Les 2 Complexe functies

Nadat we de complexe getallen hebben leren kennen, is het een voor de hand liggende vraag of hiervoor net als voor de reële getallen ook functies bestaan.

Één soort van functies hebben we in principe al gezien, ook al hebben we ze niet expliciet zo genoemd, namelijk veeltermen. Een complexe veelterm is van de vorm $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$, waarbij de coëfficiënten c_i complexe getallen zijn, bijvoorbeeld is $z^2 + 2iz + \sqrt{-3}$ een complexe veelterm. Omdat we weten hoe we complexe getallen optellen en vermenigvuldigen, kunnen we de waarde van $f(z)$ voor een willekeurige complexe z berekenen en hebben zo een functie van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$ gedefinieerd.

Bij reële functies hebben we veel over een functie $f(x)$ kunnen zeggen, door de grafiek $(x, f(x))$ de bekijken. Dit is bij complexe functies echter moeilijk, want voor het domein $\mathbb{C}$ (waar een functie op gedefinieerd is) hebben we al een 2-dimensionaal vlak nodig, en voor de functiewaarden ook nog eens een 2-dimensionaal vlak, zo dat we voor de grafiek een 4-dimensionaal plaatje nodig hebben.

Maar we kunnen wel een redelijk indruk van een complexe functie krijgen door de volgende methoden:

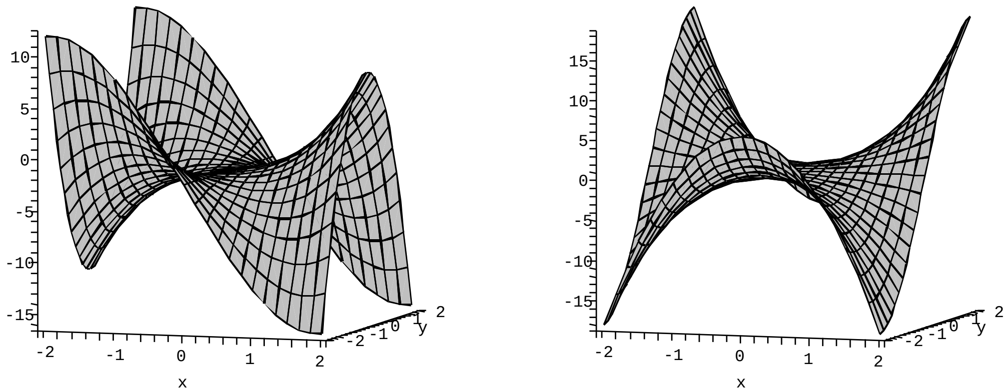
(1) Bekijk de reële en imaginaire delen van de functie apart. Dit betekent dat we een complexe functie $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ opsplitsen in twee functies met reële waarden, namelijk $g(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \Re(f(z)$ en $h(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, z \mapsto \Im(f(z)$. Maar voor een afbeelding $g(z)$ van $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{R}$ kunnen we een 3-dimensionale grafiek maken, door de punten $(\Re(z), \Im(z), g(z))$ te bekijken.

(2) We kunnen kijken waar een functie $f(z)$ zekere lijnen op afbeeldt, bijvoorbeeld de lijnen parallel met de x-as (dus de complexe getallen met hetzelfde imaginaire deel), de lijnen parallel met de y-as (de complexe getallen met hetzelfde reële deel), lijnen door de oorsprong (de complexe getallen met hetzelfde argument). We kunnen ook kijken wat met cirkels rond de oorsprong gebeurt, dus met complexe getallen met dezelfde absolute waarde.

Als voorbeeld laat Figuur I.4 de reële en imaginaire delen van de derdegraads veelterm $f(z) = z^3 + z - 2$ zien. Met $z = x + iy$ geldt $\Re(f(z)) = x^3 - 3xy^2 + x - 2$ en $\Im(f(z)) = -y^3 + 3x^2 y + y$.

2.1 Benadering door veeltermen

We hebben in Wiskunde 1 een aantal belangrijke reële functies gezien, bijvoorbeeld de exponentiële functie $\exp(x)$ of de trigonometrische functies $\sin(x)$ en $\cos(x)$. Toen hebben we wel eigenschappen van deze functies aangegeven, bijvoorbeeld dat $\exp(x)$ gekarakteriseerd is door $\exp(x)' = \exp(x)$ en $\exp(0) = 1$. Maar hoe we de waarde van zo'n functie echt kunnen berekenen, of hoe een zakrekenmachine, GRM of computer de waarden van zo'n functie berekend, hebben we toen niet gezien.



Figuur I.4: Reëel en imaginair deel van $z^3 + z - 2$

De methode die hiervoor (met zekere variaties) wordt gebruikt, is een functie te benaderen door een veelterm. Dit lijkt op het eerste gezicht te eenvoudig om efficiënt te werken, maar men kan bewijzen dat op een begrensd gebied een continue functie door veeltermen willekeurig goed benaderd kan worden. Hiervoor zijn natuurlijk voor een hogere nauwkeurigheid veeltermen van hogere graad nodig.

