Deeltoets 3 (BKI 116)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is alleen maar voor de uitwerking van numerieke resultaten (zoals $\sqrt{2}$ of 0.3^{42}) toegestaan, maar niet het gebruik van de algebraische functies.

Opgave 1. (8 punten)
Zij A de 3×3-matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Bepaal de kern van A.

(ii) Bereken de eigenwaarden van A.

(iii) Bepaal de eigenvectoren van A.

(iv) Geef de dimensie van het beeld van A^{2006} aan.

Opgave 2. (10 punten)
In het 2-dimensionale vlak $\mathbb{R}^2$ is een driehoek Δ gegeven door zijn hoekpunten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Verder zij φ de spiegeling in de lijn $L = \{t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(i) Geef de matrix van φ met betrekking tot de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$ aan.

(ii) De driehoek Δ wordt in de lijn L gespiegeld. Bepaal de hoekpunten A', B' en C' van de gespiegelde driehoek.

(iii) Licht je antwoorden op de volgende vragen toe.

(a) Is φ een inverteerbare afbeelding?

(b) Is 2 een eigenwaarde van φ?

(c) Heeft φ een eigenvector van de vorm $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ met $a \in \mathbb{R}$?

Opgave 3. (10 punten)
Het mag als bekend verondersteld worden dat op de vectorruimte V der continue functies door de bilineaire afbeelding

$$\big\langle f(x), g(x) \big\rangle := \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$$

voor $a < b$ een inproduct gedefinieerd wordt.

In V zijn de drie functies

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(x), \quad f_3(x) = \sin(x)$$

gegeven. Het mag als gegeven aangenomen worden dat $(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ lineair onafhankelijk zijn.

Zij $U \subseteq V$ de 3-dimensionale deelruimte van V die $B = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ als basis heeft.

(i) Laat zien dat met betrekking tot het inproduct

$$\big\langle f(x), g(x) \big\rangle_1 := \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

de basis $B = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ een *orthogonale* basis van U vormt.

(ii) Door de grenzen van de integratie te veranderen, krijgt men een afwijkend inproduct. Vind een basis van U die met betrekking tot het inproduct

$$\big\langle f(x), g(x) \big\rangle_2 := \int_0^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

een orthogonale basis van U is.

(Hint: Een primitieve van $\cos(x) \cdot \sin(x)$ is $\frac{1}{2}\sin^2(x)$.)

Opgave 4. (12 punten)
Een tetraëder (regelmatige piramide met driehoekig grondvlak) is gegeven door zijn hoekpunten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Verder zij V het 2-dimensionale vlak dat de vectoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bevat.

(i) Bereken een orthogonale basis van V.

(ii) Bereken de orthogonale projecties van de hoekpunten A, B, C en D in het vlak V.

(iii) Teken de projectie van de tetraëder in het vlak V.

(iv) Wat zijn de afstanden van de hoekpunten A, B, C en D van het vlak V?

Succes ermee!