deze hebben dus breedte $h = \frac{b-a}{N}$. De oppervlakte O onder de grafiek wordt dan benaderd door de som van de oppervlakten van de N rechthoeken van hoogte $f(a + jh)$ en breedte h voor $j = 0, 1, \ldots, N - 1$.



Figuur A.23: Benadering van de oppervlakte onder een grafiek door rechthoeken

We hebben dus $O \approx f(a) \cdot h + f(a+h) \cdot h + \ldots + f(a+(N-1)h) \cdot h$. Maar boven hebben we gezien dat $f(x) \cdot h \approx F(x+h) - F(x)$, en hieruit volgt:

$$\begin{aligned} O &\approx (F(a+h) - F(a)) + (F(a+2h) - F(a+h)) + \ldots \\ &\ldots + (F(a+(N-1)h) - F(a+(N-2)h)) + (F(b) - F(a+(N-1)h)) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Het lijkt dus, dat we een functie $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$ kunnen gebruiken om de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ te bepalen.

4.1 De oppervlakte onder een grafiek

We hebben net gezien dat een functie $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$ blijkbaar iets met de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ te maken heeft.

We gaan nu omgekeerd na dat we uit twee zeer voor de hand liggende eisen aan een functie, die de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ aangeeft, kunnen concluderen dat deze functie noodzakelijk de afgeleide $f(x)$ heeft.

Voor een functie $f(x)$ zij $O_f(a,b)$ de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ in het interval $[a,b]$. Onze twee eisen zijn als volgt:

(i) $O_f(a,b) + O_f(b,c) = O_f(a,c)$, dus het opsplitsen van een interval in twee deelintervallen verandert de oppervlakte niet.

(ii) Als $m \leq f(x) \leq M$ voor alle $x \in [a,b]$ dan is $m(b-a) \leq O_f(a,b)$ en $O_f(a,b) \leq M(b-a)$, dus de oppervlakte ligt tussen de oppervlakten van de rechthoeken met hoogte het minimum en het maximum van alle functiewaarden.

Omdat een lijn geen oppervlakte heeft, geldt $O_f(a,a) = 0$ en met eis (i) volgt hieruit dat $O_f(a,b) = -O_f(b,a)$. Dit betekent dat een oppervlakte die we van rechts naar links aangeven de negatieve waarde van dezelfde oppervlakte met de gewone oriëntatie (van links naar rechts) heeft.

Ook voor een functie met $f(x) < 0$, dus met een grafiek onder de x-as, krijgen we een negatieve oppervlakte, want in eis (ii) kunnen we $M = 0$ kiezen. Het is afhankelijk van de toepassing of we inderdaad de oppervlakten onder de x-as negatief of positief willen tellen, in het laatste geval moeten we dan naar de functie $g(x) := |f(x)|$ in plaats van $f(x)$ kijken.

Als we het interval $[a,b]$ onderverdelen in N deelintervallen $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$, $[x_N, x_{N+1}]$ met $x_1 = a$ en $x_{N+1} = b$, dan geldt volgens eis (i):

$$O_f(a,b) = O_f(x_1, x_2) + O_f(x_2, x_3) + \ldots + O_f(x_N, x_{N+1}).$$

Als we nu aannemen dat $f(x)$ op $[a,b]$ continu is, weten we dat binnen een (klein) interval $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ om x_i de functiewaarden $f(x)$ in het interval $(f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon)$ liggen.

Voor een gekozen $\varepsilon > 0$ geldt dus, dat we de onderverdeling in deelintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ zo fijn kunnen kiezen dat $|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$ voor alle $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Dan geldt volgens eis (ii) dat

$$(f(x_i) - \varepsilon)(x_{i+1} - x_i) \le O_f(x_i, x_{i+1}) \le (f(x_i) + \varepsilon)(x_{i+1} - x_i)$$

want $x_{i+1} - x_i$ is de breedte van het interval en $m = f(x_i) - \varepsilon$ is een ondergrens en $M = f(x_i) + \varepsilon$ een bovengrens voor de functiewaarden in het interval $[x_i, x_{i+1}]$. Er geldt dus

$$(f(x_i) - \varepsilon) \le \frac{O_f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} \le (f(x_i) + \varepsilon).$$

Door de limiet $\varepsilon \to 0$ te nemen, zien we dat de limiet

$$\lim_{h \to 0} \frac{O_f(x_i, x_i + h)}{h}$$

bestaat en de waarde $f(x_i)$ heeft. In het bijzonder kunnen we nu voor een vast gekozen punt x_0 in het interval $[a, b]$ een functie F definiëren door

$$F(x) := O_f(x_0, x)$$

Dan geldt $F(x + h) - F(x) = O_f(x_0, x + h) - O_f(x_0, x) = O_f(x, x + h)$ en dus is $F(x)$ een differentieerbare functie met afgeleide $f(x)$. We hebben dus gezien dat de oppervlakte $O_f(a, b)$ gegeven is door

$$O_f(a, b) = F(b) - F(a) \text{ voor een functie } F(x) \text{ met } F'(x) = f(x).$$

Stel nu we hebben een tweede functie $G(x)$ met $G'(x) = f(x)$, dan geldt $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, dus is $(F - G)(x)$ een constante functie en dus $G(x) = F(x) + C$ voor een constante $C \in \mathbb{R}$. Maar dan is $G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$ en dus kunnen we de oppervlakte $O_f(a, b)$ ook met behulp van de functie $G(x)$ aangeven. We hebben dus aangetoond:

A.13 Stelling *De oppervlakte onder de grafiek van een continue functie $f(x)$ in het interval $[a, b]$ is $F(b) - F(a)$ voor een functie $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$. Dit is onafhankelijk van de keuze van de functie $F(x)$.*

A.14 Definitie Een functie $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$ heet een *primitieve* van $f(x)$.

4.2 De primitieve en de integraal

Als $F(x)$ een primitieve van $f(x)$ dan is ook $F(x) + C$ voor een constante $C \in \mathbb{R}$ een primitieve van $f(x)$, dus is de primitieve niet eenduidig bepaald. Aan de andere kant verschillen twee primitieve functies van $f(x)$ alleen maar een constante, daarom wordt de primitieve van een functie vaak met $F(x) + C$ aangegeven, waarbij C een niet verder bepaalde constante is.

