# Wiskunde 2 voor kunstmatige intelligentie (BKI 316)

Bernd Souvignier

najaar 2004

# Deel I

# Voortgezette Analyse

# Les 1 Complexe getallen

Iedereen weet, dat kwadraten van getallen positieve getallen zijn. Dat is vaak erg praktisch, we weten bijvoorbeeld dat de functie $f(x) := x^2+1$ steeds positief is en in het bijzonder geen nulpunten heeft. Daarom is bijvoorbeeld ook de functie $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$ voor alle waarden van $x$ gedefinieerd, omdat de noemer nooit 0 wordt.

Aan de andere kant is het feit, dat kwadraten positief zijn, ook een bron van frustratie, we kunnen namelijk vergelijkingen van de vorm $X^2 = a$ voor $a < 0$ niet oplossen.

Nu is het een eigenschap van wiskundigen, dat ze in een voor gewone mensen hopeloze situatie (een situatie zonder oplossing) toch vooruit gaan: ze definiëren gewoon iets, waarmee ze verder kunnen. In sommige gevallen zijn deze definities misschien niet zo erg nuttig, maar in het geval van de oplossingen van kwadratische vergelijkingen bleek de nieuwe definitie een echt geluksgeval te zijn.

> Er zijn mensen die beweren dat wiskundigen mensen zijn die geen weg weten met de reële wereld en zich daarom hun eigen wereld definiëren waarin ze zich thuis voelen.

## 1.1 Constructie van de complexe getallen

Het idee achter de *complexe getallen* is dat we een oplossing van de vergelijking $X^2 = -1$ definiëren en kijken wat er gebeurt als we deze oplossing aan de reële getallen $\mathbb{R}$ toevoegen.

We kiezen als symbool voor de oplossing de letter $i$, d.w.z. we definiëren dat $i^2 = -1$ en noemen $i$ de *imaginaire eenheid*.

Wat betekent het nu dat we $i$ aan de reële getallen toevoegen? We willen zeker dat we $i$ met een willekeurig reëel getal $y$ kunnen vermenigvuldigen, dit geeft getallen van de vorm $i \cdot y$. Het aardige is dat we nu al uit elk reëel getal de wortel kunnen trekken, want voor $a \geq 0$ konden we dit al eerder en voor $a < 0$ is $-a > 0$, dus bestaat er een $b \in \mathbb{R}$ met $b^2 = -a$ en we hebben $(i \cdot b)^2 = i^2 \cdot b^2 = (-1) \cdot (-a) = a$.

Maar we willen getallen natuurlijk ook optellen, daardoor krijgen we alle getallen van de vorm $x + i \cdot y$ met $x, y \in \mathbb{R}$. Het aardige is nu, dat dit al voldoende is, d.w.z. dat we geen verdere getallen meer nodig hebben om goed met $i$ te kunnen rekenen. Het optellen gebeurt componentsgewijs en voor het vermenigvuldigen moeten we gewoon het product uitwerken:

$$(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned}(x_1 + i \cdot y_1)(x_2 + i \cdot y_2) &= x_1x_2 + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2) + i^2 \cdot y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

Voorbeeld: We hebben $(1 + i \cdot 2) + (3 - i) = (1 + 3) + i \cdot (2 - 1) = 4 + i$ en $(1 + i \cdot 2)(3 - i) = (3 - (-2)) + i \cdot (-1 + 6) = 5 + i \cdot 5$.
Merk op: Net zo goed als $1 + i \cdot 2$ kunnen we natuurlijk ook $1 + 2i$ schrijven.

We definiëren nu het *lichaam* $\mathbb{C}$ *der complexe getallen* als de verzameling

$$\mathbb{C} := \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

met de boven aangegeven bewerkingen. We mogen deze verzameling een *lichaam* noemen, omdat optellen en vermenigvuldigen commutatief ($a+b = b+a$ en $ab = ba$) en associatief ($(a+b)+c = a+(b+c)$ en $(ab)c = a(bc)$) zijn en omdat de vermenigvuldiging distributief over het optellen is ($a(b+c) = ab+ac$ en $(a+b)c = ac+bc$). Deze eigenschappen erven de complexe getallen gewoon van de reëele getallen.

