

Deeltoets 1 (BKI 116)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zo als $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, niet voor het bepalen van afgeleiden of nulpunten van functies.

Opgave 1. (10 punten)

De beweging van een (zwak) gedempte slinger wordt (afhankelijk van de tijd t) beschreven door de functie

$$s(t) = \exp(-bt) \cos(\omega t),$$

waarbij b en ω zekere constanten zijn (b geeft de sterkte van de damping aan en ω is de slingerfrequentie).

De momentele snelheid $v(t)$ van de slinger is de afgeleide $s'(t)$ van de functie $s(t)$, zijn versnelling (acceleratie) $a(t)$ is de afgeleide $v'(t) = s''(t)$ van de snelheid $v(t)$.

- (i) Bepaal de snelheid $v(t)$ en de versnelling $a(t)$ van de slinger (als functies van de tijd).
- (ii) Laat zien: De slinger voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$s''(t) + 2b \cdot s'(t) + (\omega^2 + b^2) \cdot s(t) = 0.$$

Opgave 2. (10 punten)

We bekijken de functie

$$f(x) := -\log(x).$$

- (i) De functie $f(x)$ sluit met de positieve x - en y -assen een (naar boven onbegrensd) gebied in.

Bepaal de (qua oppervlakte) grootste rechthoek die in dit gebied past. Wat zijn de afmetingen van dit rechthoek, wat is zijn oppervlak?

- (ii) De (gewone Euclidische) afstand die een punt (x, y) in het vlak van de oorsprong $(0, 0)$ heeft is $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Laat zien: Het punt $(x, f(x))$ op de grafiek van $f(x)$ dat de kleinste afstand van de oorsprong heeft, voldoet aan $x^2 = -\log(x)$.

(De precieze x -waarde $0.65291864\dots$ van dit punt laat zich alleen maar door een numerieke benadering bepalen.)

Opgave 3. (10 punten)

Een triathleet loopt met een snelheid van 5 m/s de zee binnen. Omdat het in het water moeilijker loopt, neemt zijn snelheid vanaf de oever iedere meter die hij loopt 0.1 m/s af, totdat hij zijn zwemsnelheid van 2 m/s bereikt. Vanaf hier gaat hij natuurlijk zwemmen.

- (i) Hoe ver loopt de triathleet de zee binnen, tot dat hij met zwemmen begint?
- (ii) Geef op het interval $x \in [-50, 50]$ de functie $v(x)$ aan, die de snelheid van de triathleet op een afstand van x (meter) van de oever beschrijft (het punt $x = -50$ ligt natuurlijk 50 meter *voor* de oever)?
- (iii) Is de functie $v(x)$ een differentieerbare functie (geef uitleg)?
- (iv) Hoe lang doet hij over het stuk dat hij in het water loopt? Wat is zijn voordeel tegenover een even sterke zwemmer, die rechtstreeks vanaf de oever zwemt?

Hint: De snelheid van de triathleet is een functie $v(x)$ van de afstand x die hij al gelopen is. Omdat $v(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, is $\Delta t = \frac{1}{v(x)} \Delta x$ en dus is de looptijd gegeven door $T = \int_a^b \frac{1}{v(x)} dx$ (met de passende grenzen a en b).

Merk op: Als het in deel (ii) niet gelukt is, de functie $v(x)$ te vinden, bepaal dan de integraal $\int_a^b \frac{1}{c+dx} dx$ met symbolische constanten a, b, c en d .

Opgave 4. (10 punten)

Bepaal primitieven van de volgende functies:

- (i) $f(x) := \sin(x) \cdot \cos(x)$;
- (ii) $f(x) := \log(x^2 + x + 1)$;
- (iii) $f(x) := \frac{a^x}{b^x}$ voor $a, b > 0$;
- (iv) $f(x) := (a\sqrt{x} + x^2) \cdot (\frac{1}{\sqrt{bx}} + \frac{1}{x^3})$ voor constanten a en b .

$f(x)$	$f'(x)$
x^c	$c \cdot x^{c-1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$x \log(x) - x$	$\log(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Succes ermee!