We hebben boven gezien dat een continue functie altijd een primitieve heeft en dat deze een differentieerbare functie is. Als een functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu is behalve in een punt $c \in [a, b]$, kunnen we een differentieerbare primitieve $F_1(x)$

op het interval $[a, c]$ en een differentieerbare primitieve $F_2(x)$ op het interval $[c, b]$ vinden. Dan is de functie

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & \text{als } x \leq c \\ F_2(x) - F_2(c) + F_1(c) & \text{als } x > c \end{cases}$$

een *continue* functie op $[a, b]$ (want voor $x \to c$ geldt $F_2(x) - F_2(c) + F_1(c) \to F_1(c)$) en $F(x)$ is voor $x \neq c$ differentieerbaar met $F'(x) = f(x)$.

Op deze manier kunnen we continue primitieven voor alle functies vinden, die alleen maar in geïsoleerde punten sprongen hebben.

> Voor functies $f(x)$ die in willekeurig kleine intervallen in oneindig veel punten niet continu zijn, is een iets ingewikkeldere definitie van een primitieve nodig, maar dit soort exotische functies gaan we hier niet verder bekijken.

De gebruikelijke notatie voor de primitieve $F(x)$ van $f(x)$ is de *integraal*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \quad \text{of} \quad F(x) = \int f(x)\, dx.$$

De eerste vorm (met grenzen) noemen we ook de *bepaalde integraal* de tweede (zonder grenzen) de *onbepaalde integraal*. Bij de onbepaalde integraal identificeren we primitieven die een constante verschillen.

> De notatie van de integraal is ingevoerd door Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) die parallel met Isaac Newton (1643-1727) de cruciale principes van de calculus heeft ontwikkeld. De notatie is afgeleid van de betekenis van de primitieve voor de oppervlakte onder de grafiek van een functie:
>
> $$\int_a^b f(x)\, dx = O_f(a, b) = \sum_{i=1}^{N} O_f(x_i, x_{i+1}) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$
> $$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i.$$
>
> De Σ is de Griekse letter S en staat voor *som* (of *Summe*), het teken $\int$ voor de integraal lijkt op een uitgerekte S. Om aan te duiden dat er een limiet voor $\Delta x_i \to 0$ plaats vindt, wordt het symbool dx geschreven. Dit is net als $\frac{\partial}{\partial x_i}$ in de partiële afgeleide een formeel symbool dat aangeeft welke variabele gevarieerd wordt.

Uit de definitie van de primitieve via de oppervlakte onder een grafiek en uit de eigenschappen van de afgeleide kunnen we rechtstreeks een aantal belangrijke rekenregels voor de integraal afleiden:

(i) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx;$

(ii) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0;$

(iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$

(iv) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$

(v) $\displaystyle\int_a^b (cf)(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$ voor $c \in \mathbb{R}$

Waarschuwing: Bij het afleiden van functies hebben we gezien dat er regels bestaan zo dat we de afgeleide $f'(x)$ van een functie $f(x)$ die uit elementaire functies (veelterm-functies, exponentiële functie, logaritme, trigonometrische functies en hun inverse functies) opgebouwd is, weer als combinatie van elementaire functies kunnen schrijven. Voor de integraal geldt dit niet! Er zijn functies $f(x)$ zo dat we de integraal $\int f(x)\,dx$ niet als combinatie van elementaire functies kunnen schrijven. Dit ligt niet eraan dat we te stom zijn om zo'n functie te vinden maar het is mogelijk te bewijzen dat zo'n functie niet bestaat.

Een voorbeeld hiervoor is de functie $f(x) := \exp(-x^2) = e^{-x^2}$ die een belangrijke rol in de statistiek speelt (bijvoorbeeld bij de normale verdeling). Deze functie is continu (zelfs differentieerbaar), maar de enige manier om de primitieve $F(x)$ van deze functie te schrijven is de integraal $F(x) = \int \exp(-x^2)\,dx$.

Een ingewikkelder voorbeeld is de Γ-functie $\Gamma(x) := \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1}\,dt$. Ook deze functie is niet zonder integraal te schrijven. Er laat zich wel aantonen dat $\Gamma(n) = (n-1)!$ voor $n \in \mathbb{N}$, dus is de Γ-functie een soort interpolatie voor de faculteit van natuurlijke getallen.

Hoofdstelling van de Calculus

Het lijkt een flauwe opmerking dat een functie $f(x)$ een primitieve voor zijn afgeleide $f'(x)$ is. Maar dit geeft juist het fundamentele verband tussen integreren en afleiden, namelijk dat het integreren de omkering van het afleiden is, want er geldt

$$\int f'(x)\,dx = f(x).$$

Deze formule staat bekend als de *Hoofdstelling van de Calculus*.

Met behulp van de Hoofstelling van de Calculus kunnen we een aantal integralen nu al berekenen, omdat we bij het differentiëren gezien hebben, dat zekere functies 'eenvoudige' afgeleiden hebben. Als een functie $F(x)$ de afgeleide $F'(x) = f(x)$ heeft, dan is uiteraard $F(x)$ een primitieve van $f(x)$ en de integraal over $f(x)$ is juist $F(x)$. Een paar belangrijke voorbeelden zijn:

(i) $\displaystyle (x^{c+1})' = (c+1)x^c \Rightarrow \int x^c\,dx = \frac{1}{c+1}x^{c+1}$ voor $c \neq -1$, $c \in \mathbb{R}$;

(ii) $(\exp(x))' = \exp(x) \Rightarrow \int \exp(x)\, dx = \exp(x)$;

(iii) $(\log(x))' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x}\, dx = \log(x)$;

(iv) $(\cos(x))' = -\sin(x) \Rightarrow \int \sin(x)\, dx = -\cos(x)$;

(v) $(\sin(x))' = \cos(x) \Rightarrow \int \cos(x)\, dx = \sin(x)$;

(vi) $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)$;

(vii) $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x)$.

Soms verschilt een functies maar een beetje (bijvoorbeeld door een constante) van een functie waar je de integraal al van kent. Dan laat zich vaak ook de integraal van de veranderde functie makkelijk berekenen. Bijvoorbeeld heeft $\int \cos(ax)\, dx$ voor een constante a zeker iets met $\sin(ax)$ te maken, maar $\sin(ax)' = a\cos(ax)$, dus moet je nog met $\frac{1}{a}$ vermenigvuldigen en krijgt zo

$$\int \cos(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax).$$

Een iets slimmer trucje is bij de integraal $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$ nodig. Bij de primitieve speelt zeker de *arcussinus* een rol, en als je $\arcsin(bx)$ afleidt, krijg je (met behulp van de kettingregel): $\arcsin(bx)' = \frac{b}{\sqrt{1-(bx)^2}} = \frac{b}{b\sqrt{\frac{1}{b^2}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2}-x^2}}$. We moeten dus $b = \frac{1}{a}$ kiezen, dit geeft

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \arcsin(\frac{x}{a}).$$

Voorbeeld:

We gaan met behulp van de integraal de oppervlakte van een cirkel met straal 1 bepalen. De punten (x, y) op de cirkel voldoen aan $x^2 + y^2 = 1$, dus is de bovenhelft van de cirkel de grafiek van $f(x) := \sqrt{1-x^2}$ en de oppervlakte onder deze grafiek op het interval $[0, 1]$ is juist een kwartcirkel. De oppervlakte van de cirkel vinden we dus als

$$4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

We zullen later nog een slimme manier zien hoe we deze integraal kunnen berekenen, maar door een goede gok te doen, kunnen we hem ook meteen oplossen.