Let op: In de wiskunde staat steeds het symbool $i$ voor de imaginaire eenheid. Maar omdat in de natuurkunde en elektrotechniek traditioneel de letter $I$ (en vroeger ook $i$) voor de *stroomsterkte* gebruikt wordt, wordt in deze disciplines meestal $j$ voor de imaginaire eenheid geschreven.

Omdat we de complexe getallen verkregen hebben door $i$ aan de reële getallen toe te voegen, zijn de reële getallen in de complexe getallen bevat, namelijk als de getallen van de vorm $x + i \cdot 0$ met $x \in \mathbb{R}$. Aan de andere kant noemt men de getallen van de vorm $i \cdot y$ met $y \in \mathbb{R}$ *zuiver imaginair*.

We hebben al gezien dat een complex getal $z \in \mathbb{C}$ eenduidig door twee reële getallen beschreven wordt, namelijk door $x, y \in \mathbb{R}$ als $z = x + i \cdot y$. We noemen in dit geval $x$ het *reële deel* van $z$, genoteerd met $x = \Re(z)$ en $y$ het *imaginaire deel* van $z$, genoteerd met $y = \Im(z)$. Er geldt dus:

$$z = \Re(z) + i \cdot \Im(z).$$

Het is gebruikelijk dat complexe getallen of complexe variabelen $z$ heten, terwijl reële getallen $x$ en $y$ heten. Dit is natuurlijk geen garantie, maar als je de letter $z$ in een formule tegen komt, is dit een sterk signaal dat je het misschien met complexe getallen te maken hebt.

## 1.2 Oplossen van vergelijkingen

We hebben boven al gezien, dat we met behulp van de getallen $i \cdot y$ uit elk reëel getal de wortel kunnen trekken. Dit betekent, dat elke kwadratische veelterm $f(x) = ax^2 + bx + c$ een nulpunt heeft, want de *abc*-formule

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

geeft de nulpunten expliciet aan en we hoeven alleen maar de wortel uit het reële getal $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ te trekken.

Maar de situatie is nog veel beter, we kunnen namelijk zelfs uit een willekeurig complex getal de wortel trekken:

Gezocht is een complex getal $z = x + i \cdot y$ met $z^2 = a + i \cdot b$ voor een gegeven complex getal $a + i \cdot b$. Uit $z^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot (xy + yx) = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$ volgt

$x^2 - y^2 = a$ en $2xy = b$. Hieruit berekenen we $a^2 + b^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$, dus hebben we $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ (merk op dat $a^2 + b^2$ positief is).

Door de vergelijkingen $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $x^2 - y^2 = a$ bij elkaar op te tellen en van elkaar af te trekken krijgen we

$$x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{2}a \quad \text{en} \quad y^2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{2}a$$

en omdat $\sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|$ hebben deze vergelijkingen reële oplossingen $x$ en $y$.

We moeten wel opletten of we voor $x$ en $y$ de positieve of de negatieve wortel kiezen, want $2xy = b$. Als $b \geq 0$ moeten we bij $x$ en $y$ hetzelfde teken kiezen (beide positief of beide negatief), als $b < 0$ moeten $x$ en $y$ verschillende tekens hebben.

Uit de *abc*-formule volgt weer dat elke kwadratische veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ ook een nulpunt in $\mathbb{C}$ heeft, of anders gezegd, dat elke kwadratische vergelijking een oplossing in $\mathbb{C}$ heeft. Maar er geldt een veel sterker resultaat, namelijk de

**Hoofdstelling van de algebra:** Elke veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ heeft een nulpunt in $\mathbb{C}$.

Als een veelterm $f(z)$ een nulpunt $a_1$ heeft, dan kunnen we (met behulp van een staartdeling) $f(z)$ schrijven als $f(z) = (z - a_1)g(z)$ waarbij $g(z)$ een veelterm van lagere graad is. Maar ook $g(z)$ heeft volgens de hoofdstelling van de algebra een nulpunt $a_2$, en dus kunnen we doorgaan en $f(z)$ schrijven als $f(z) = (z - a_1)(z - a_2)h(z)$ waarbij de graad van $h(z)$ al om 2 kleiner is dan die van $f(z)$.

