

Deeltoets 2 (BKI 116)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zoals $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, maar niet het gebruik van de statistische functies.

Opgave 1. (10 punten)

In een zeker vak bestaat de tentaminering uit 3 multiple choice vragen met telkens 4 antwoordopties. Een niet voorbereide (en dus gokkende) student heeft bij elke vraag natuurlijk een kans van $\frac{1}{4}$ op het goede antwoord. Bij een voorbereide student is de kans op het goede antwoord $\frac{3}{4}$.

- (i) Een student is geslaagd als hij/zij minstens 2 goede antwoorden heeft. Wat is de kans dat een voorbereide student het tentamen haalt, wat is de kans voor een gokkende student?
- (ii) Tijdens het nakijken dwalen de gedachten van de docent af: Als er maar één vraag was geweest, met welke kans zou een goed antwoord dan van een gokkende student afkomstig zijn geweest? Natuurlijk weet de docent, dat deze kans afhangt van het relatieve aantal gokkende studenten. Bepaal de kans voor 10%, 50% en 90% gokkende studenten. Kan je de kans ook voor een algemeen relatief aantal p van gokkende studenten aangeven?
- (iii) De docent vraagt zich natuurlijk af, hoeveel van de studenten voorbereid waren. Hij is na gegaan dat er in totaal 65% goede antwoorden waren. Kan hij met deze informatie het relatieve aantal gokkende studenten achterhalen? Zo ja, help hem, zo nee, geef aan met welke informatie het wel zou lukken.

Opgave 2. (10 punten)

In een zak zitten drie munten, een eerlijke munt M_1 (waarbij **kop** met kans $\frac{1}{2}$ valt), een oneerlijke munt M_2 met kans $\frac{3}{4}$ op **kop** en een oneerlijke munt M_3 met kans $\frac{1}{4}$ op **kop**. De munten zijn van buiten niet te onderscheiden.

Je trekt één van de munten en werpt drie keer, daarbij krijg je twee keer **kop** en één keer **munt**.

- (i) Bepaal voor de verschillende munten de kans op dit resultaat.
- (ii) Natuurlijk is de kans op twee keer **kop** en één keer **munt** bij de munt M_2 het hoogst. Maar hoe hoog is de kans dat je inderdaad munt M_2 hebt getrokken, gegeven het feit dat twee keer **kop** en één keer **munt** zijn gevallen?
- (iii) Stel je weet alleen maar dat in de zak verschillende munten zitten die mogelijk oneerlijk zijn, maar niet met welke kans **kop** bij de verschillende munten valt. Nu heb je gezien dat na drie keer werpen twee keer **kop** en één keer **munt** is gevallen. Wat is met betrekking tot dit resultaat de maximum likelihood schatting voor de kans p op **kop** bij de getrokken munt?

Opgave 3. (12 punten)

Bij een loterij met lotjes van 1€ trek je met kans p de hoofdprijs (een grote blauwe pluche olifant) en met kans $1 - p$ win je niets. Als je zo lang lotjes koopt tot dat je wint, laat zich aantonen dat de verwachtingswaarde voor het aantal benodigde lotjes gelijk aan $\frac{1}{p}$ is (bij 10% winnende lotjes is de verwachtingswaarde dus 10). Maar zo verslaafd ben je nu ook weer niet aan blauwe olifanten, dus beperk je je als redelijke student tot het kopen van hoogstens vier lotjes.

- (i) Geef de kans aan dat je met hoogstens vier lotjes wel de hoofdprijs wint (deze kans hangt natuurlijk van p af).
- (ii) Stel er geldt $p = 0.1$. De stochast X geeft aan, hoeveel lotjes je koopt. Bepaal de kansverdeling, de verwachtingswaarde en de variantie van X .
- (iii) Je ziet iemand van je medestudenten die ook hoogstens vier lotjes wilde kopen met een olifant naar de kroeg lopen. Wat is (bij nog steeds $p = 0.1$) de kans dat deze student van zijn 4€ voor lotjes nog 3€ over heeft om een bier te kopen?

Opgave 4. (8 punten)

Je hebt bij een experiment met een stochast X te maken die beschreven wordt door de dichtheidsfunctie

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot (1 - x) & \text{als } x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{als } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

- (i) Welke waarde moet de parameter a hebben zo dat $f(x)$ inderdaad de dichtheidsfunctie van een continue kansverdeling is?
- (ii) Bepaal de verwachtingswaarde $E(X)$ van de stochast X .
- (iii) Je hebt een randomgenerator ter beschikking die een rij uniform verdeelde toevalsgetallen $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots$ op het interval $[0, 1]$ produceert.

Beschrijf een manier om met behulp van deze randomgenerator een rij $V_1, V_2, \dots$ van toevalsgetallen te produceren, die volgens de dichtheidsfunctie $f(x)$ verdeeld zijn en dus een simulatie voor de stochast X vormen.

Gegevens voor verschillende belangrijke verdelingen:

verdeling	kans	$E(X)$	$Var(X)$
hypergeometrisch	$h(n, m, s; k) = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{n-s}{m-k}}{\binom{n}{m}}$	$m \cdot \frac{s}{n}$	$m \cdot \frac{s}{n} (1 - \frac{s}{n}) \frac{n-m}{n-1}$
binomiaal	$b(m, p; k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$	$m \cdot p$	$m \cdot p (1-p)$
Poisson	$po_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
exponentieel	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
normaal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

Succes ermee!