Er geldt

$$\begin{aligned}(x \cdot \sqrt{1-x^2})' &= \sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 2\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

We brengen nu $2\sqrt{1-x^2}$ naar één zijde en delen door 2, dit geeft

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}((x \cdot \sqrt{1-x^2})' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$$

en volgens de Hoofdstelling van de Calculus volgt hieruit:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx) = \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)).$$

Hiermee krijgen we voor de bepaalde integraal

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(1 \cdot 0 + \arcsin(1)) - \frac{1}{2}(0 \cdot 1 + \arcsin(0)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

en we vinden (niet onverwacht) π als oppervlakte van een cirkel met straal 1.

Een handige notatie om integralen kort door hun primitieven te beschrijven is de volgende: Als $F(x)$ een primitieve van $f(x)$ is, dus $F'(x) = f(x)$, dan schrijven we

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

4.3 Partieel integreren

Omdat de integraal de omkering van de afgeleide is, kunnen we verwachten dat ook uit de productregel iets nuttigs voor het primitiveren volgt. De productregel voor het afleiden zegt dat

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

en door deze vergelijking te primitiveren (dat wil zeggen op beide zijden de integraal te nemen), krijgen we

$$f(x)\, g(x)\big|_a^b = \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx.$$

Door één van de integralen naar de andere kant te brengen volgt hieruit de regel voor de *partiële integratie*:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x)\big|_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx,$$
$$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx.$$

De grap bij deze formule is dat we sommige functies eenvoudig kunnen primitiveren en dat een integraal misschien eenvoudiger wordt als we een deel primitiveren en de rest afleiden.

Helaas zijn er geen regels hoe we een functie als product van twee functies moeten schrijven en welke van de twee delen we als $f'(x)$ en welke we als $g(x)$ moeten kiezen. Dit is een kwestie van oefening en ervaring en soms is het verstandig de verschillende mogelijkheden te proberen. Meestal zijn er namelijk niet zo veel mogelijkheden om een functie als product van twee functies te schrijven en we moeten dus alleen maar kiezen of we een factor als $f'(x)$ of als $g(x)$ willen gebruiken.

Een paar typische toepassingen zijn de beste manier om te zien hoe de partiële integratie werkt:

$$\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\exp(x)}_{f'(x)}\, dx = x\exp(x) - \int \exp(x)\, dx = (x-1)\exp(x).$$

In het volgende voorbeeld moet men eerst iets kunstmatig een product van twee functies produceren:

$$\int \log(x)\, dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\log(x)}_{g(x)}\, dx = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\, dx = x\log(x) - x.$$

Soms lukt het bij de partiële integratie, de oorspronkelijke integraal op de rechterzijde terug te vinden, maar met een andere coëfficiënt. Dit is in het bijzonder bij functies met $\sin(x)$ of $\cos(x)$ vaak het geval, ook al is het hierbij soms nodig twee keer partieel te integreren om gebruik van de relatie $\sin''(x) = -\sin(x)$ te maken. Twee typische voorbeelden hiervoor zijn:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2(x)\, dx &= \int \underbrace{\sin(x)}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}\, dx = -\cos(x)\sin(x) - \int -\cos(x)\cos(x)\, dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int (1-\sin^2(x))\, dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + \int 1\, dx - \int \sin^2(x)\, dx \\
&= -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin^2(x)\, dx \\
\Rightarrow 2\int \sin^2(x)\, dx &= -\cos(x)\sin(x) + x \\
\Rightarrow \int \sin^2(x)\, dx &= \frac{1}{2}(-\cos(x)\sin(x) + x)
\end{aligned}$$

en als voorbeeld met twee keer partieel integreren:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\exp(x)}_{f'(x)} \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}\, dx &= \exp(x)\sin(x) - \int \underbrace{\exp(x)}_{f'(x)} \underbrace{\cos(x))}_{g(x)}\, dx \\
&= \exp(x)\sin(x) - \exp(x)\cos(x) - \int \exp(x)\sin(x)\, dx \\
\Rightarrow \int \exp(x)\sin(x)\, dx &= \frac{1}{2}(\exp(x)\sin(x) - \exp(x)\cos(x)).
\end{aligned}$$

Belangrijke begrippen in deze les

- oppervlakte onder een grafiek
- primitieve van een functie
- integraal van een functie
- Hoofdstelling van de calculus
- partieel integreren

Opgaven

25. Bepaal primitieven voor de volgende functies:

$$\text{(i) } f(x) := a^x \text{ met } a > 0, a \neq 1, \qquad \text{(ii) } f(x) := \frac{1}{1+x}, \qquad \text{(iii) } f(x) := \frac{x}{1+x},$$

$$\text{(iv) } f(x) := \frac{1}{a^2+x^2} \text{ met } a \neq 0, \qquad \text{(v) } f(x) := \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

26. Vind primitieven van de volgende functies:

$$\text{(i) } f(x) := \frac{a^x}{b^x}, \qquad \text{(ii) } f(x) := \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}, \qquad \text{(iii) } f(x) := \frac{1}{1+\sin(x)}.$$

27. Bereken de volgende integralen:

$$\int_0^1 (1-x)^n \, dx \text{ voor } n \in \mathbb{N} \quad \text{en} \quad \int_0^\pi \sin(mx) \, dx \text{ voor } m \in \mathbb{Z}.$$

28. Bepaal de oppervlakte van het gebied dat door de grafieken van $f(x) := x^2$ en $g(x) := \frac{x^2}{2} + 2$ wordt ingesloten (dus het gebied tussen de grafieken op het interval tussen hun snijpunten).