Uiteindelijk kunnen we een veelterm $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_1 z + c_0$ op deze manier schrijven als $f(z) = c_n(z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n)$, waarbij de $a_i$ de (niet noodzakelijk verschillende) nulpunten van $f(z)$ zijn. Omdat $z - a$ een lineaire functie is hebben we zo de volgende variatie van de hoofdstelling van de algebra ingezien:

*Elke veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ laat zich (over $\mathbb{C}$) schrijven als een product van lineaire factoren.*

Merk op: Over de reële getallen geldt slechts de zwakkere uitspraak: Elke veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ laat zich (over $\mathbb{R}$) schrijven als een product van lineaire en kwadratische factoren.

## 1.3 Meetkunde van de complexe getallen

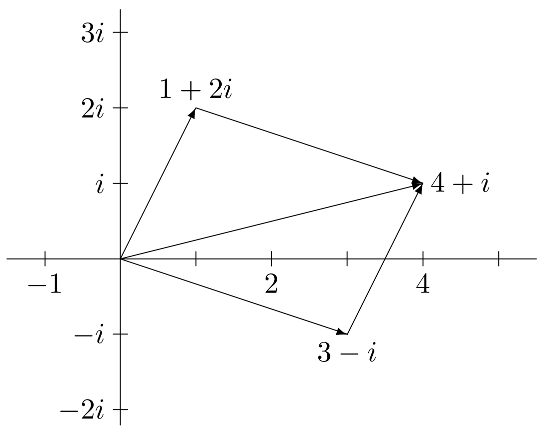
We hebben ons tot nu toe tot algebraïsche eigenschappen van de complexe getallen beperkt, maar een belangrijke rol spelen ook de meetkundige eigenschappen. We hebben gezien, dat een reëel getal via het reële en imaginaire deel met een paar van reële getallen correspondeert. Dit geeft een identificatie van de complexe getallen met het gewone 2-dimensionale vlak $\mathbb{R}^2$, het getal

$z = x + i \cdot y$ correspondeert hierbij met het punt $(x, y)$ en op grond van deze identificatie spreekt men ook vaak van het *complexe vlak* in plaats van de complexe getallen.

We hebben al gezien dat het optellen van complexe getallen componentsgewijs voor het reële en imaginaire deel gebeurt. Maar dat is precies de manier hoe we vectoren optellen en daarom is het redelijk voor de hand liggend het getal $z = x + i \cdot y$ met de 2-dimensionale vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ te identificeren. Het voordeel ervan, bij complexe getallen aan vectoren in plaats van punten te denken, is dat we van vectoren weten hoe we ze optellen, terwijl we hiervoor bij punten toch stiekem weer vectoren zouden gebruiken.

In de taal van de lineaire algebra zeggen we, dat de complexe getallen $\mathbb{C}$ een 2-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte vormen, en de boven aangegeven correspondentie met $\mathbb{R}^2$ vinden we door de standaardbasis $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ van $\mathbb{R}^2$ met de basis $(1, i)$ van $\mathbb{C}$ te identificeren.

Het volgende plaatje geeft het optellen van de complexe getallen $1 + 2i$ en $3 - i$ in het complexe vlak weer.




Figuur I.1: Optellen in het complexe vlak

Een voor de hand liggende vraag is nu natuurlijk, of ook de vermenigvuldiging van complexe getallen een mooie meetkundige interpretatie heeft. Dit is inderdaad het geval, maar het verhaal is iets ingewikkelder dan voor het optellen.

