

Deeltoets 3 (BKI 116)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zoals $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, maar niet het gebruik van de algebraïsche functies.

Opgave 1. (12 punten)

Zij A de 3×3 -matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bepaal de kern van A .
- (ii) Bereken de eigenwaarden van A .
- (iii) Bepaal de eigenvectoren van A .
- (iv) Geef de dimensie van het beeld van A^{2006} aan.

Oplossing:

- (i) Vegen van de matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt dat $\ker(A) = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$. (2 punten)

- (ii) De eigenwaarden zijn de nulpunten van het karakteristieke polynoom $\det(A - X \cdot I)$ van A , dus van $\det \begin{pmatrix} 3-X & 2 & 0 \\ -5 & -4-X & -1 \\ 2 & 2 & 1-X \end{pmatrix} = (3-X)(-4-X)(1-X) - 4 + 2(3-X) + 10(1-X) = -X^3 + 13X - 12 - 4 + 6 - 2X + 10 - 10X = -X^3 + X = -X(X-1)(X+1)$. De eigenwaarden zijn dus 0, 1 en -1. (4 punten)
- (iii) (a) Voor de eigenwaarde $\lambda = 0$ zijn de eigenvectoren juist de vectoren $\neq 0$ in de kern van A , die al in deel (i) werd bepaald.

- (b) Voor de eigenwaarde $\lambda = 1$ zijn de eigenvectoren de vectoren $\neq 0$ in de kern van $A - 1 \cdot I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en er laat zich rechtstreeks aflezen dat dit

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ is.}$$

- (c) Voor de eigenwaarde $\lambda = -1$ zijn de eigenvectoren de vectoren $\neq 0$ in de kern van $A - (-1) \cdot I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -5 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ en er laat zich rechtstreeks aflezen dat dit

$$\left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ is.}$$

(4 punten)

- (iv) De dimensie van het beeld van A^{2006} kan hoogstens 2 zijn, omdat de dimensie van het beeld van A dimensie 2 heeft. Maar de eigenvectoren voor de eigenwaarden 1 en -1 zijn lineair onafhankelijk en liggen in het beeld van A , A^2 , A^3 , $\dots$, en dus ook in het beeld van A^{2006} . Het beeld van A^{2006} heeft dus dimensie 2. (2 punten)

Opgave 2. (10 punten)

In het 2-dimensionale vlak $\mathbb{R}^2$ is een driehoek Δ gegeven door zijn hoekpunten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Verder zij φ de spiegeling in de lijn $L = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

- (i) Geef de matrix van φ met betrekking tot de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$ aan.
- (ii) De driehoek Δ wordt in de lijn L gespiegeld. Bepaal de hoekpunten A' , B' en C' van de gespiegelde driehoek.
- (iii) Licht je antwoorden op de volgende vragen toe.
 - (a) Is φ een inverteerbare afbeelding?
 - (b) Is 2 een eigenwaarde van φ ?
 - (c) Heeft φ een eigenvector van de vorm $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ met $a \in \mathbb{R}$?

Oplossing:

- (i) De vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ wordt door de spiegeling op $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ afgebeeld, de vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ op $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de matrix R van φ is dus $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 punten)

- (ii) Er geldt $A' = R \cdot A = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B' = R \cdot B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $C' = R \cdot C = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. (3 punten)
- (iii) (a) Ja, omdat $\det(R) = -1 \neq 0$ is. (1 punt)
- (b) Nee, want $\det(R - 2 \cdot I) = 3 \neq 0$. (1 punt)
- (c) Nee, want $R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}$, dus zou $a = 0$ moeten zijn, maar de nulvector is geen eigenvector (per definitie). (2 punten)

Opgave 3. (6 punten)

Het mag als bekend verondersteld worden dat op de vectorruimte V der continue functies door de bilineaire afbeelding

$$\langle f(x), g(x) \rangle := \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx$$

voor $a < b$ een inproduct gedefinieerd wordt.

In V zijn de drie functies

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$

gegeven. Het mag als gegeven aangenomen worden dat $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ lineair onafhankelijk zijn.

Zij $U \subseteq V$ de 3-dimensionale deelruimte van V die $B = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ als basis heeft.

- (i) Laat zien dat met betrekking tot het inproduct

$$\langle f(x), g(x) \rangle_1 := \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) \, dx$$

de basis $B = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ een *orthogonale* basis van U vormt.

- (ii) Door de grenzen van de integratie te veranderen, krijgt men een afwijkend inproduct. Vind een basis van U die met betrekking tot het inproduct

$$\langle f(x), g(x) \rangle_2 := \int_0^\pi f(x) \cdot g(x) \, dx$$

een orthogonale basis van U is.

(Hint: Een primitieve van $\cos(x) \cdot \sin(x)$ is $\frac{1}{2} \sin^2(x)$.)

