Les 3 Differentiatie en integratie van complexe functies

We hebben in de vorige les al opgemerkt dat de complexe exponentiële functie $\exp(z)$ de eigenschap $\exp(z)' = \exp(z)$ heeft als we de afgeleide door termsgewijs afleiden van de Taylor reeks berekenen. Hierbij zijn we echter ook ervan uit gegaan dat $(z^n)' = nz^{n-1}$ ook voor de complexe machtsfunctie z^n geldt. In deze les zullen we het differentiëren van complexe functies beter onderbouwen een daarbij zien dat de aanpak uit de vorige les inderdaad goed was.

Als we weten hoe we complexe functies afleiden is de volgende vraag natuurlijk onvermijdelijk, namelijk hoe het met de omkering van het differentiëren, het integreren staat. Ook hier zullen we tot heel bevredigende antwoorden komen.

3.1 Definitie van de afgeleide

Bij reële functies hadden we de afgeleide $f'(x_0)$ in een punt x_0 gedefinieerd als de stijging van de raaklijn in het punt x_0 aan de grafiek van $f(x)$. Voor een complexe functie hebben we al gezien, dat we de reële en imaginaire delen van de functie apart als driedimensionale landschappen (grafieken) kunnen representeren. In een punt van zo'n landschap kunnen we wel een raak*vlak* definiëren, maar het is onduidelijk hoe we uit de raakvlakken voor reëel en imaginair deel van de functie een complex getal zullen maken die we als afgeleide van de functie in dit punt definiëren.

Maar de eigenschap dat de afgeleide de stijging van de raaklijn aangeeft kunnen we ook nog iets anders formuleren: De functie $f(x)$ wordt in een kleine omgeving van een punt goed door de raaklijn benaderd, we noemen daarom de afgeleide ook de *linearisering* van de functie. Dit volgt uit de definitie dat

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ als deze limiet bestaat.}$$

Als we namelijk de definitie van de afgeleide voor kleine waarden van $\Delta x = h$ (en zonder limiet) bekijken, hebben we

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ en dus } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

In een kleine omgeving van x wordt de functie dus goed beschreven door een vermenigvuldiging met $f'(x)$. Preciezer gezegd beeldt de functie het punt x naar $f(x)$ af en een afwijking Δx van x wordt door de functie met $f'(x)$ vermenigvuldigd en op $f(x)$ opgeteld.

Deze interpretatie nemen we nu over als definitie van de complexe afgeleide: De afgeleide $f'(z)$ geeft aan, dat we in een (kleine) omgeving van z de functiewaarden van $f(z)$ kunnen benaderen door een afwijking Δz van z met $f'(z)$ te vermenigvuldigen en bij $f(z)$ op te tellen:

$$f(z + \Delta z) \approx f(z) + f'(z)\Delta z.$$

Dit kunnen we ook zuiver meetkundig interpreteren, want we weten wat vermenigvuldiging met een complex getal $f'(z) = re^{i\varphi}$ betekent, namelijk een schaling met een factor r en een draaiing om φ. In een omgeving van z wordt een complex differentieerbare functie $f(z)$ dus beschreven door een strekking gecombineerd met een draaiing.

De interpretatie van de complexe afgeleide als linearisering van $f(z)$ in een kleine omgeving maakt het noodzakelijk dat we de definitie van de reële afgeleide via de limiet $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ letterlijk overnemen voor complexe functies, door alleen maar (volgens de conventies) de reële variabel x door een complexe variabel z vervangen.

We definiëren dus: Een complexe functie $f(z)$ heet in het punt z_0 (complex) *differentieerbaar*, als de limiet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

bestaat. In dit geval noteren we de afgeleide in het punt z_0 door $f'(z_0)$. Een functie $f(z)$ die in elk punt van zijn domein differentieerbaar is, heet ook een *holomorfe functie* of een *analytische functie*.