Om te beginnen, hebben we hiervoor en andere manier van beschrijving van punten in het 2-dimensionale vlak nodig, die men *poolcoördinaten* noemt: Elk punt $P$ in het vlak $\mathbb{R}^2$ kan behalve met zijn coördinaten $(x, y)$ ook in de vorm $(r, \varphi)$ aangegeven worden, waarbij $r$ de afstand van het nulpunt is en $\varphi$ de hoek tussen de $x$-as en de verbinding van het nulpunt met $P$ (tegen de klok gemeten). Tussen de gewone *cartesische* coördinaten $(x, y)$ en de poolcoördinaten $(r, \varphi)$ bestaat het volgende verband:

$$x = r\cos(\varphi) \qquad y = r\sin(\varphi)$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}.$$

Merk op dat de relatie $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ de hoek $\varphi$ nog niet eenduidig vast legt, omdat $\tan(x)$ een periode van $\pi$ heeft. We moeten daarom voor de vier kwadranten tussen de assen van het complexe vlak aparte definities nemen:

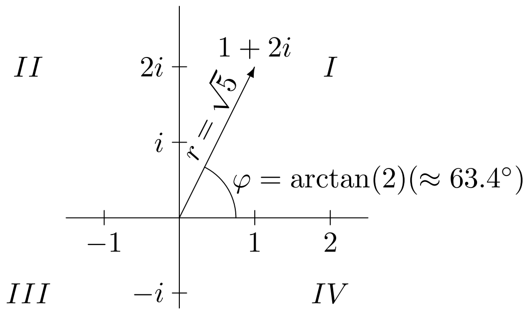
$I: \; x > 0, y \geq 0$: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$

$II: \; x < 0, y \geq 0$: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$

$III: \; x < 0, y < 0$: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$

$IV: \; x > 0, y < 0$: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi$

Voor $(x, y)$ met $x = 0$ hebben we $\varphi = \frac{\pi}{2}$ als $y > 0$ en $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ als $y < 0$. Voor het nulpunt zelf is de hoek niet gedefinieerd.




Figuur I.2: Poolcoördinaten

Met deze transformaties hebben we nu een eenduidige correspondentie tussen de punten van het complexe vlak in gewone coördinaten $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ en in poolcoördinaten $\{(r, \varphi) \mid r \in \mathbb{R}, r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Voor een complex getal $z = (x, y) = (r, \varphi)$ heet $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ de *absolute waarde* of *modulus* van $z$, genoteerd met $|z|$. Dit is de gewone (euclidische) afstand van het nulpunt in $\mathbb{R}^2$ en komt voor $z \in \mathbb{R}$ gelukkig overeen met de gewone absolute waarde van een reëel getal. Verder noemen we $\varphi$ het *argument* van $z$ en noteren dit met $\arg(z)$. We hebben dus:

$$z \in \mathbb{C} \text{ met } |z| = r \text{ en } \arg(z) = \varphi \iff z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)).$$

We hebben al gezien dat voor twee complexe getallen $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ en $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ het product $z_1 z_2$ gegeven is door $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i \cdot (x_1 y_2 + y_1 x_2)$. Als we $z_1$ en $z_2$ in poolcoördinaten schrijven, dus $z_1 = (r_1, \varphi_1)$ en $z_2 = (r_2, \varphi_2)$, geeft dit volgens de boven aangegeven transformaties:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 \cos(\varphi_1) r_2 \cos(\varphi_2) - r_1 \sin(\varphi_1) r_2 \sin(\varphi_2) \\ &\qquad + i \cdot (r_1 \cos(\varphi_1) r_2 \sin(\varphi_2) + r_1 \sin(\varphi_1) r_2 \cos(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) \cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2)) \\ &\qquad + i \cdot r_1 r_2 (\cos(\varphi_1) \sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2). \end{aligned}$$

De laatste stap is een opteltheorema dat we in Wiskunde 1 al hebben gezien. Hier is een korte herinnering: Een rotatie in het 2-dimensionale vlak om een hoek van $\varphi$ beschrijven we met betrekking tot de standaardbasis $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ door de matrix $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$. Maar een rotatie om $\varphi_1+\varphi_2$ kunnen we ook zien als de samenstelling van eerst een rotatie om $\varphi_1$ en vervolgens een rotatie om $\varphi_2$. De matrix van de samenstelling van twee rotaties is het product van de matrices van de enkele rotaties. Dit geeft de matrix vergelijking

$$\begin{pmatrix}\cos(\varphi_1+\varphi_2) & -\sin(\varphi_1+\varphi_2)\\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1)\\ \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\varphi_2) & -\sin(\varphi_2)\\ \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2)\end{pmatrix}$$