29. Bepaal de volgende integralen door partiële integratie:

$$\text{(i) } \int x \sin(x) \, dx, \quad \text{(ii) } \int x^2 \exp(x) \, dx, \quad \text{(iii) } \int \sqrt{x} \log(x) \, dx, \quad \text{(iv) } \int \log^2(x) \, dx,$$

$$\text{(v) } \int \log^3(x) \, dx, \quad \text{(vi) } \int \cos(\log(x)) \, dx, \quad \text{(vii) } \int x \arctan(x) \, dx.$$

30. Bepaal de volgende integralen (bijvoorbeeld door partiële integratie):

$$\text{(i) } \int \cos^3(x) \, dx, \quad \text{(ii) } \int x^3 \exp(x^2) \, dx, \quad \text{(iii) } \int x^2 \sin(x) \, dx, \quad \text{(iv) } \int x \log^2(x) \, dx.$$

Les 5 Substitutie

We hebben gezien dat de productregel voor het differentiëren aanleiding geeft tot een manier, om voor zekere functies een primitieve te vinden, namelijk door partiële integratie. Een regel voor het differentiëren die we bij het integreren nog niet hebben gebruikt is de kettingregel en het zou geen verrassing zijn dat we ook hier iets aan hebben dat bij het primitiveren helpt.

Als we bijvoorbeeld naar de functie $F(x) := \exp(x^2)$ kijken, dan geldt $F'(x) = 2x\,\exp(x^2)$, dus kunnen we de integraal $\int x\,\exp(x^2)\,dx$ bepalen door

$$\int_a^b x\,\exp(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\exp(x^2)\big|_a^b = \frac{1}{2}(\exp(b^2) - \exp(a^2)).$$

Algemeen zien we dat we een integraal van de vorm $\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\,dx$ kunnen oplossen, want volgens de kettingregel is $g'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x))'$ en hieruit volgt met de Hoofdstelling van de Calculus dat

$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = \int g(f(x))'\,dx = g(f(x)).$$

Deze formule geeft aan hoe we door omkeren van de kettingregel voor geschikte functies een primitieve kunnen vinden. Maar we zullen zien dat we dit trucje nog veel slimmer kunnen toepassen, in het bijzonder ook als we niet rechtstreeks een functie van de vorm $g'(f(x)) \cdot f'(x)$ in een integraal vinden.

Om dit op een handige manier te kunnen beschrijven, gaan we eerst nog eens de notatie van Leibniz voor de afgeleide nader bekijken.

5.1 Rekenen met differentialen

De afgeleide hebben we gedefinieerd als limiet van de quotiënt $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Als we met Δ een (klein) verschil van waarden noteren, kunnen we dit ook schrijven als $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Om nu de limiet $\Delta x \to 0$ duidelijk te maken, vervangen we de Δ door een d, dit geeft dus

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}.$$

Tot hier toe hebben we alleen maar de notatie veranderd en zien $\frac{df}{dx}$ als een formeel symbool, dat we als *'df naar dx'* lezen. Inderdaad hebben we deze notatie al bij de partiële afgeleide $\frac{\partial f}{\partial x}$ gebruikt. Maar we kunnen $\frac{df}{dx}$ ook als breuk zien en met teller en noemer (bijna altijd) net zo rekenen als bij breuken. We noemen de uitdrukking dx dan een *differentiaal.*

Het belangrijke punt voor het primitiveren is dat in de integraal $\int f(x)\,dx$ het symbool dx inderdaad een differentiaal is. De samenhang is als volgt:

Laat $F(x)$ een primitieve van de functie $f(x)$ zijn, dan is $F'(x) = \frac{dF}{dx} = f(x)$ en dus $dF(x) = f(x)\,dx$. Als we nu $dF(x)$ weer als limiet van $\Delta F(x)$ zien, dan is de integraal $\int dF(x)$ de limiet van de som $\sum \Delta F(x)$ en dus gelijk aan $F(x)$.

Op deze manier vinden we de ons al bekende formule voor de (onbepaalde) integraal terug:

$$\int f(x)\,dx = F(x) = \int dF(x).$$

> **Merk op:** Dat we met differentialen net zo mogen rekenen als met breuken is helemaal niet vanzelfsprekend, omdat we het impliciet altijd met limieten te maken hebben. Voor continue functies laat zich aantonen, dat het inderdaad mag, terwijl er gevallen van niet-continue functies zijn, waar het mis gaat. In de wiskunde wordt er veel aandacht aan besteed, precies te beschrijven wanneer het rekenen met differentialen wel goed gaat en wanneer niet.

Als we de productregel en kettingregel voor het afleiden nu nog eens met behulp van differentialen opschrijven, zien ze er zo uit:

$$\frac{d(fg)}{dx} = (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \frac{df}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg}{dx}$$
$$\frac{d(g\circ f)}{dx} = (g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x) = \frac{d(g\circ f)}{df}\cdot\frac{df}{dx}$$

In de kettingregel lijkt het als of we de df in de teller en noemer tegen elkaar kunnen schrappen. Dit weerspiegelt hoe we de kettingregel hebben 'bewezen': Toen hebben we met een voedzame 1 de quotiënt $\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}$ geschreven als $\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en de limiet hiervan is precies wat we net met differentialen hebben opgeschreven.

Toepassing: De lengte van een kromme

Om aan de notatie met differentialen te wennen bekijken we als toepassing het bepalen van de lengte van een kromme.

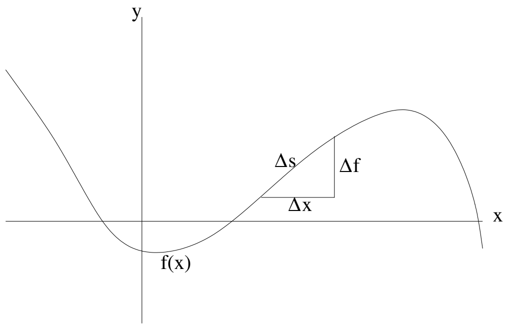
Stel we hebben een functie $f(x)$ en we willen weten hoe lang de grafiek van deze functie tussen de punten a en b is. Hiervoor delen we het interval in kleine deelintervallen Δx die zo klein zijn dat de grafiek op zo'n interval goed door een rechte lijn benaderd wordt. De lengte van de kromme vinden we nu (zo als in Figuur A.24 geschetst) als de som van de lengten Δs van de lijnstukken op de deelintervallen Δx.

Volgens de stelling van Pythagoras geldt $(\Delta s)^2 = (\Delta f)^2 + (\Delta x)^2$, dus is

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta f)^2 + (\Delta x)^2} = \Delta x\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)^2 + 1}.$$

Als we nu de lengte van de deelintervallen Δx naar 0 laten gaan, moeten we de Δ's door differentialen vervangen, dit geeft

$$ds = dx\cdot\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + 1} = \sqrt{f'(x)^2+1}\,dx.$$



Figuur A.24: Berekening van de lengte van een kromme

Omdat de lengte van de kromme de som over de lijnstukken Δs en dus (in de limiet) de integraal over de differentialen ds is, volgt voor de lengte s van de grafiek van $f(x)$ tussen a en b:

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx.$$

Helaas is deze integraal (vanwege de wortel) slechts voor weinig functies $f(x)$ makkelijk op te lossen. We zullen hier twee voorbeelden bekijken.