Eén mogelijkheid om een benaderende veelterm te vinden gebruikt de methode van *interpolatie*. We weten dat door 2 punten met verschillende x-coördinaten een eenduidige lineaire functie vastgelegd is, met als grafiek de lijn door de twee punten. Net leggen 3 punten (weer met verschillende x-waarden) eenduidig een parabool, dus een kwadratische functie vast. Op een analoge manier kan men aantonen dat een n-de graads veelterm eenduidig door $n+1$ punten met verschillende x-waarden vastgelegd is. Deze veelterm kunnen we zelfs expliciet aangeven, met behulp van de *Lagrange interpolatie*:

De veelterm $p(x)$ van graad n door de punten $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ is gegeven door

$$p(x) := y_0 \cdot L_0(x) + y_1 \cdot L_1(x) + \ldots + y_n \cdot L_n(x), \text{ waarbij}$$

$$L_k(x) := \frac{x - x_0}{x_k - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_k - x_1} \cdots \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_k - x_n}.$$

De grap is dat de functie $L_k(x)$ voor x_k de waarde 1 en voor alle andere x_i de waarde 0 oplevert.

Dit is inderdaad vaak een heel handige methode, maar er zijn ook een paar problemen als we de interpolatie willen gebruiken voor het benaderen van een functie:

(i) Omdat we een functie $f(x)$ door een veelterm willen benaderen, moeten we de y_k in principe al als functiewaarden $y_k = f(x_k)$ kunnen berekenen, en eigenlijk willen we de veelterm juist bepalen om de functiewaarden te kunnen benaderen.

(ii) Afhankelijk van hoe we de x_k kiezen, kan de veelterm $p(x)$ sterk van de functie $f(x)$ afwijkingen, bijvoorbeeld als naburige x_k te ver uit elkaar liggen.

(iii) In principe zouden we op gebieden waar de functie $f(x)$ heel onregelmatig is veel basispunten x_k willen hebben, maar om hierover te kunnen beslissen moeten we naar de hogere afgeleiden van $f(x)$ kijken.

Het laatste punt geeft aanleiding voor een andere manier om een benaderende veelterm te bepalen. Deze gebruikt inderdaad de hogere afgeleiden van $f(x)$, maar slechts in een enkel punt.

We hebben het hier over de zogeheten *Taylor veelterm*, die een functie $f(x)$ in de omgeving van een punt x_0 benadert. Het idee is, een veelterm te construeren die in het punt x_0 niet alleen maar dezelfde functiewaarde als $f(x)$ heeft, maar ook dezelfde eerste afgeleide, dezelfde tweede afgeleide enzovoorts.

De *Taylor veelterm* $p(x) := p_{f,k,x_0}(x)$ *van graad* k *voor een continue functie* $f(x)$ *in het punt* x_0 is gekarakteriseerd door de eigenschappen

$$p(x_0) = f(x_0), \quad p'(x_0) = f'(x_0), \quad p''(x_0) = f''(x_0), \ \dots \ p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0),$$

d.w.z. de Taylor veelterm heeft in het punt x_0 dezelfde afleidingen (tot orde k) als $f(x)$. Men gaat na dat deze eigenschappen een eenduidige veelterm van graad k bepalen, namelijk de veelterm

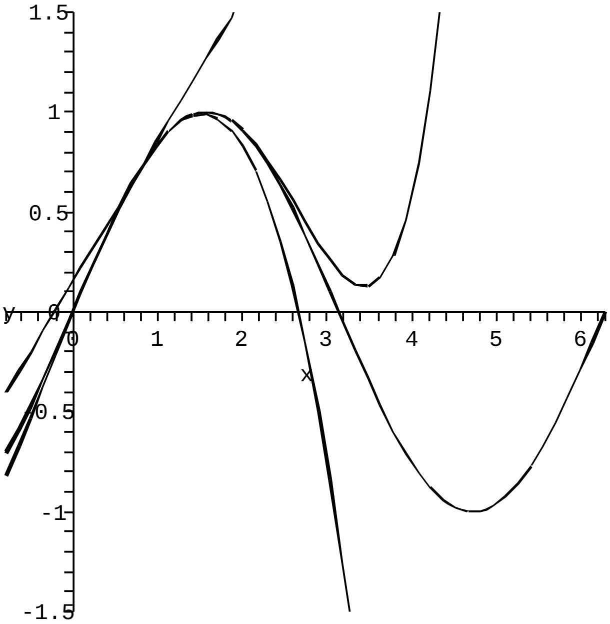
$$p(x) = c_k(x - x_0)^k + c_{k-1}(x - x_0)^{k-1} + \ldots + c_1(x - x_0) + c_0$$

met coëfficiënten

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots \quad c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Dat dit inderdaad de coëfficiënten zijn, ziet men door het uitschrijven van de afgeleiden van $p(x)$, invullen van x_0 en vergelijken met $f^{(n)}(x_0)$:

$$\begin{aligned}
p(x) &= c_k(x - x_0)^k + \ldots + c_3(x - x_0)^3 + c_2(x - x_0)^2 + c_1(x - x_0) + c_0 \\
&\Rightarrow p(x_0) = c_0 \Rightarrow c_0 = f(x_0) \\
p'(x) &= k \cdot c_k(x - x_0)^{k-1} + \ldots + 3 \cdot c_3(x - x_0)^2 + 2 \cdot c_2(x - x_0) + c_1 \\
&\Rightarrow p'(x_0) = c_1 \Rightarrow c_1 = f'(x_0) \\
p''(x) &= k(k-1) \cdot c_k(x - x_0)^{k-2} + \ldots + 3 \cdot 2 \cdot c_3(x - x_0) + 2 \cdot c_2 \\
&\Rightarrow p''(x_0) = 2 \cdot c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(x_0)}{2} \\
p'''(x) &= k(k-1)(k-2) \cdot c_k(x - x_0)^{k-3} + \ldots + 3 \cdot 2 \cdot c_3 \\
&\Rightarrow p'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!} \quad \text{enzovoorts.}
\end{aligned}$$