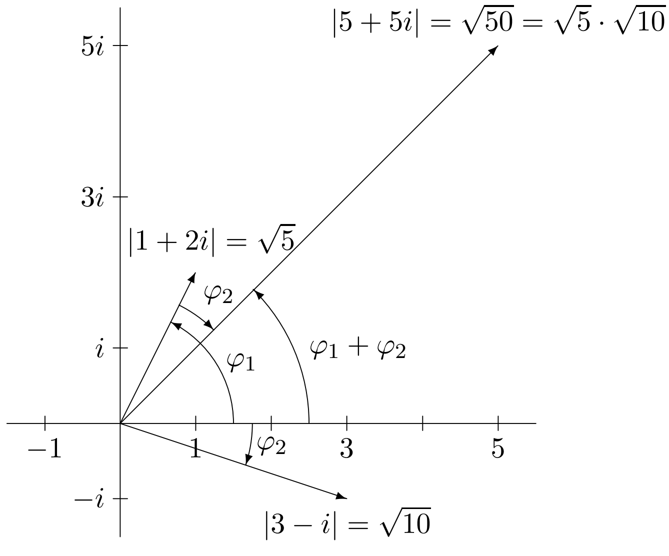
$$= \begin{pmatrix}\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) & -\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\\ \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) & -\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)\end{pmatrix}$$

en een vergelijk van de matrixelementen geeft in het bijzonder:

$$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)$$
$$\sin(\varphi_1+\varphi_2) = \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2).$$

De poolcoördinaten van $z_1z_2$ zijn dus $(r_1r_2, \varphi_1+\varphi_2)$. Dit betekent dat we twee complexe getallen vermenigvuldigen door hun absolute waarden te vermenigvuldigen en hun argumenten op te tellen. Meetkundig uitgedrukt vermenigvuldigen we een complex getal $z_1$ met een complex getal $z_2$ door $z_1$ met de lengte (absolute waarde) van $z_2$ te schalen en vervolgens om het argument van $z_2$ (tegen de klok) te draaien.

Voor het product $(1+2i)(3-i)$ geeft het volgende plaatje de meetkundige interpratie van de vermenigvuldiging weer.




Figuur I.3: Vermenigvuldigen in het complexe vlak

We komen even terug op het worteltrekken voor complexe getallen. We hadden gezien hoe we voor een gegeven complex getal $x+i\cdot y$ een complex getal $z=a+i\cdot b$ kunnen vinden met $z^2=x+i\cdot y$. Maar met de meetkundige interpretatie van de vermenigvuldiging is dit eigenlijk veel makkelijker:

Een complex getal $w$ met poolcoördinaten $(r, \varphi)$ heeft de wortel $z$ met poolcoördinaten $(\sqrt{r}, \frac{\varphi}{2})$. Merk op dat ook het getal met poolcoördinaten $(\sqrt{r}, \frac{\varphi}{2}+\pi)$ een wortel is, omdat we de hoeken steeds tussen 0 en $2\pi$ brengen en dus $2 \cdot (\varphi/2 + \pi) = \varphi + 2\pi = \varphi$. Dit is geen verrassing, want voor een complex getal $z$ met argument $\arg(z) = \varphi$ is $\arg(-z) = \varphi + \pi$ en natuurlijk weten we dat $z^2 = (-z)^2$, dus met $z$ is ook $-z$ een wortel uit $w$.

Op dezelfde manier kunnen we ook $n$-de machtswortels trekken. Een complex getal $w$ met $|w| = r$ en $\arg(w) = \varphi$ heeft als $n$-de machtwortel het getal $z = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\varphi}{n}))$, dus moeten we uit de absolute waarde de $n$-de wortel trekken en het argument door $n$ delen. Ook hier zijn behalve van het getal $z$ met $\arg(z) = \frac{\varphi}{n}$ de getallen met absolute waarde $\sqrt[n]{r}$ en argumenten $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ voor $k = 1, \ldots, n-1$ $n$-de machtswortels uit $w$, want bij het vermenigvuldigen met $n$ worden al deze hoeken gelijk aan $\varphi$.