Het cruciale punt bij deze definitie is het *bestaan* van de limiet. Voor reële functies kan h alleen maar van links of van rechts naar 0 toe lopen. Dan is het voldoende als de limiet van links en van rechts bestaat en deze twee limieten hetzelfde zijn. Zo zien we bijvoorbeeld dat de functie $f(x) = |x|$ in het punt 0 niet differentieerbaar is omdat de limiet van $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ voor $h > 0$ (dus van rechts) gelijk is aan 1 terwijl de limiet voor $h < 0$ (dus van links) gelijk is aan -1. Maar we hoeven inderdaad niet meer te doen dan van links en van rechts te kijken.

Voor complexe functies is dit een heel ander verhaal, want h kan van rechts of links op de reële as naar 0 lopen, maar ook van boven of beneden op de imaginaire as of langs een willekeurige lijn met $\Im(z) = a \cdot \Re(z)$. En h mag zelfs langs een heel kromme lijn lopen, bijvoorbeeld langs een spiraal die zich om het nulpunt wikkelt. En voor elk van de mogelijke trajecten van h moet de limiet bestaan en steeds dezelfde waarde hebben. Het feit dat h op een willekeurig traject naar 0 toe mag lopen maakt van de complexe differentieerbaarheid een heel sterke eigenschap die vergaande consequenties heeft.

Het voordeel ervan, de afgeleide van een complexe functie net zo te definiëren als voor reële functies, is dat de *rekenregels* voor de afgeleide hetzelfde blijven. Als $f(z)$ en $g(z)$ complex differentieerbare functies zijn, geldt dus:

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$$
$$(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \text{ (productregel)}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} \text{ (quotiëntregel)}$$
$$(f \circ g)'(z) = f(g(z))' = f'(g(z))g'(z) \text{ (kettingregel)}$$

3.2 Differentieerbaarheid

Tot nu toe hebben we nog geen enkele complex differentieerbare functie gezien. Maar we hebben wel al een gok op de afgeleide van $f(z) = z^n$ gedaan, namelijk dat hiervoor $f'(z) = nz^{n-1}$ is, net als we dat van de reële functies gewend zijn. Voor de reële functies hebben dit in Wiskunde 1 per volledige inductie met behulp van de productregel bewezen. Dit is wel elegant, maar een rechtstreekse berekening doet ook geen kwaad. Hierbij hebben we de binomische formule voor $(z+h)^n$ nodig, te weten

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}h^k = z^n + nz^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}h^2 + \ldots + nzh^{n-1} + h^n.$$

Voor $f(z) = z^n$ geldt dus

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \\
&= \frac{1}{h}(z^n + nz^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}h^2 + \ldots + nzh^{n-1} + h^n - z^n) \\
&= nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}h + \ldots + nzh^{n-2} + h^{n-1}
\end{aligned}$$

In de laatste som bevat elke term vanaf de tweede een macht van h, en als we de limiet $h \to 0$ bekijken gaat dus elk van deze termen naar 0. Dit is onafhankelijk van het traject waarop h naar 0 loopt! Daarom bestaat de limiet $lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ en we hebben:

$$\text{Voor } f(z) = z^n \text{ is } f'(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = nz^{n-1}.$$

Dat er bij complexe functies snel iets mis kan gaan zien we bij een heel eenvoudige, onschuldige functie, de complexe conjugatie $f(z) = \overline{z}$. We laten h eerst langs de reële as lopen, het maakt niet uit of van rechts of links. Voor $h \in \mathbb{R}$ geldt $\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{z}+h-\overline{z}}{h} = \frac{h}{h} = 1$, dus is ook de limiet $h \to 0$ gelijk aan 1 als we langs de reële as lopen. Dit is natuurlijk geen verrassing, want op de reële as doet complexe conjugatie niets, en moet dus dezelfde afgeleide hebben als de reële functie $f(x) = x$.

Nu laten we h langs de imaginaire as lopen, hiervoor nemen we $h = i\varepsilon$ met $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Er geldt $\frac{\overline{z+i\varepsilon}-\overline{z}}{i\varepsilon} = \frac{\overline{z}-i\varepsilon-\overline{z}}{i\varepsilon} = \frac{-i\varepsilon}{i\varepsilon} = -1$, dus is de limiet gelijk aan -1 als we langs de imaginaire as lopen.