Figuur I.5: Benadering van $\sin(x)$ door de Taylor veeltermen van graad 1, 3 en 5 in het punt $x_0 = \frac{\pi}{4}$

Het idee achter de geeiste eigenschappen is dat het overeenstemmen van de hogere afgeleiden ervoor zorgt dat de grafiek van de Taylor veelterm zich rond het punt x_0 steeds beter aan de grafiek van $f(x)$ vlijt.

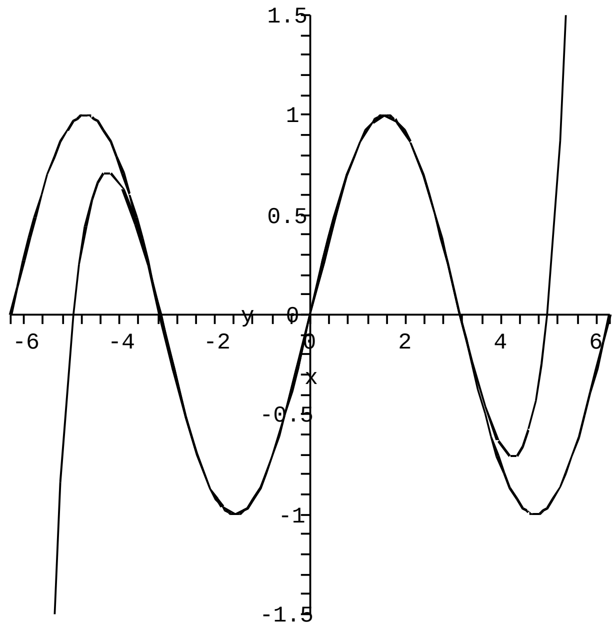
In Figuur I.5 zien we het effect van Taylor veeltermen van verschillende graad. Terwijl de veelterm van graad 1 de grafiek van $\sin(x)$ alleen maar raakt (omdat $\sin(x)$ geen rechte stukken heeft), is de veelterm van graad 3 al een redelijke benadering tussen ongeveer 0.5 en 1.5, voordat hij naar beneden wegduikt. Met de veelterm van graad 5 gaat het iets langer goed, maar dan gaat deze naar boven weg.

2.2 Taylor reeksen

Door de graad van de Taylor veelterm te laten groeien, krijgen we (in goedaardige gevallen) een steeds betere benadering van een functie, en meestal ook op een groter interval. In Figuur I.6 zien we bijvoorbeeld, dat de Taylor veelterm van graad 10 (deze keer in het punt $x_0 = 0$ berekend) tussen $-\pi$ en π bijna niet van de functie $\sin(x)$ te onderscheiden is.

Men krijgt dus het idee dat het steeds beter gaat worden als we de graad verhogen, en het beste zou zijn, helemaal niet te stoppen maar oneindig door te gaan. Dit doen we dus!

Op deze manier krijgen we de *Taylor reeks* $T(x) := T_{f,x_0}(x)$ van $f(x)$ in het



Figuur I.6: Benadering van $\sin(x)$ door de Taylor veelterm van graad 10 in het punt $x_0 = 0$

punt x_0, gedefinieerd door

$$T(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

De Taylor reeks is dus de limiet van de Taylor veeltermen als we de graad naar oneindig laten lopen, dus $T_{f,x_0}(x) = \lim_{k\to\infty} p_{f,x_0,k}(x)$. Over deze limiet en de Taylor reeks moeten we een paar belangrijke opmerkingen kwijt:

(i) Natuurlijk geldt $T(x_0) = f(x_0)$, omdat alle termen in de som voor $n > 0$ wegvallen. Maar het is niet noodzakelijk zo dat de rij voor $T(x)$ voor $x \neq x_0$ überhaupt convergeert. Voor goedaardige functies geldt dit wel, tenminste in een zeker interval rond x_0. De vraag of en waar de Taylor reeks van een functie convergeert, geeft aanleiding tot belangrijke en diepe stellingen in de wiskunde.

(ii) Zelfs als de Taylor reeks voor een waarde van x convergeert, hoeft de limiet niet de juiste functiewaarde te zijn. Een vreselijk voorbeeld hiervoor is de functie $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$ die door $f(0) := 0$ continu naar 0 voortgezet wordt. Deze functie is zelfs willekeurig vaak differentieerbaar, en er geldt

$f^{(n)}(0) = 0$ voor alle n. Dit betekent, dat de Taylor reeks van $f(x)$, ontwikkeld in het punt 0, de 0-functie is, terwijl $f(x) \neq 0$ voor $x \neq 0$.