Een belangrijke toepassing van de meetkundige interpretatie van het vermenigvuldigen van complexe getallen is de *Regel van de Moivre*. Een complex getal $z$ met absolute waarde 1 kunnen we schrijven als $z = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$, waarbij $\varphi = \arg(z)$. Maar de $n$-de macht $z^n$ kunnen we nu makkelijk berekenen, de absolute waarde is nog steeds 1 en het argument is het $n$-voud van het argument van $z$, dus $\arg(z^n) = n \arg(z) = n\varphi$. Dit betekent dat $z^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$ en we krijgen zo de regel van de Moivre:

$$(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi).$$

Als toepassing hiervan kunnen we eenvoudig formules voor de *sinus* of *cosinus* van dubbele of drievoudige hoeken afleiden, bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \Re(\cos(2x) + i \cdot \sin(2x)) = \Re((\cos(x) + i \cdot \sin(x))^2) \\ &= \Re(\cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i \cdot \cos(x)\sin(x)) \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \Im(\cos(3x) + i \cdot \sin(3x)) = \Im((\cos(x) + i \cdot \sin(x))^3) \\ &= \Im(\cos^3(x) + i \cdot \cos^2(x)\sin(x) - \cos(x)\sin^2(x) - i \cdot \sin^3(x)) \\ &= \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x).\end{aligned}$$

We hebben gezien dat we met complexe getallen net zo goed als met reële getallen kunnen reken (ook al is de vermenigvuldiging iets ingewikkelder) en dat we vergelijkingen veel beter kunnen oplossen dan in $\mathbb{R}$. Maar er is ook een belangrijk nadeel van de complexe getallen tegenover de reële getallen: We kunnen van twee reële getallen steeds zeggen dat één van de twee groter is dan de andere (als ze niet gelijk zijn). We zeggen namelijk dat $x > y$ als $x - y > 0$ en voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ geldt $x > 0$, $x = 0$ of $-x > 0$. Verder is voor twee positieve getallen $x, y > 0$ ook de som $x + y$ en het product $xy$ positief.

Een ordening met deze eigenschappen kunnen we op $\mathbb{C}$ niet contrueren, want als er een $z \in \mathbb{C}$ is met $z > 0$, dan is $z^2 > 0$. Maar voor $z \neq 0$ is of $z > 0$ of $-z > 0$ en dus is in elk geval $z^2 > 0$. Omdat we elk complex getal $a$ in de vorm $a = z^2$ kunnen schrijven, zijn dus alle getallen $z \in \mathbb{C}$ positief. In het bijzonder is $1 > 0$ en $-1 > 0$ en dus $0 = -1 + 1 > 0$ (omdat $-1$ en $1$ positief zijn) en dit is onmogelijk. De enige manier om de complexe getallen zo te ordenen dat sommen en producten van positieve getallen weer positief zijn, is de triviale ordeningen, waar alle getallen even groot zijn als 0, maar daar hebben niets aan.

## 1.4 Complexe conjugatie

Een belangrijke operatie op de complexe getallen is de *complexe conjugatie*

$$z = a + i \cdot b \leftrightarrow a - i \cdot b =: \overline{z}$$

d.w.z. de spiegeling in de $x$-as van het complexe vlak. In het bijzonder hebben $z$ en $\overline{z}$ dezelfde absolute waarde $\sqrt{a^2 + b^2}$ en is het argument van $\overline{z}$ het negatieve van het argument van $z$, dus $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

Er geldt $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$, want $(a + i \cdot b)(a - i \cdot b) = a^2 + b^2$. Dit geeft een handige methode, om complexe getallen te inverteren:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$$

de inverse van $z$ is dus de complex geconjugeerde gedeelt door het kwadraat van de absolute waarde. Dat de inverse van $z$ een veelvoud van $\overline{z}$ moet zijn, hadden we natuurlijk ook al uit de argumenten kunnen aflezen, want uit $\arg(1) = 0$ volgt $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) = \arg(\overline{z})$.