Oplossing:

- (i) $\int_0^{2\pi} f_1(x) \cdot f_2(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos(x) \, dx = \sin(x) \Big|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$.
- $\int_0^{2\pi} f_1(x) \cdot f_3(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) \, dx = -\cos(x) \Big|_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$.
- $\int_0^{2\pi} f_2(x) \cdot f_3(x) \, dx = \int_0^{2\pi} \cos(x) \sin(x) \, dx = \frac{1}{2} \sin^2(x) \Big|_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$. (2 punten)

- (ii) $\int_0^\pi f_1(x) \cdot f_2(x) dx = \int_0^\pi \cos(x) dx = \sin(x)|_0^\pi = 0 - 0 = 0$, dus zijn $f_1(x)$ en $f_2(x)$ al orthogonaal.

$$\int_0^\pi f_1(x) \cdot f_3(x) dx = \int_0^\pi \sin(x) dx = -\cos(x)|_0^\pi = 1 + 1 = 2. \text{ Wegens } \int_0^\pi f_1(x) \cdot f_1(x) dx = \int_0^\pi 1 dx = \pi \text{ is dus } \int_0^\pi f_1(x) \cdot (f_3(x) - \frac{2}{\pi}f_1(x)) dx = 0.$$

$$\text{Ten slotte is } \int_0^\pi f_2(x) \cdot f_3(x) dx = \int_0^\pi \cos(x) \sin(x) dx = \frac{1}{2} \sin^2(x)|_0^\pi = 0 - 0 = 0, \text{ dus is } \int_0^\pi f_2(x) \cdot (f_3(x) - \frac{2}{\pi}f_1(x)) dx = 0.$$

Een orthogonale basis is dus $(f_1(x), f_2(x), f_3(x) - \frac{2}{\pi}f_1(x))$. (4 punten)

Opgave 4. (12 punten)

Een tetraëder (regelmatige piramide met driehoekig grondvlak) is gegeven door zijn hoekpunten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Verder zij V het 2-dimensionale vlak dat de vectoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bevat.

- (i) Bereken een orthogonale basis van V .
- (ii) Bereken de orthogonale projecties van de hoekpunten A, B, C en D in het vlak V .
- (iii) Teken de projectie van de tetraëder in het vlak V .
- (iv) Wat zijn de afstanden van de hoekpunten A, B, C en D van het vlak V ?

Oplossing: We noteren het standaardinproduct van vectoren v en w met $v \cdot w$.

- (i) Met Gram-Schmidt orthogonalisatie vindt men een orthogonale basis (v'_1, v'_2) door

$$v'_1 = v_1, \quad v'_2 = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_1} v_1 = v_2 - \frac{4}{2} v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3 \text{ punten})$$

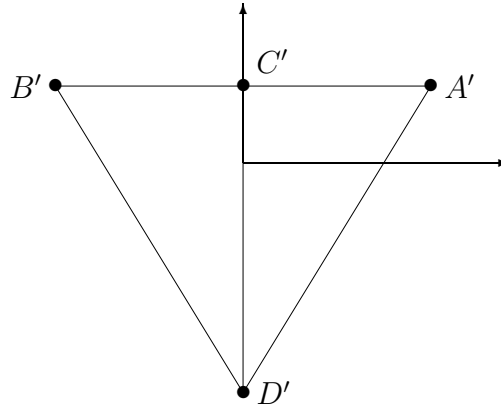
- (ii) De orthogonale projectie w' van een vector w laat zich met behulp van de orthogonale

$$\text{basis uit deel (i) berekenen door } w' = \frac{w \cdot v'_1}{v'_1 \cdot v'_1} v'_1 + \frac{w \cdot v'_2}{v'_2 \cdot v'_2} v'_2 = \frac{w \cdot v'_1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{w \cdot v'_2}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als orthogonale projecties A', B', C' en D' van de punten A, B, C en D vindt men zo: $A' = v'_1 + \frac{1}{3}v'_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $B' = -v'_1 + \frac{1}{3}v'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $C' = \frac{1}{3}v'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,

$$D' = -v'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (4 \text{ punten})$$

- (iii) De coëfficiënten van v'_1 en v'_2 bij de projecties zijn tot op een schaling na al de coördinaten in het vlak V . Wegens $v'_1 \cdot v'_1 = 2$ en $v'_2 \cdot v'_2 = 3$ moet de eerste coördinaat met $\sqrt{2}$ en de tweede met $\sqrt{3}$ vermenigvuldigd worden. De coördinaten van de projecties zijn dus: $A' \leftrightarrow (\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $B' \leftrightarrow (-\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $C' \leftrightarrow (0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $D' \leftrightarrow (0, -\sqrt{3})$. Dit geeft de volgende projectie:



Het zijvlak (van de tetraëder) met hoekpunten A , B en C staat dus precies loodrecht op het vlak V . (2 punten)

- (iv) De afstand van een hoekpunt van het vlak is de lengte van de verschilvector tussen het hoekpunt en zijn orthogonale projectie. Er geldt:

$$A - A' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ afstand van } A \text{ van het vlak } V \text{ is dus } \frac{1}{3}\sqrt{6},$$

$$B - B' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ afstand van } B \text{ van het vlak } V \text{ is dus } \frac{1}{3}\sqrt{6},$$

$$C - C' = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \text{ afstand van } C \text{ van het vlak } V \text{ is dus } \frac{2}{3}\sqrt{6},$$

$$D - D' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ d.w.z. } D \text{ ligt al in het vlak } V. \quad (3 \text{ punten})$$