(iii) De grootste afstand r zo dat $T(x)$ voor alle x met $|x - x_0|$ naar $f(x)$ convergeert noemt men de *convergentiestraal* van $T(x)$.

(iv) Als men voor het benaderen van een functiewaarde de Taylor reeks $T(x)$ gebruikt en deze ergens afbreekt (dus eigenlijk neemt men de Taylor veelterm van een zekere graad), kan men vaak de fout tussen de benadering en de functiewaarde $f(x)$ expliciet afschatten. Dit is in het bijzonder het geval als de afgeleiden $f^{(n)}(x_0)$ begrensd zijn, zoals bij $\sin(x)$ of $\cos(x)$.

Voorbeelden

(1) $\exp(x)$:
We bekijken de Taylor reeks in het punt $x_0 = 0$, daar geldt $\exp^{(n)}(x_0) = \exp(0) = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De Taylor veelterm van graad k voor $\exp(x)$ in het punt 0 is dus

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{k!}x^k = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$$

en de Taylor reeks in het punt 0 is de limiet van $k \to \infty$ van deze veeltermen, dus

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \ldots.$$

Er laat zich aantonen dat deze Taylor reeks convergentiestraal ∞ heeft, d.w.z. dat $T(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ naar $\exp(x)$ convergeert. Omdat de noemers met $n!$ heel snel groeien, is de convergentie erg goed en kunnen we de exponentiële functie al met weinig termen goed benaderen.

(2) $\sin(x)$:
Ook voor de sinus functie bepalen we de Taylor reeks in $x_0 = 0$. Merk op dat $\sin''(x) = -\sin(x)$, $\sin'''(x) = -\sin'(x)$ en $\sin^{(4)}(x) = \sin(x)$, hieruit volgt dat de afgeleiden van $\sin(x)$ in het punt $x = 0$ periodiek $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0$ enz. zijn, dus $\sin^{(2n)}(0) = 0$ en $\sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. De Taylor reeks van $\sin(x)$ in het punt 0 is dus

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots.$$

(3) $\cos(x)$:
Ook voor de cosinus geldt dat $\cos''(x) = -\cos(x)$, $\cos'''(x) = -\cos'(x)$ en $\cos^{(4)}(x) = \cos(x)$, dus zijn hier de afgeleiden periodiek $0, -1, 0, 1$ enz., dus $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$ en $\cos^{(2n+1)}(0) = 0$. De Taylor reeks van $\cos(x)$ in het punt 0 is dus

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots.$$

Net als bij de exponentiële functie is de convergentiestraal ook bij de Taylor reeks van de sinus en cosinus functies oneindig. Verder is ook hier de convergentie van de Taylor reeks erg goed, zo dat we snel een goede benadering van $\sin(x)$ of $\cos(x)$ vinden.

(4) $\log(x)$:
Omdat de logaritme voor $x = 0$ niet gedefinieerd is, moeten we hier de Taylor reeks in een andere punt bepalen, en we kiezen hiervoor $x = 1$. Maar omdat het uiteindelijk toch prettiger is om een reeks met termen x^n en niet $(x-1)^n$ te hebben, gebruiken we een klein trucje: In plaats van $\log(x)$ kijken we naar de functie $f(x) := \log(x+1)$ en bepalen hiervoor de Taylor reeks in het punt $x_0 = 0$.

Er geldt $f'(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1}$, $f''(x) = (-1)\cdot(x+1)^{-2}$, $f'''(x) = (-1)(-2)\cdot(x+1)^{-3}$, $f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)\cdot(x+1)^{-4}$ en algemeen $f^{(n)}(x) = (-1)(-2)(-3)\ldots(-(n-1))\cdot(x+1)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(x+1)^n}$. In het bijzonder is $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ en dus $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. De Taylor reeks van $\log(x+1)$ in het punt 0 is dus

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Merk op dat deze Taylor reeks hoogstens convergentiestraal 1 kan hebben, omdat de logaritme in 0 niet gedefinieerd is. Dit is echter ook de convergentiestraal, we kunnen met deze reeks dus alleen maar waarden in het interval $(0,2)$ bepalen. Maar dit is ook geen probleem voor het berekenen van $\log(x)$, want voor $x \geq 2$ is $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ en dit ligt in het interval en we berekenen $\log(x)$ door $\log(x) = -\log(\frac{1}{x})$. Er valt wel nog op te merken, dat de convergentie van deze reeks veel slechter is dan die voor $\exp(x)$, $\sin(x)$ of $\cos(x)$, omdat de noemers met n en niet met $n!$ groeien.

2.3 Complexe exponentiële functie

We hebben gezien dat we de (reële) exponentiële functie door de Taylor reeks $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ kunnen beschrijven, en omdat de reeks voor alle x naar $\exp(x)$ convergeert mogen we zelfs zeggen, dat de twee gelijk zijn, dus

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Als we nu over een definitie voor de exponentiële functie op de complexe getallen nadenken, willen we natuurlijk dat die op de reële getallen met de reële exponentiële functie overeen komt. Het is dus niet zo'n gek idee, de complexe exponentiële functie erdoor te definiëren, dat we complexe getallen in de Taylor reeks van de reële exponentiële functie invullen. Men zegt hiervoor ook dat we een reële functie op de complexe getallen *voortzetten*. We hebben dus (als definitie!):

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \text{ voor } z \in \mathbb{C}.$$

Om te rechtvaardigen dat deze definitie zinvol is, merken we het volgende op:

(i) Om te zien dat de reeks voor $\exp(z)$ convergent is, is het voldoende dat de reeks over de absolute waarden van de termen convergent is, men zegt hiervoor dat de reeks *absoluut convergent* is. Maar $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \exp(|z|)$, dus volgt de absolute convergentie van de reeks voor $\exp(z)$ uit de convergentie van de Taylor reeks voor de reëele exponentiële functie.