We kunnen zelfs een willekeurig complex getal op de eenheidscirkel als limiet produceren. Als we langs de lijn vanuit het getal $e^{i\varphi}$ naar 0 lopen, hebben we $h = e^{i\varphi} \cdot \varepsilon$ met $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{z+e^{i\varphi}\varepsilon}-\overline{z}}{e^{i\varphi}\varepsilon} = \frac{\overline{z}+e^{-i\varphi}\varepsilon-\overline{z}}{e^{i\varphi}\varepsilon} = \frac{e^{-i\varphi}\varepsilon}{e^{i\varphi}\varepsilon} = e^{-2i\varphi},$$

dus is de limiet op dit traject gelijk aan $e^{-2i\varphi}$. Maar we kunnen elk getal op de eenheidscirkel als $e^{-2i\varphi}$ schrijven, want als φ van 0 naar $-\pi$ loopt, loopt $e^{-2i\varphi}$ een keer langs de eenheidscirkel.

Het voorbeeld van de complexe conjugatie is een beetje verontrustend, want het is toch heel omslachtig om steeds te testen of de limiet voor alle mogelijke trajecten waarop h naar 0 gaat hetzelfde is. Gelukkig is dit echter niet nodig, er is een stelling die zegt dat het voldoende is om langs de reële en langs de imaginaire as te kijken. Deze stelling gaan we hier niet bewijzen, maar we kunnen wel een motivatie geven.

We hebben al eerder gezien dat het handig is om apart naar de reële en imaginaire delen van een complexe functie te kijken, want hiervoor kunnen we 3-dimensionale plaatjes maken. Als we een complex getal $z \in \mathbb{C}$ in de vorm $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$ schrijven, kunnen we een complexe functie $f(z)$ zien als een functie van twee reële variabelen, namelijk van $\Re(z)$ en $\Im(z)$. We kunnen dus een complexe functie $f(z)$ beschrijven door twee reële functies van de twee reële variabelen $x = \Re(z)$ en $y = \Im(z)$, namelijk

$$f(z) = \Re(f(z)) + i \cdot \Im(f(z)) = u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

Als we nu ervan uitgaan dat $f(z)$ een complex differentieerbare functie met afgeleide $f'(z)$ is, kunnen we kijken wat dit voor de (reële) functies $u(x, y)$ en $v(x, y)$ betekent. In het bijzonder gaan we bekijken wat er gebeurt als we langs de reële en langs de imaginaire as naar 0 lopen. Eerst lopen we langs de reële as met $h \to 0$ voor $h \in \mathbb{R}$, dan is

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(u(x+h, y) + i \cdot v(x+h, y)) - (u(x, y) + i \cdot v(x, y))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} \\ &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Het afleiden langs de reële as komt dus overeen met de partiële afgeleide naar het reële deel x van z, waarbij we y als een constante beschouwen.

Nu lopen we langs de imaginaire as met $ih \to 0$ voor $h \in \mathbb{R}$, dan geldt

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih} = (-i) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{h} \\ &= (-i) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(u(x, y+h) + i \cdot v(x, y+h)) - (u(x, y) + i \cdot v(x, y))}{h} \\ &= (-i) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x, y+h) - u(x, y)}{h} + (-i) \cdot i \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x, y+h) - v(x, y)}{h} \\ &= -i \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Maar als $f(z)$ differentieerbaar is weten we dat de twee limieten gelijk moeten zijn, daarom hebben we de noodzakelijke voorwaarde dat de reële en imaginaire delen van de limieten hetzelfde zijn, dus

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

Deze twee noodzakelijke voorwaarden heten de *Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen*. Het belangrijke feit is nu dat deze voorwaarde ook voldoende is, d.w.z. een complexe functie waarvoor de reële en imaginaire delen aan de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen voldoen is complex differentieerbaar. Omdat we de limieten van $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ langs de reële en imaginaire assen al in de partiële afgeleiden van $u(x,y)$ en $v(x,y)$ hebben uitgedrukt, weten we ook de waarde van de afgeleide $f'(z)$ namelijk