Voorbeeld 1: Cirkelboog

Een geval waar de lengte van een kromme op deze manier makkelijk bepaald kan worden is de cirkel, die door de functie

$$f(x) := \sqrt{1 - x^2}$$

beschreven wordt. Als we voor deze functie op het interval $[0, 1]$ de lengte van de grafiek bepalen, zouden we als resultaat de lengte van een kwartcirkel, dus $\frac{\pi}{2}$ verwachten. Er geldt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, dus geldt voor de functie binnen de integraal:

$$\sqrt{f'(x)^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{1 - x^2} + 1} = \sqrt{\frac{x^2 + (1 - x^2)}{1 - x^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

en hieruit krijgen we voor de lengte s van de kwartcirkel:

$$s = \int_0^1 \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \arcsin(x) \mid_0^1 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Voorbeeld 2: Parabool

Helaas wordt al voor de gewone parabool $f(x) = x^2$ met $f'(x) = 2x$ het berekenen van de lengte van de grafiek een hele klus waar we een hele rij van kleine trucjes moeten toepassen. Met behulp van partiële integratie vinden we:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{f'(x)^2+1}\,dx &= \int \sqrt{4x^2+1}\,dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{4x^2+1}}_{g(x)}\,dx \\
&= x\sqrt{4x^2+1} - \int x\,\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}\,dx \\
&= x\sqrt{4x^2+1} - \int \frac{(4x^2+1)-1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx \\
&= x\sqrt{4x^2+1} - \int \sqrt{4x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{4x^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx\right)
\end{aligned}$$

waarbij in de laatste stap de integraal $\int \sqrt{4x^2+1}\,dx$ naar de linke zijde gebracht en vervolgens door 2 gedeeld wordt.

Om de verblijvende integraal op te lossen, moeten we ons aan de inverse functies van de hyperbolische functies herinneren, er geldt

$$\begin{aligned}
(\operatorname{arsinh} 2x)' = \frac{2}{\sqrt{4x^2+1}} \Longrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,dx &= \frac{1}{4}\operatorname{arsinh} 2x \\
&= \frac{1}{4}\log(2x+\sqrt{4x^2+1})
\end{aligned}$$

want in de tweede les hadden we ook gezien, dat $\operatorname{arsinh} x = \log(x+\sqrt{x^2+1})$.

Als we alles combineren, vinden we uiteindelijk als lengte s van de standaardparabool $f(x) = x^2$ op het interval $[0, x]$:

$$s = \frac{1}{2}\,x\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{4}\log(2x+\sqrt{4x^2+1}),$$

een formule die niet helemaal voor de hand liggend blijkt.

5.2 De substitutieregel

Er zijn twee manieren hoe we van de kettingregel gebruik kunnen maken om de primitieve van een functie te vinden. Bij de eerste (meer directe) manier vervangen we een functie $f(x)$ door een nieuwe variabel u, als we ook $f'(x)$ in de integraal kunnen vinden. Bij de tweede manier gaat het andersom, we vervangen x door een functie $f(u)$ en moeten dan ook $f'(u)$ toevoegen, waardoor soms een eenvoudigere integraal ontstaat.

Type A: Vervangen van $f(x)$ door u

Stel dat $g(x)$ een functie is waarvan we een primitieve $G(x)$ kennen, dus $G'(x) = g(x)$. Als we nu een integraal van de vorm $\int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx$ vinden, dan kunnen we dit oplossen door naar de functie $F(x) := G(f(x))$ te kijken, want dan geldt

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x), \text{ dus } \int g(f(x)) \cdot f'(x)\,dx = F(x)$$

d.w.z. $F(x) = G(f(x))$ is een primitieve van $g(f(x)) \cdot f'(x)$.

Met behulp van differentialen kunnen we hetzelfde zo schrijven:

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\ dx = \int \frac{dG}{df} \cdot \frac{df}{dx}\ dx = G(f(x)) = F(x).$$

Het lijkt weer als of we de differentialen df en dx kunnen schrappen, maar we moeten wel opletten dat we G in $f(x)$ evalueren omdat we G naar f afleiden.

Nog iets anders uitgedrukt, gebeurt hier het volgende:

We definiëren $u := f(x)$, dan is u natuurlijk een functie van x en er geldt $\frac{du}{dx} = u'(x) = f'(x)$ en door vermenigvuldigen met dx vinden we $du = f'(x)\,dx$. Voor de integraal geldt dus

$$\int g(f(x))f'(x)\ dx = \int g(u)\ du = G(u) = G(f(x)) = F(x).$$

Omdat we $f(x)$ door u hebben *vervangen*, noemen we dit een *substitutie*. Het recept voor dit type van substitutie is dus:

(1) Vervang een functie $f(x)$ door u en $f'(x)\,dx$ door du. De integraal mag nu geen x meer bevatten.

(2) Vind een primitieve $G(u)$ voor $g(u)$.

(3) Vervang u in $G(u)$ door $f(x)$ om zo de primitieve $F(x) = G(f(x))$ te vinden.

Tot nu toe hebben we ons met een onbepaalde integraal (zonder grenzen) bemoeid. Wat gebeurt er nu bij de substitutie voor een bepaalde integraal met grenzen a en b? Als x van a tot b loopt, dan loopt $f(x)$ van $f(a)$ tot $f(b)$, dus loopt u van $f(a)$ tot $f(b)$. We hebben dus

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\ dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u)\ du = G(u)\big|_{f(a)}^{f(b)} = (G \circ f)(x))\big|_a^b = F(x)\big|_a^b$$

d.w.z. nadat we $f(x)$ voor u terug hebben gesubstitueerd, zijn de grenzen weer hetzelfde als in het begin.

De beste manier, om de substitutie te begrijpen is naar een aantal voorbeelden te kijken. Daarbij komen ook verschillende standaard-trucjes naar voren.

(i) $\int \sin^5(x)\cos(x)\ dx$:
We kiezen $u = f(x) = \sin(x)$, dan is $du = \cos(x)\,dx$. Er geldt dus:
$\int \sin^5(x)\cos(x)\ dx = \int u^5\ du = \frac{1}{6}u^6 = \frac{1}{6}\sin^6(x)$.

(ii) $\int \frac{x}{1+x^2}\ dx$:
We zien dat de teller (tot op een factor na) de afgeleide van de noemer is, dus kiezen we $u = f(x) = 1 + x^2$, dan is $du = 2x\,dx$. Dan geldt:
$\int \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\ du = \frac{1}{2}\log(u) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$.