(ii) We kunnen $\exp(z_1+z_2)$ (in principe) uitrekenen door z_1+z_2 in de reeks in te vullen, dus $\exp(z_1+z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$. Aan de andere kant berekent men $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ door de reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$ te vermenigvuldigen. Door de coëfficiënten van $z_1^j z_2^k$ in $\exp(z_1+z_2)$ en $\exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$ te vergelijken, ziet men dat inderdaad $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$, net als we dat van de reëele exponentiële functie gewend zijn.

(iii) In Wiskunde 1 hadden we gezien dat de exponentiële functie gekarakteriseerd is door de eigenschappen dat $\exp(x)' = \exp(x)$ en $\exp(0) = 1$. We zullen in de volgende les nader op het differentiëren van complexe functies ingaan, maar voor een functie die door een reeks gegeven is zou men hopen de afgeleide te vinden door de reeks termsgewijs af te leiden. Voor functies met een absoluut convergente reeks is dit inderdaad juist, dus hebben we voor de complexe exponentiële functie:

$$\exp(z)' = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!})' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z).$$

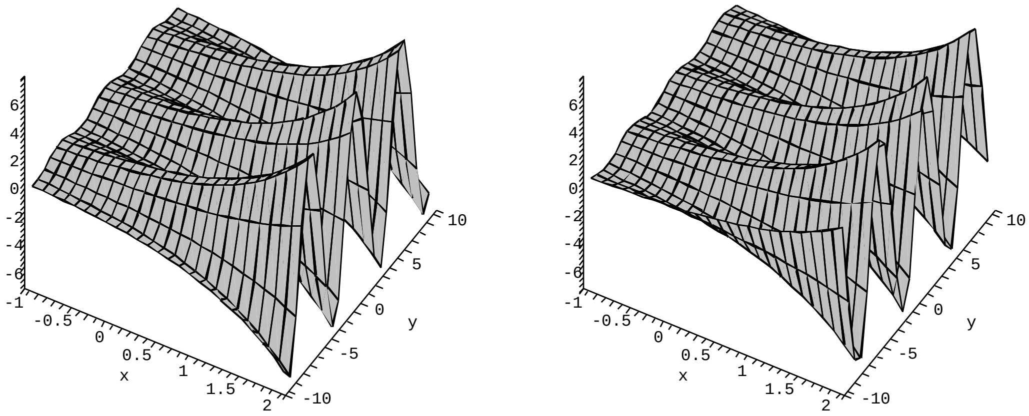
De complexe exponentiële functie heeft dus ook de eigenschappen die de reëele exponentiële functie karakteriseren.

Als we een beter idee van de complexe exponentiële functie willen krijgen, is het verstandig naar de reëele en imaginaire delen te kijken. Voor $z \in \mathbb{C}$ met $\Re(z) = x$ en $\Im(z) = y$ (dus $z = x+iy$) geldt $\exp(x+iy) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$. Hieruit volgt:

$$\Re(\exp(x+iy)) = \exp(x)\cos(y) \quad \text{en} \quad \Im(\exp(x+iy)) = \exp(x)\sin(y).$$

In Figuur I.7 zijn de reëele en imaginaire delen van de complexe exponentiële functie te zien.

Met onze definitie van de complexe exponentiële functie kunnen we nu eindelijk ook de definitie $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)$ uit de vorige les toelichten. Hiervoor vullen we $z = i\varphi$ in de reeks voor $\exp(z)$ in, waarbij we rekening ermee houden



Figuur I.7: Reëel en imaginair deel van $\exp(z)$

dat $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ en $i^4 = 1$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= 1 + i \cdot \varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \cdot \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i \cdot \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots \\
&= (1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots) + i \cdot (\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \right) + i \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi).
\end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we hierbij gebruik van de Taylor reeksen voor $\cos(x)$ en $\sin(x)$ gemaakt.

Bij de overgang van de reële naar de complexe exponentiële functie moeten we wel ook afscheid van een vertrouwde eigenschap namen. Voor de reële getallen weten we dat de exponentiële functie injectief is, d.w.z. dat $e^{x_1} = e^{x_2}$ dan en slechts dan als $x_1 = x_2$. De reden hiervoor is dat de exponentiële functie op $\mathbb{R}$ strikt stijgend is. Er geldt namelijk: $e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}/e^{x_2} = e^{x_1 - x_2} = 1$, en dit is alleen maar het geval als $x_1 - x_2 = 0$, dus $x_1 = x_2$.

