

Hertentamen BKI 116

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zoals $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, maar niet het gebruik van de algebraïsche functies of statistische functies.

Calculus**Opgave 1.** (18 punten)

Bereken de volgende integralen:

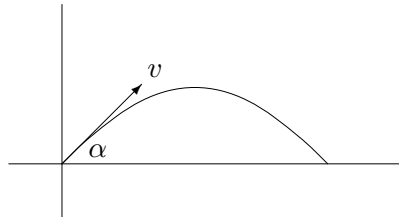
(i) $\int x^2 \cdot \sin(3x) \, dx;$

(ii) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx;$

(iii) $\int (1 + \sin(x))(1 - \sin(x)) \, dx.$

Opgave 2. (22 punten)

Een kogel wordt vanaf de grond met een hoek van α tegen de grond en een snelheid van v afgevuurd. Op tijdstip t na het afvuren is de hoogte van de kogel boven de grond gegeven door $y(t) = -16t^2 + v \sin(\alpha) t$ en de horizontale afstand van het startpunt door $x(t) = v \cos(\alpha) t$.



- (i) Na welke tijd t komt de kogel terug naar de grond?
- (ii) Bepaal de hoek α zo dat de kogel de grootst mogelijke afstand van het startpunt bereikt.
- (iii) Voor welke hoek α is de tijd die de kogel vliegt maximaal?
- (iv) Het traject van de kogel sluit met de grond een zeker oppervlak in. Bepaal de grootte van dit oppervlak.

Kansrekening

Opgave 3. (16 punten)

Bij een rechtbank zal een leugendetector geraadpleegd worden. Het is bekend dat voor een schuldige verdachte de detector in 90% van de gevallen het juiste resultaat (schuldig) geeft en voor een onschuldige verdachte in 99.5% van de gevallen het resultaat onschuldig.

- (i) Uit de statistieken van de belastingdienst is bekend dat 5% van de burgers in hun belastingaangifte ernstig bedriegen. Bij een verdachte geeft de leugendetector aan dat de man/vrouw schuldig is. Wat is de kans, dat de verdachte toch onschuldig is?
- (ii) In een betere wereld zouden misschien slechts nog 1% van de burgers in hun aangifte bedriegen. Als de leugendetector in deze wereld het resultaat schuldig geeft, wat is dan de kans dat de verdachte inderdaad schuldig is?
- (iii) We zijn weer terug in onze wereld met 5% bedriegers. De kans die we in (i) hebben berekend lijkt te hoog om de leugendetector bij de rechtbank in te zetten. Onder de door de leugendetector schuldig verklaarde verdachten willen we namelijk hooguit 1% daadwerkelijk onschuldige accepteren.

Welke nauwkeurigheid van de leugendetector bij onschuldige verdachten wordt benodigd, om dit doel te bereiken? We gaan hierbij ervan uit dat de nauwkeurigheid van 90% voor schuldige verdachte onveranderd blijft.

Opgave 4. (24 punten)

Je hebt een een oneerlijke dobbelsteen waarbij de even getallen twee keer zo vaak vallen dan de oneven getallen (de even en oneven getallen onderling hebben dezelfde kans).

Je dobbelt twee keer met je dobbelsteen. De stochast X_1 geeft het resultaat van de eerste en de stochast X_2 het resultaat van de tweede worp aan. Verder beschrijft $U := \min(X_1, X_2)$ de kleinste en $V := \max(X_1, X_2)$ de grootste van de twee worpen.

- (i) Bepaal de kansverdeling en de verwachtingswaarde $E(X_1)$ van de stochast X_1 .
- (ii) Vergelijk de variantie van X_1 met de variantie van een eerlijke dobbelsteen?
- (iii) Zijn de stochasten U en V onafhankelijk? (Licht je antwoord toe.)
- (iv) Bepaal de kansverdeling en de verwachtingswaarde $E(U)$ van de stochast U .
- (v) Bereken de voorwaardelijke kans $P(X_1 = 3 \mid V = 3)$.

Lineaire Algebra

Opgave 5. (22 punten)

Een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heeft met betrekking tot de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bereken de determinant $\det(A)$ van A .
- (ii) Bepaal het karakteristieke polynoom $\det(A - \lambda \cdot I)$ van A .
- (iii) Bereken de eigenwaarden en de eigenvectoren van A .
- (iv) Geef de matrix van f met betrekking tot een basis uit eigenvectoren aan.
- (v) Geef voor willekeurige $m \in \mathbb{N}$ de matrix A^m aan.

Opgave 6. (18 punten)

Zij $V \subseteq \mathbb{R}^4$ de 2-dimensionale deelruimte opgespannen door de twee (lineair onafhankelijke) vectoren

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bepaal een orthogonale basis van V .
- (ii) Bepaal de orthogonale projecties in V van de vectoren in de standaardbasis van $\mathbb{R}^4$.
- (iii) Vind twee lineair onafhankelijke vectoren in $\mathbb{R}^4$ die loodrecht op v en w staan.

Succes ermee!