(iii) $\int \tan(x)\ dx$:
Dit is niet helemaal voor de hand liggend, maar omdat $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ is, kunnen we $u = f(x) = \cos(x)$ kiezen, dan is $du = -\sin(x)\,dx$. We hebben dus:
$\int \tan(x)\ dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ dx = \int \frac{-1}{u}\ du = -\log(u) = -\log(\cos(x))$.

(iv) $\int \frac{1}{x\log(x)}\ dx$:
Ook hier is er niet zo veel keuze, omdat we voor $f(x)$ een functie moeten kiezen, waarvan we ook de afgeleide terug vinden. In dit geval is $u = f(x) = \log(x)$ de voor de hand liggende substitutie, dan is $du = \frac{1}{x}\,dx$. Er geldt dus:
$\int \frac{1}{x\log(x)}\ dx = \int \frac{1}{u}\ du = \log(u) = \log(\log(x))$.

Lineaire substitutie

Een eenvoudige maar belangrijke type van substitutie is het vervangen van een lineaire functie $ax+b$ door u, in het bijzonder het vervangen van een veelvoud ax door u. Voor $u = ax+b$ is $du = a\,dx$, dus is

$$\int f(ax+b)\ dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot a\ dx = \frac{1}{a}\int f(u)\ du.$$

Een voorbeeld hiervoor is de integraal $\int \frac{1}{x^2+c^2}\ dx$. We weten dat $\int \frac{1}{x^2+1}\ dx = \arctan(x)$, maar om dit te kunnen gebruiken, moeten we eerst nog de c^2 kwijt raken. Er geldt $x^2+c^2 = c^2((\frac{x}{c})^2+1)$, dus is $\int \frac{1}{x^2+c^2}\ dx = \frac{1}{c^2}\int \frac{1}{(\frac{x}{c})^2+1}\ dx = \frac{1}{c}\int \frac{\frac{1}{c}}{(\frac{x}{c})^2+1}\ dx$. Voor de substitutie $u = \frac{x}{c}$ is $du = \frac{1}{c}\,dx$, dus geldt

$$\int \frac{1}{x^2+c^2}\ dx = \frac{1}{c}\int \frac{\frac{1}{c}}{(\frac{x}{c})^2+1}\ dx = \frac{1}{c}\int \frac{1}{u^2+1}\ du = \frac{1}{c}\arctan(u) = \frac{1}{c}\arctan(\frac{x}{c}).$$

Type B: Vervangen van x door $f(u)$

Voor het type A van substitutie hadden we nodig dat we naast een functie $f(x)$ (die we door u vervangen) ook de afgeleide $f'(x)$ in de integraal konden vinden. Dit is natuurlijk een bijzonder mooie situatie, maar helaas vaak niet het geval (of tenminste niet makkelijk te zien).

Bij veel integralen is dus een andere aanpak nodig: In plaats van $f(x)$ door u te substitueren, vervangen we x door een (geschikte) functie $f(u)$. In dit geval hebben we $x = f(u)$ en $u = f^{-1}(x)$, waarbij f^{-1} de inverse functie van f is. Er geldt $\frac{dx}{du} = x'(u) = f'(u)$ en dus $dx = f'(u)\,du$. Voor de integraal $\int g(x)\ dx$ volgt hieruit:

$$\int g(x)\ dx = \int g(f(u))\cdot f'(u)\ du.$$

We gebruiken dus in principe de kettingregel in de omgekeerde richting als bij type A.

Stel nu dat $G(u)$ een primitieve is van $g(f(u))\cdot f'(u)$, d.w.z. er geldt $G'(u) = g(f(u)) \cdot f'(u)$. Omdat $f(u) = x$, is $u = f^{-1}(x)$ en we zien door differentiëren dat $G(u) = G(f^{-1}(x))$ een primitieve van $g(x)$ is:

$$\begin{aligned}(G(f^{-1}(x)))' &= G'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = G'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= g(f(f^{-1}(x)))\ f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = g(x).\end{aligned}$$

Het recept voor dit type van substitutie is dus:

(1) Vervang x (overal) door een functie $f(u)$ en dx door $f'(u)\,du$.

(2) Vind een primitieve $G(u)$ voor de nieuwe functie in de integraal.

(3) Vervang u in $G(u)$ door $f^{-1}(x)$ om zo naar de oorspronkelijke integraal terug te komen.

Bij een bepaalde integraal $\int_a^b g(x)\ dx$ loopt x van a tot b, dus loopt ook $f(u)$ van a tot b en dus moet u van $f^{-1}(a)$ tot $f^{-1}(b)$ lopen. Hier zien we ook dat er een beperking voor de functie $f(u)$ bestaat: deze moet op het interval $[f^{-1}(a), f^{-1}(b)]$ een inverse functie hebben, dus $f(u)$ moet of op $[f^{-1}(a), f^{-1}(b)]$ strikt stijgend of dalend zijn. Voor de bepaalde integraal geldt dus

$$\int_a^b g(x)\ dx = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} g(f(u)) \cdot f'(u)\ du.$$

Het zal duidelijk zijn dat we door een minder slimme keuze van $f(u)$ de integraal alleen maar moeilijker maken. De goede keuze van $f(u)$ is een vraag van oefenen, ervaring en soms ook een beetje gokken. Aan de andere kant is er ook vaak niet zo heel veel keuze voor een substitutie, want op een of ander manier moet de afgeleide $f'(u)$ iets in $g(f(u))$ vereenvoudigen.

Voor verschillende typen van integralen zijn er standaard substituties, een paar voorbeelden zullen we nu bekijken.

(i) $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$:
Bij integralen met een wortel en een kwadraat zijn vaak de 'trigonometrische substituties' van toepassing. Wat hierbij gebruikt wordt, is de relatie $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Hierdoor kunnen we vaak de wortel kwijt raken. We kiezen $x = \sin(u)$, dan is $dx = \cos(u)\,du$. Omdat $1 - \sin^2(u) = \cos^2(u)$ wordt de integraal nu

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int \sqrt{1-\sin^2(u)}\ \cos(u)\ du = \int \cos(u)\cos(u)\ du$$

en dit kunnen we (zo als in de vorige les gezien) met partiële integratie oplossen:

$$\begin{aligned}\int \cos^2(u)\ du &= \cos(u)\sin(u) + \int \sin^2(u)\ du \\ &= \cos(u)\sin(u) + \int (1-\cos^2(u))\ du \\ &= \frac{1}{2}(\cos(u)\sin(u) + \int 1\ du) = \frac{1}{2}(\cos(u)\sin(u) + u).\end{aligned}$$

Uit $x = \sin(u)$ volgt $u = \arcsin(x)$ en met $\cos(u) = \sqrt{1 - \sin^2(u)}$ vinden we