Met behulp van de complex geconjugeerde kunnen we ook reëel en imaginair deel van een getal $z$ makkelijk uitdrukken: $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ en $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$. In het bijzonder is een getal $z \in \mathbb{C}$ een reëel getal, dan en slechts dan als $\overline{z} = z$.

Met behulp van de complexe conjugatie vinden we ook een belangrijke eigenschap van de complexe nulpunten van veeltermen met reële coëfficiënten. Stel $f(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0$ is een veelterm met $c_i \in \mathbb{R}$ en stel dat $a \in \mathbb{C}$ met $f(a) = 0$. Dan is natuurlijk ook $\overline{f(a)} = 0$, dus $\overline{c_n a^n} + \ldots + \overline{c_1 a} + \overline{c_0} = c_n \overline{a}^n + \ldots + c_1 \overline{a} + c_0 = 0$ en dus is ook $\overline{a}$ een nulpunt van $f(z)$. De niet-reële nulpunten van $f(z)$ komen dus in paren van complex geconjugeerden.

## 1.5 Machtsverheffen

We hebben inmiddels alle bewerkingen en operaties op de reële getallen kunnen uitbreiden tot de complexe getallen, met uitzondering van het machtsverheffen met complexe exponenten.

Om te beginnen moeten we zeker iets kunnen zeggen over $e^{i \cdot y}$ waarbij $y \in \mathbb{R}$. Als dit lukt, kunnen we ook voor $z = x + i \cdot y$ de $e$-macht definiëren, namelijk door $e^z = e^{x + i \cdot y} = e^x \cdot e^{i \cdot y}$. Uiteindelijk zullen we dan (net als voor de reële getallen) $a^z$ definiëren door $a^z = e^{\log(a) z}$, maar zo ver zijn we nog niet.

In de volgende les zullen we de complexe exponentiële functie en logaritme nader bekijken die een zuivere motivatie voor onze definite van $e^{i\varphi}$ geven, maar we kunnen ook nu al inzien dat de volgende definitie plausiebel is:

$$e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi).$$

Deze definite zegt, dat $e^{i\varphi}$ één keer rond de eenheidscirkel loopt als $\varphi$ van 0 tot $2\pi$ loopt. Als we $i$ (net als $\sqrt{2}$ of $\pi$) als een constante beschouwen, is de functie $f(\varphi) := e^{i\varphi}$ een functie van een reële veranderlijke die we kunnen afleiden, en dit geeft $f'(\varphi) = (e^{i\varphi})' = (\cos(\varphi)+i\cdot\sin(\varphi))' = -\sin(\varphi)+i\cdot\cos(\varphi) = i \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = i \cdot e^{i\varphi} = i \cdot f(\varphi)$. Maar dit is precies wat we van de exponentiële functie verwachten.

Verder geldt $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$ omdat we getallen op de eenheidscirkel vermenigvuldigen door hun argumenten op te tellen, dus lijkt onze definitie met de eigenschappen van de reële exponentiële funcite overeen te komen.

Met behulp van de relatie $e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ en de symmetrieeigenschappen $\cos(-x) = \cos(x)$ en $\sin(-x) = -\sin(x)$ kunnen we nu $\sin(x)$ en $\cos(x)$ alleen maar met de exponentiële functie uitdrukken, want er geldt:
$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) + \cos(-\varphi) + i \cdot (\sin(\varphi) + \sin(-\varphi)) = 2\cos(\varphi)$,
$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - \cos(-\varphi) + i \cdot (\sin(\varphi) - \sin(-\varphi)) = 2i\sin(\varphi)$, en dus

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \text{ en } \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

We komen nu nog een keer op de regel van de Moivre terug, met onze nieuwe definite ziet die er namelijk heel eenvoudig uit: $(e^{i\varphi})^n = e^{i(n\varphi)}$. Ook de opteltheorema's $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$ en $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)$ kunnen we meteen uit de reële en imaginaire delen van $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$ aflezen.