Als we hetzelfde argument op de complexe exponentiële functie toepassen, beleven we een kleine verrassing. Er geldt weer dat $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1$. Maar voor een getal $z = x + iy \in \mathbb{C}$ geldt $e^z = e^x \cdot (\cos(y) + i \sin(y))$ en $|e^z| = e^x$, dus geldt $e^z = 1 \Leftrightarrow e^x = 1, \cos(y) = 1, \sin(y) = 0$ en dit is precies het geval voor $x = 0$ en $y = 2\pi k$ met $k \in \mathbb{Z}$. Er geldt dus voor alle $z \in \mathbb{C}$ dat

$$e^z = e^{z+2\pi i} = e^{z+2\pi i \cdot k} \text{ voor alle } k \in \mathbb{Z}$$

en we zeggen dat de complexe exponentiële functie $2\pi i$-*periodiek* is.

We hadden gezien dat er problemen met de Taylor reeks voor de functie $\exp(-\frac{1}{x^2})$ zijn, omdat de reeks de 0-functie is en niet tegen de goede functiewaarden convergeert. Als we deze functie op de complexe getallen voortzetten, zien we dat we in het punt $z = 0$ helemaal geen continue voortzetting meer kunnen vinden (wat voor de reële getallen wel nog het geval was). Als we namelijk met $z = ix$ langs de imaginaire as lopen, hebben $\exp(-\frac{1}{(ix)^2}) = \exp(\frac{1}{x^2})$ en dit gaat voor $x \to 0$ naar oneindig. Het feit dat we de functie in het complexe vlak niet continu in het punt 0 kunnen voortzetten hangt nauw samen met het feit dat de Taylor reeks op de reële getallen niet tegen de goede functie convergeert.

2.4 Complexe sinus en cosinus functies

Nu dat we hebben gezien dat het voortzetten van de Taylor reeks van $\exp(x)$ op de complexe getallen een succes was, is het voor de hand liggend hetzelfde principe ook op de sinus en cosinus functies toe te passen. We definiëren dus de complexe sinus functie door

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

en de complexe cosinus functie door

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Als we nu nog een keer naar de berekening kijken waarmee we net hebben aangetoond dat $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$, zien we dat we nergens iets speciaals over φ verondersteld hebben. Als we dus precies hetzelfde opschrijven met z in plaats van φ waarbij $z \in \mathbb{C}$ een willekeurig complex getal is, vinden we de relatie

$$e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z).$$

Maar voor de boven aangegeven definities van $\cos(z)$ en $\sin(z)$ geldt net als op de reële getallen, dat $\cos(-z) = \cos(z)$ (want $(-z)^{2n} = (-1)^{2n} \cdot z^{2n} = z^{2n}$) en $\sin(-z) = -\sin(z)$ (want $(-z)^{2n+1} = (-z) \cdot (-z)^{2n} = (-z) \cdot z^{2n} = -z^{2n+1}$).
We krijgen dus:
$e^{iz} + e^{-iz} = \cos(z) + \cos(-z) + i \cdot (\sin(z) + \sin(-z)) = 2\cos(z)$,
$e^{iz} - e^{-iz} = \cos(z) - \cos(-z) + i \cdot (\sin(z) - \sin(-z)) = 2i \sin(z)$, en dus

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ en } \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

dus precies dezelfde relaties die we voor reële waarden van z al in de vorige les hebben gezien.

In de zuivere wiskunde wordt eigenlijk alleen maar de complexe exponentiële functie $\exp(z)$ door een reeks gedefinieerd, $\cos(z)$ en $\sin(z)$ worden vervolgens door de relaties $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ en $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

gedefinieerd. Maar voor de toepassingen is uiteindelijk alleen maar de samenhang tussen deze functies belangrijk.

Voor de complexe cosinus en sinus is het uitwerken van de reële en imaginaire delen met iets meer rekenwerk verbonden. We zullen hierbij de hyperbolische functies $\sinh(x)$ en $\cosh(x)$ tegen komen, die we in Wiskunde 1 hebben leren kennen. Voor deze functies geldt:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

We hebben nu:

$$\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} + e^{-ix} \cdot e^{y}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} + \frac{1}{2}(\cos(-x) + i\sin(-x))e^{y} \\
&= \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} + \frac{1}{2}(\cos(x) - i\sin(x))e^{y} \\
&= \cos(x)\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) + i\sin(x)\frac{1}{2}(e^{-y} - e^{y}) \\
&= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y).
\end{aligned}$$

Er geldt dus:

$$\Re(\cos(x+iy)) = \cos(x)\cosh(y) \quad \text{en} \quad \Im(\cos(x+iy)) = \sin(x)\sinh(y).$$

Een soortgelijke berekening voor $\sin(z)$ levert het volgende op:

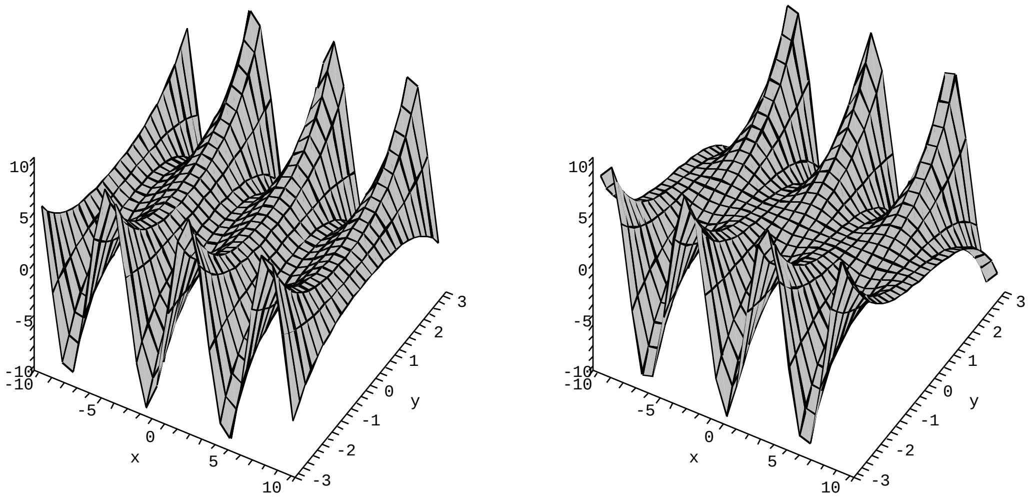
$$\begin{aligned}
\sin(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} - e^{-ix} \cdot e^{y}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}(\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} - \frac{1}{2i}(\cos(-x) + i\sin(-x))e^{y} \\
&= \frac{1}{2}(-i\cos(x) + \sin(x))e^{-y} - \frac{1}{2}(-i\cos(-x) + \sin(-x))e^{y} \\
&= \frac{1}{2}(-i\cos(x) + \sin(x))e^{-y} + \frac{1}{2}(i\cos(x) + \sin(x))e^{y} \\
&= \sin(x)\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) + i\cos(x)\frac{1}{2}(-e^{-y} + e^{y}) \\
&= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y).
\end{aligned}$$

Er geldt dus:

$$\Re(\sin(x+iy)) = \sin(x)\cosh(y) \quad \text{en} \quad \Im(\sin(x+iy)) = \cos(x)\sinh(y).$$

In Figuur I.8 zijn de reële en imaginaire delen van de complexe sinus functie te zien.

We zijn gewend dat sinus en cosinus *begrensde* functies zijn, de waarden liggen gewoon tussen -1 en 1. Voor de complexe versies van deze



Figuur I.8: Reëel en imaginair deel van $\sin(z)$

functies geldt dit echter niet meer: Als we in $\cos(z)$ met z langs de imaginaire as lopen, d.w.z. $z = ix$ invullen, hebben we $\cos(ix) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh(x)$ en dit is een onbegrensde functie.

De reden voor dit ongemaak is dat $\sin(z)$ en $\cos(z)$ zich langs de imaginaire as zo gedragen als de exponentiële functie langs de reële as en andersom.

Voor de volledigheid vermerken we nog, dat ook de hyperbolische functies een voortzetting naar de complexe getallen hebben. Dit gebeurt heel makkelijk door de relaties $\cosh(x) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ en $\sinh(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ van reële x naar complexe z uit te breiden, we definiëren dus:

$$\cosh(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \quad \text{en} \quad \sinh(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}.$$

Ook voor deze functies kunnen we uit de reeks voor de exponentiële functie een reeks afleiden, er geldt

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} + \ldots$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^7}{5040} + \ldots$$

2.5 Complexe logaritme

Als we een complexe logaritme willen definiëren hebben we (minstens) twee mogelijkheden om hieraan te beginnen. Aan de ene kant hebben we de Taylor reeks voor de reële logaritme en na onze goede ervaringen met deze aanpak zou het gek zijn als we deze reeks niet naar de complexe getallen zouden kunnen voortzetten. Aan de andere kant willen natuurlijk dat de complexe logaritme de omkeerfunctie van de complexe exponentiële functie is, dus dat $\log(e^z) = z$ en $e^{\log(z)} = z$. Beide mogelijkheden leiden uiteindelijk tot hetzelfde resultaat dat we nu vanuit het perspectief van de logaritme als omkeerfunctie van $\exp(z)$ gaan bekijken.

Voor een complex getal $z = re^{i\varphi}$ volgt uit de eis $e^{\log(z)} = z$ dat we $\log(z)$ noodzakelijk moeten definiëren door

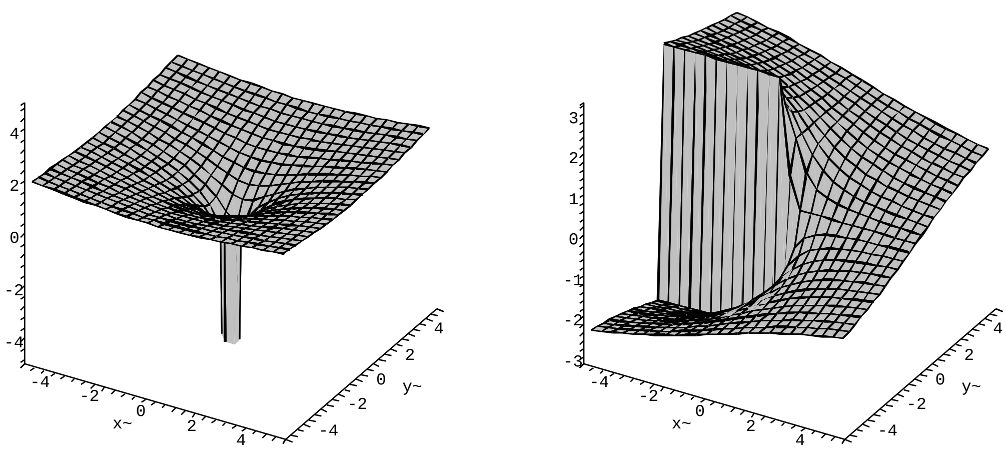
$$\log(re^{i\varphi}) := \log(r) + i\varphi$$

want voor $\log(z) = x + iy$ is $re^{i\varphi} = z = e^{\log(z)} = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = re^{i\varphi}$ en dus $e^x = r$ en $e^{iy} = e^{i\varphi}$, dus $x = \log(r)$ en $y = \varphi$.

