

Deeltoets 3 (BKI 116)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zoals $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, maar niet het gebruik van de algebraïsche functies (zo als de determinant).

Opgave 1. (8 punten)

We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat een parameter $a \in \mathbb{R}$ bevat:

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 1 \\ -2x \quad \quad + 2z &= 2 \\ x + a^2y + z &= 0.\end{aligned}$$

- (i) Bepaal de waarden van de parameter a waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft.
- (ii) Is er ook een waarde van a zo dat het stelsel oneindig veel oplossingen heeft? Zo ja, bepaal zo'n waarde, zo niet, geef een reden.
- (iii) Voor welke waarde van de parameter a heeft het stelsel een oplossing met $z = 2$?

Opgave 2. (10 punten)

Door de vergelijking

$$a + bx + cy + dxy + x^2 - y^2 = 0$$

wordt een kromme in het $x - y$ -vlak aangegeven, die van de parameters $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ afhangt.

- (i) Bepaal de waarden van a, b, c en d zodanig dat de kromme door de vier punten $(x, y) = (3, 0), (3, -2), (-1, 0), (-1, -2)$ loopt.
- (ii) Je wilt het plaatje van de kromme nog iets mooier maken. Hiervoor beslis je, het plaatje langs de x -as met een factor 2 te schalen en langs de y -as met een factor $\frac{1}{2}$. Vervolgens draai je het plaatje nog om 90° tegen de klok.

Geef de matrix van deze samengestelde transformatie van het vlak aan (met betrekking tot de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$) en bereken waar de de vier punten uit deel (i) onder deze transformatie terecht komen.

Opgave 3. (11 punten)

Een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heeft met betrekking tot de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bereken de determinant $\det(A)$ van A .
- (ii) Bepaal het karakteristieke polynoom $\det(A - \lambda \cdot I)$ van A .
- (iii) Bereken de eigenwaarden en de eigenvectoren van A .
- (iv) Geef de matrix van f met betrekking tot een basis uit eigenvectoren aan.
- (v) Geef voor willekeurige $m \in \mathbb{N}$ de matrix A^m aan.

Opgave 4. (11 punten)

In deze opgave zijn alle hoeken en lengtes met betrekking tot het standaardinproduct op

$\mathbb{R}^3$ bedoeld. De vectoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ zijn gegeven door $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (i) Bepaal de hoek α tussen de vectoren v_1 en v_2 . (Het is voldoende als je $\cos(\alpha)$ aangeeft.)
- (ii) Wat is langer, de orthogonale projectie van v_1 langs de lijn door v_2 of de orthogonale projectie van v_2 langs de lijn door v_1 ?
- (iii) Bereken de orthogonale projectie van de vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in het vlak U dat door de vectoren v_1 en v_2 opgespannen wordt.
- (iv) Wat is de afstand van v van het vlak U ?
- (v) Geef een vector w aan die loodrecht op het vlak U opgespannen door v_1 en v_2 staat.

Succes ermee!