Als toegift een beroemde formule, die de meest belangrijke constanten 0, 1, $i$, $e$ en $\pi$ in een relatie brengt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

## 1.6 Toepassingen van de complexe getallen

Op grond van de samenhang $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ zijn complexe getallen in alle toepassingen belangrijk die met golven te maken hebben. Voorbeelden hiervoor zijn:

- Het berekenen van het overlappen van twee of meer golven (bijvoorbeeld watergolven, maar ook elektromagnetische golven).
- Kwantummechanica: een deeltje wordt door een golf-functie beschreven, waarvan de absolute waarde de kans aangeeft, het deeltje in een zeker gebied te vinden.
- Spraakherkenning: een spraaksignaal wordt beschreven door een som van *sinus*-functies voor verschillende frequenties, waarbij het patroon van frequenties (formanten) karakteristiek voor de klinkers is. Het bepalen van dit patroon uit een signaal wordt met behulp van de Fourieranalyse bepaald, die we later gaan behandelen.

- Beeldherkenning: een plaatje wordt gezien als een bron van lichtgolven, waarbij verschillende kleuren met verschillende frequenties corresponderen en de intensiteit met de amplitude van de golven.

## Belangrijke begrippen in deze les

- complexe getallen
- reëel deel, imaginair deel
- poolcoördinaten, absolute waarde, argument
- complexe conjugatie
- relatie $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

## Opgaven

1. Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $a + i \cdot b$ en in poolcoördinaten:

   $$\text{(i) } (1 - i\sqrt{3})^2 \qquad \text{(ii) } \frac{1+i}{i-1} \qquad \text{(iii) } \frac{3+4i}{2-i}$$

   Hoe kan men modulus en argument van deze getallen bepalen, zonder de getallen eerst in de vorm $a + i \cdot b$ te brengen?

2. Teken een punt $z \in \mathbb{C}$ op de eenheidscirkel (d.w.z. met $|z| = 1$). Construeer de punten $z^2$, $z^3$, $z^{-1}$, $-z$, $\overline{z}$, $i \cdot z$, $-i \cdot z$. Ga in de figuur na dat $z + z^{-1}$ reëel is.

3. Bereken de (complexe) oplossingen van de vergelijking $z^2 + 3z + 4 = 0$.

4. Vind de oplossingen $z \in \mathbb{C}$ voor de volgende vergelijkingen:

   (i) $z^3 = i$, (ii) $z^2 - 2z + 2 = 0$, (iii) $z^4 = -1$, (iv) $(3+4i)z^2 + 5z + (2-4i) = 0$.

   Teken de wortels in het complexe vlak.

5. Voor welke complexe getallen $z = x + i \cdot y$ is $\Re(z^2) > 0$?

6. Waar liggen in het complexe vlak alle $z$ waarvoor geldt $\Re\left(\frac{z+i}{z-2i}\right) = 1$?

7. Druk met behulp van de regel van de Moivre:

   (i) $\cos(4\varphi)$ uit in $\cos(\varphi)$ en $\sin(\varphi)$,

   (ii) $\sin(3\varphi)$ uit in $\sin(\varphi)$ (zonder $\cos(\varphi)$).

8. Zij $L_1 \subset \mathbb{C}$ de lijn met $\Re(z) = \Im(z)$ en $L_2 \subset \mathbb{C}$ de lijn met $\Im(z) = 1$. Wat zijn de beelden van deze lijnen onder de afbeelding $z \mapsto z^{-1}$ (d.w.z. de verzamelingen $\{z^{-1} \mid z \in L_1(L_2)\}$)?

9. Welke baan doorloopt $w := \frac{z^2 - z + 1}{2z}$ als $z$ de eenheidscirkel doorloopt (d.w.z. $z = e^{ix}$ met $x \in [0, 2\pi]$)?

10. Welke baan doorloopt $z := \frac{x-i}{x+i}$ als $x$ langs de reële as loopt (in positieve richting)?