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Niet elke functie $u(x,y)$ kan reëel of imaginair deel van een holomorfe functie $f(z)$ zijn. Door toepassen van de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen op $u(x,y) = \Re(f(z))$ vinden we namelijk: $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}$. Volgens de stelling van Schwarz mogen we partiële afgeleiden verruilen, dus is $\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial -u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 -u(x,y)}{\partial y^2}$. We hebben dus $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$. Met een analoge berekening vinden dezelfde relatie ook voor $v(x,y) = \Im(f(z))$, dus $\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0$. Functies met deze eigenschap noemt men ook *harmonische functies* of, gemotiveerd door de natuurkunde, *potentieelfuncties.*

Het criterium van de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen passen we nu eens op de complexe exponentiële functie toe. We hadden in de vorige les al gezien dat

$$\exp(z) = \exp(\Re(z))\cos(\Im(z)) + i \cdot \exp(\Re(z))\sin(\Im(z)),$$

dus hebben we voor $x = \Re(z)$ en $y = \Im(z)$:

$$\exp(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y) \text{ met}$$

$$u(x,y) = \exp(x)\cos(y) \quad \text{en} \quad v(x,y) = \exp(x)\sin(y).$$

Om de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen te testen moeten we nu de partiële afgeleiden van $u(x,y)$ en $v(x,y)$ berekenen. Er geldt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \exp(x)\cos(y), & \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= -\exp(x)\sin(y), \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} &= \exp(x)\sin(y), & \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} &= \exp(x)\cos(y) \end{aligned}$$

en we zien dat inderdaad $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ en $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$. We concluderen dat de complexe exponentiële functie complex differentieerbaar is met afgeleide $\exp'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \exp(x)\cos(y) + i \cdot \exp(x)\sin(y) = \exp(z)$.

3.3 Differentiëren via Taylor reeksen

We hebben nu een criterium voor de differentieerbaarheid van een complexe functie, maar in de praktijk is dit niet altijd zo handig om de afgeleide van een functie echt uit te rekenen. Hier komt ons een verdere eigenschap van complex differentieerbare functies goed te pas. De *ontwikkelingsstelling van Cauchy-Taylor* zegt namelijk dat we een holomorfe functie altijd als een absoluut convergente Taylor reeks kunnen schrijven. Omgekeerd is een absoluut convergente Taylor reeks steeds een holomorfe functie. En tenslotte is er een stelling die zegt dat we de afgeleide van een holomorfe functie krijgen door de Taylor reeks termsgewijs af te leiden. In de wereld van complex differentieerbare functies gaat dus eigenlijk alles goed, wat we maar zo zouden hopen.

> De complexe differentieerbaarheid heeft nog veel andere indrukwekkende consequenties. Bijvoorbeeld volgt uit de samenhang tussen holomorfe functies en hun Taylor reeksen de stelling van Liouville die zegt dat een op $\mathbb{C}$ differentieerbare functie alleen maar begrensd kan zijn als hij constant is. We hadden al gezien dat de complexe sinus en cosinus functies langs de imaginaire as tegen oneindig gaan. De stelling van Liouville zegt nu dat zo iets als de reële sinus of cosinus functies op het complexe vlak niet kunnen bestaan.
>
> Er is echter nog een veel sterker resultaat: De complexe exponentiële functie heeft alle complexe getallen als waarde behalve van 0. Dit is inderdaad voor alle holomorfe functies zo, want de grote stelling van Picard zegt dat een holomorfe functie die twee complexe getallen uit $\mathbb{C}$ niet als waarde heeft al constant is.