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x)).$$

(ii) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx$:
Hier hebben we niet zo veel keuze, om de wortel kwijt te raken moeten we $x = u^2$ kiezen, dan is $dx = 2u\, du$. Dit geeft

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx = \int \frac{u \cdot 2u}{u^2+1}\, du = 2\int (\frac{(u^2+1) - 1}{u^2+1})\, du$$
$$= 2\int (1 - \frac{1}{u^2+1})\, du = 2u - 2\arctan(u).$$

Met $u = \sqrt{x}$ volgt dus

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx = 2\sqrt{x} - 2\arctan(\sqrt{x}).$$

(iii) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\, dx$:
Dit is een voorbeeld van een substitutie waar het niet onmiddellijk duidelijk is dat de substitutie een vereenvoudiging geeft. We willen graag weer de wortel kwijt, daarom proberen we $u = \sqrt{e^x + 1}$, dan is omgekeerd $x = \log(u^2 - 1)$ en dus $dx = \frac{2u}{u^2-1}\, du$. Verder zien we nog dat $e^{2x} = (u^2 - 1)^2$ geldt. We krijgen dus

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\, dx = \int \frac{(u^2-1)^2}{u}\frac{2u}{u^2-1}\, du = \int 2(u^2 - 1)\, du$$
$$= \frac{2}{3}u^3 - 2u = \frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}^3 - 2\sqrt{e^x+1}.$$

We kunnen deze integraal trouwens ook met een substitutie van type A oplossen: Kies $u = f(x) = e^x$, dan is $du = e^x\, dx$. Er geldt $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\, dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} e^x\, dx = \int \frac{u}{\sqrt{u+1}}\, du = \int \frac{(u+1)-1}{\sqrt{u+1}}\, du = \int \sqrt{u+1}\, du - \int \frac{1}{\sqrt{u+1}}\, du = \frac{2}{3}\sqrt{u+1}^3 - 2\sqrt{u+1} = \frac{2}{3}\sqrt{e^x+1}^3 - 2\sqrt{e^x+1}$.

Integraal van de inverse functie

Een toepassing van de substitutie is het bepalen van de integraal van de inverse functie. We zullen de integraal $\int f^{-1}(x)\, dx$ op twee manieren bepalen, een keer beginnen we met een substitutie en de andere keer met partiële integratie.

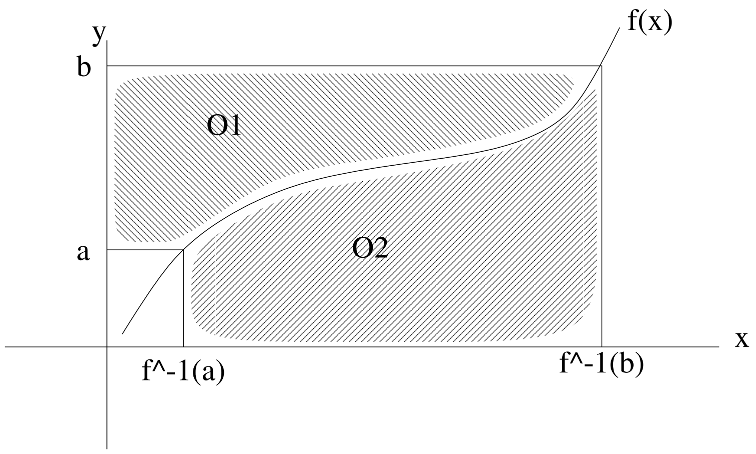
Omdat we over de functie $f(x)$ niets weten, is de enige voor de hand liggende substitutie $x = f(u)$, want dan is $f^{-1}(f(u)) = u$. Voor $x = f(u)$ hebben we $dx = f'(u)\, du$, dus is $\int f^{-1}(x)\, dx = \int u f'(u)\, du$. Dit schreeuwt nu naar partiële integratie, namelijk $\int u f'(u)\, du = u f(u) - \int f(u)\, du = x f^{-1}(x) - \int f(u)\, du$. Voor een bepaalde integraal geldt dus:

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{-1}(x)\, dx &= x f^{-1}(x)\big|_a^b - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(u)\, du \\ &= b f^{-1}(b) - a f^{-1}(a) - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(u)\, du.\end{aligned}$$

We kunnen ook eerst met partiële integratie beginnen. De afgeleide van $f^{-1}(x)$ is $\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, dus hebben we $\int 1 \cdot f^{-1}(x)\, dx = x f^{-1}(x) - \int \frac{x}{f'(f^{-1}(x))}\, dx$. Als we nu $x = f(u)$ substitueren, is weer $dx = f'(u)\, du$ en dus $\int \frac{x}{f'(f^{-1}(x))}\, dx = \int \frac{f(u)}{f'(u)} f'(u)\, du = \int f(u)\, du$. Dus vinden we dezelfde formule als boven.

Dat dit resultaat inderdaad klopt kunnen we aan de hand van de grafiek in Figuur A.25 aflezen. Door het plaatje in de diagonaal $x = y$ te spiegelen zien we dat $O1$ de integraal $\int_a^b f^{-1}(x)\, dx$ is. Aan de andere kant is het gebied $O2$ de integraal $\int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)\, dx$. De grote rechthoek heeft oppervlakte $b f^{-1}(b)$ en de kleine rechthoek links onder heeft oppervlakte $a f^{-1}(a)$, dus geldt

$$b f^{-1}(b) = a f^{-1}(a) + \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)\, dx + \int_a^b f^{-1}(x)\, dx.$$



Figuur A.25: Integraal van de inverse functie

5.3 Toepassingen van de integraal

In de vorige les hebben we gezien dat we met behulp van de integraal de oppervlakte onder een grafiek kunnen berekenen en in deze les dat we ook de lengte van een grafiek kunnen vinden.

Een verdere toepassing is het volume van een rotatielichaam. Het idee hierbij is heel eenvoudig: Als we de grafiek van een functie $f(x)$ om de x-as laten roteren, geeft dit een *rotatielichaam*. Net zo als we de oppervlakte onder een grafiek als som van dunne rechthoeken onder de grafiek hebben benaderd, kunnen we het volume van een rotatielichaam door de som van dunne cirkelschijven benaderen. Een cirkelschijf tussen x en $x+\delta$ met straal $f(x)$ heeft het volume $\pi f(x)^2 \cdot \delta$, dus krijgen we het volume van een rotatielichaam als

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Een eenvoudig voorbeeld is een kogel met straal r. De kogel is het rotatielichaam voor de grafiek van $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ tussen $-r$ en r. Het volume V van de kogel is dus

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi f(x)^2 \, dx = \int_{-r}^{r} \pi \sqrt{r^2 - x^2}^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \, dx \\ &= \pi(r^2 x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-r}^{r} = 2\pi(r^3 - \frac{1}{3}r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Een andere toepassing van de integraal is het oplossen van eenvoudige differentiaalvergelijkingen. Hier zijn twee voorbeelden.