Er is wel een kleine complicatie bij deze definitie: Omdat de complexe exponentiële functie $2\pi i$-periodiek is, geldt ook voor $w = \log(z) + 2\pi i$ dat $e^w = z$, het imaginaire deel van $\log(z)$ is dus alleen maar tot op veelvouden van 2π na bepaald. De exponentiële functie beeldt namelijk elke streep $S_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \in (a, a+2\pi]\}$ op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ af en in principe is elke streep even goed. De conventie is echter, dat het imaginaire deel van $\log(z)$ in het interval $(-\pi, \pi]$ ligt. We hebben dus

$$\log(z) = \begin{cases} \log(|z|) + i \arg(z) & \text{als } \arg(z) \in [0, \pi] \\ \log(|z|) + i(\arg(z) - 2\pi) & \text{als } \arg(z) \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

In Figuur I.9 zien we de reële en imaginaire delen van de complexe logaritme. Het is duidelijk dat de het imaginaire deel op de negatieve reële as niet continu is, maar een sprong om 2π heeft.



Figuur I.9: Reëel en imaginair deel van $\log(z)$

Omdat we voor de complexe logaritme een keuze moeten maken in welke streep van breedte 2π het imaginaire deel van $\log(z)$ ligt, krijgen we een probleem dat we bij de reële logaritme niet kennen. Kijken we bijvoorbeeld naar

$z_1 = z_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi}$, dan is duidelijk $\log(z_1) = \log(z_2) = i\frac{2}{3}\pi$ en dus $\log(z_1) + \log(z_2) = i\frac{4}{3}\pi$. Maar $z_1 \cdot z_2 = e^{i(\frac{2}{3}+\frac{2}{3})\pi} = e^{i\frac{4}{3}\pi} = e^{i(-\frac{2}{3})\pi}$ en daarom is $\log(z_1 \cdot z_2) = -\frac{2}{3}\pi$. De relatie $\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ geldt dus niet meer in elk geval, want de imaginaire delen aan de rechter en linker kant kunnen om veelvouden van 2π verschillen. We zeggen daarom, dat de relatie $\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ modulo $2\pi i$ geldt.

Eenzelfde geldt voor de relatie $\log(z^n) = n\log(z)$, ook deze geldt alleen maar modulo $2\pi i$.

Het voordeel van onze keuze van een streep van breedte 2π is, dat de relatie $\log(\frac{1}{z}) = -\log(z)$ wel altijd geldt, omdat de streep met $\Im(z) \in (-\pi, \pi)$ onder de afbeelding $z \to -z$ op zich zelf afgebeeld wordt.

Belangrijke begrippen in deze les

- Taylor veelterm, Taylor reeks
- complexe exponentiële functie $\exp(z)$
- $2\pi i$-periodiciteit van de complexe exponentiële functie
- complexe sinus en cosinus functies $\sin(z)$ en $\cos(z)$
- reële en imaginaire delen van $\exp(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$
- complexe logaritme $\log(z)$

Opgaven

11. Bepaal voor de afbeelding $f(z) := z^2$ de beelden van de lijnen

    (i) $L_1 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x = 2y\}$,
    (ii) $L_2 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x = 2\}$,
    (iii) $L_3 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = -1\}$.

    Teken de beelden van de lijnen in het complexe vlak.

12. Laat zien dat de nulpunten van $\sin(z)$ alle reëel zijn, d.w.z. dat $\sin(z) \neq 0$ als $\Im(z) \neq 0$. Ga na dat hetzelfde ook voor $\cos(z)$ geldt.

13. Bepaal het beeld van de rechthoek $R = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [-1, 1], y \in [\frac{1}{2}, 1]\}$ onder de complexe exponentiële functie. Maak een schets. Kan je algemeen aangeven wat het beeld van een rechthoek $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \in [a, b], \Im(z) \in [c, d]\}$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ is?

14. Schrijf $\log(1 + i)$, $\log(-i)$ en $\log(\frac{2+i}{2-i})$ in de vorm $x + iy$.

15. Vind de oplossingen in $\mathbb{C}$ voor de volgende vergelijkingen:

    $$\text{(i) } e^z = i, \qquad \text{(ii) } e^z = 1 + i \qquad \text{(iii) } \cos(z) = -3.$$

16. We bekijken de afbeelding $f(z) := e^{iz}$.

    (i) Bepaal voor een vaste $w \in \mathbb{C}$ de waarden van z met $f(z) = w$.
    (ii) Bepaal een deel $D \subseteq \mathbb{C}$ van het complexe vlak zo dat $f(z)$ op D een omkeerfunctie heeft. Geef de omkeerfunctie aan.