Voorbeeld 1: Bij een zekere chemische reactie is de reactiesnelheid proportioneel met de hoeveelheid van één van de uitgangsproducten dat we P noemen. Stel dat na afloop van 3 minuten de helft van P is omgezet. Hoe lang duurt het tot dat 90% van P zijn omgezet?

De aanvankelijke hoeveelheid van P noemen we A, en de hoeveelheid die na x minuten is omgezet noemen we $f = f(x)$. We weten dat op het moment x de reactiesnelheid $f'(x)$ proportioneel met de hoeveelheid $A - f$ van het product P is. Dit geeft $f'(x) = \frac{df}{dx} = k(A - f)$ voor een zekere constante k. Hieruit volgt $dx = \frac{1}{k(A-f)} df$ en door integreren krijgen we

$$x = \int \frac{1}{k(A-f)} \, df = -\frac{1}{k} \log(A - f) + C.$$

Dit lossen we nu naar $f = f(x)$ op:

$$-k(x - C) = \log(A - f) \Rightarrow A - f = e^{-k(x-C)} \Rightarrow f(x) = A - e^{kC} \cdot e^{-kx}.$$

Omdat $f(0) = 0$ is, geldt $e^{kC} = A$, hieruit volgt

$$f(x) = A(1 - e^{-kx}).$$

Volgens de gegevens geldt $f(3) = \frac{1}{2}A$, dus is $\frac{1}{2}A = A(1 - e^{-3k})$ en dus $e^{-3k} = \frac{1}{2}$. Dit geeft $k = \frac{1}{3}\log(2)$. We willen nu x bepalen zo dat $f(x) = \frac{9}{10}$ geldt. Hiervoor moeten we hebben dat $1 - e^{-kx} = \frac{9}{10}$, dus $e^{-kx} = e^{-\frac{1}{3}\log(2)x} = \frac{1}{10}$. Hieruit volgt $\frac{1}{3}\log(2)x = \log(10)$ en dus $x = 3\frac{\log(10)}{\log(2)} \approx 9.97$.

Voorbeeld 2: Een auto wordt met constante remkracht tot stilstand gebracht. Hoe ver komt de auto nog als zijn beginsnelheid v_0 is?

De snelheid $v = v(t)$ van de auto verandert volgens $v'(t) = \frac{dv}{dt} = -k$ voor de remconstante k. Er geldt dus $dv = -k\ dt$ en dus $v = \int -k\ dt = -kt + C$. Omdat $v(0) = v_0$ is, moet $C = v_0$ zijn. We hebben dus $v(t) = v_0 - kt$ en de auto komt tot stilstand voor $v(t) = 0$ dus voor $t_1 = \frac{v_0}{k}$. Om de afstand te bepalen die de auto nog aflegt, moeten we nog eens integreren, om uit de snelheid het traject $s(t)$ te bepalen. Er geldt $v = s'(t) = \frac{ds}{dt}$, dus is $ds = v\,dt = (v_0 - kt)\,dt$ en dus $s = \int_0^{t_1} (v_0 - kt)\ dt = v_0 t - \frac{k}{2} t^2 \Big|_0^{t_1} = v_0 \frac{v_0}{k} - \frac{k}{2} \frac{v_0^2}{k^2} = \frac{v_0^2}{2k}$. Als de beginsnelheid twee keer zo groot is, komt de auto dus nog vier keer zo ver.

Belangrijke begrippen in deze les

- differentialen
- lengte van een kromme
- substitutie (type A en type B)
- toepassingen van de integraal

Opgaven

31. Bepaal de volgende integralen door substitutie:

$$\text{(i)} \int e^x \sin(e^x)\ dx, \quad \text{(ii)} \int x e^{-x^2}\ dx, \quad \text{(iii)} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\ dx, \quad \text{(iv)} \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ dx,$$

$$\text{(v)} \int \frac{\log(x)}{x}\ dx, \quad \text{(vi)} \int \log(\cos(x)) \tan(x)\ dx, \quad \text{(vii)} \int \frac{\log(\log(x))}{x \log(x)}\ dx.$$

32. Bepaal de volgende integralen (bijvoorbeeld door substitutie):

$$\text{(i)} \int \frac{\log(\log(x))}{x}\ dx, \qquad \text{(ii)} \int \frac{\exp(x)}{\exp(2x) + 2\exp(x) + 1}\ dx,$$

$$\text{(iii)} \int \exp(\exp(x)) \exp(x)\ dx, \qquad \text{(iv)} \int x\sqrt{1-x^2}\ dx.$$

33. Bepaal de lengte van de grafieken voor de volgende functies op de aangegeven intervallen:

    (i) $f(x) = \frac{a}{2}(\exp(\frac{x}{a}) + \exp(-\frac{x}{a})) = a \cdot \cosh(\frac{x}{a})$ op het interval $[-a, a]$ (deze kromme heet de *kettinglijn*);

    (ii) $f(x) = \log(x)$ op het interval $[1, 3]$ (hint: substitueer $u = \sqrt{x^2+1}$);

    (iii) $f(x) = x^2$ op het interval $[0, 2]$ (hint: integreer partieel met 1).

34. Bereken de volgende bepaalde integralen:

$$\text{(i)} \int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2 - 15}}\ dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^1 \log(x^2+1)\ dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^{2\pi} \sin(\frac{1}{2}x)\ dx.$$

35. Bereken de volgende bepaalde integralen:

$$\text{(i)} \int_0^2 (2+x)\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_0^2 (2-x)^2\,dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx,$$

$$\text{(iv)} \int_{-1}^2 x(1-x^2)\,dx, \qquad \text{(v)} \int_1^4 \sqrt{x}(1-x)\,dx, \qquad \text{(vi)} \int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx,$$

$$\text{(vii)} \int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx, \qquad \text{(viii)} \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx, \qquad \text{(ix)} \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx,$$

$$\text{(x)} \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx, \qquad \text{(xi)} \int_3^4 \frac{1}{25-x^2}\,dx, \qquad \text{(xii)} \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2\sin(3x)\,dx.$$

36. Bereken de volgende bepaalde integralen:

$$\text{(i)} \int_3^{11} \sqrt{2x+3}\,dx, \qquad \text{(ii)} \int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{(iii)} \int_0^{\sqrt{2}} x^3\exp(x^2)\,dx.$$