We weten nu dat complexe functies die door een absoluut convergente Taylor reeks gegeven zijn complex differentieerbaar zijn en dat we de afgeleide vinden door de Taylor reeks termsgewijs af te leiden. Maar om een term in een Taylor reeks af te leiden, hebben we alleen maar de afgeleide van z^n nodig, en we hebben al gezien hebben dat $(z^n)' = nz^{n-1}$ is. We kijken dus naar de complexe functies die we tot nu toe hebben gezien:

$$(1) \qquad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\Rightarrow \exp'(z) = 1 + 2 \cdot \frac{z}{2!} + 3 \cdot \frac{z^2}{3!} + 4 \cdot \frac{z^3}{4!} + \dots = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

$$(2) \qquad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

$$\Rightarrow \sin'(z) = 1 - 3 \cdot \frac{z^2}{3!} + 5 \cdot \frac{z^4}{5!} - 7 \cdot \frac{z^6}{7!} + \dots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos(z).$$

(3) $$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \cos'(z) = -2 \cdot \frac{z}{2!} + 4 \cdot \frac{z^3}{4!} - 6 \cdot \frac{z^5}{6!} + \ldots = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z).$$

(4) $$\log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

$$\Rightarrow \log'(z+1) = 1 - 2 \cdot \frac{z}{2} + 3 \cdot \frac{z^2}{3} - 4 \cdot \frac{z^3}{4} + \ldots = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \text{ (meetkundige reeks).}$$

De meetkundige reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ is convergent als $|x| < 1$ en heeft in dit geval de waarde $\frac{1}{1-x}$. Dit ziet men in door uit te werken dat $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)(1-x) = 1 - x^{n+1}$. Voor $|x| < 1$ gaat x^{n+1} voor $n \to \infty$ naar 0, dus is $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1-x) = 1$.

We zien dus dat de afgeleiden precies zo zijn als we dat volgens ons kennis van de reële functies zouden verwachten.

3.4 Integreren langs krommen

Voor reële functies hebben we op twee manieren naar de integraal van een functie gekeken. Aan de ene kant is het integreren de omkering van het differentiëren, d.w.z. er geldt $(\int f(t)\,dt)' = f(x)$. Aan de andere kant geeft de integraal de oppervlakte onder een grafiek aan. Dit hadden we gezien door op een interval $[a, b]$ tussenpunten $x_0, \ldots, x_n$ met afstand Δx te kiezen en de oppervlakte door de rechthoeken met breedte Δx en hoogte $f(x_k)$ te benaderen:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

De integraal zelf is dan de limiet voor $\Delta x \to 0$ (of $n \to \infty$).

De interpretatie als oppervlakte geeft nog een andere betekenis aan de integraal, namelijk als gemiddelde van de functie $f(x)$ op het interval $[a, b]$. Hiervoor definiëren we het getal f_{gem} door de eigenschap $\int_a^b f(x)\,dx = f_{gem} \cdot (b-a)$, dan heeft de rechthoek op het interval $[a, b]$ (dus met breedte $b-a$) met hoogte f_{gem} dezelfde oppervlakte als de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$. We kunnen f_{gem} dus zien als een gemiddelde van de functiewaarden van $f(x)$ op het interval $[a, b]$.

Voor complexe functies kunnen we de integraal ook zo definiëren dat de waarde van de integraal een gemiddelde van een functie geeft. We moeten dan wel opletten dat we niet alleen maar langs de reële as kunnen lopen, maar op een willekeurig pad in het complexe vlak.

Als $C \subseteq \mathbb{C}$ een kromme in het complexe vlak is, kiezen we punten $z_0, \ldots, z_n$ op de kromme en bekijken de som $\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1})$. Als we nu de limiet $n \to \infty$ bekijken, waarbij de afstanden $|z_k - z_{k-1}| \to 0$ moeten gaan, krijgen we de definitie van de complexe *integraal langs de kromme* C:

$$\int_C f(z)\, dz := \lim_{|z_k - z_{k-1}| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Als $f(z)$ een holomorfe functie is, bestaat de limiet altijd en is onafhankelijk van de speciale keuze van de tussenpunten z_k.

Als we de functie $f(z)$ opsplitsen in reële en imaginaire delen, kunnen we de integraal ook weer door gewone reële integralen beschrijven:
Voor $z = x + iy$ zij $u(x, y) = \Re(f(z))$ en $v(x, y) = \Im(f(z))$. We schrijven $z_k = x_k + iy_k$, dan is

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} f(z_k)(z_k - z_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (u(x_k, y_k) + i \cdot v(x_k, y_k))((x_k - x_{k-1}) + i \cdot (y_k - y_{k-1})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (u(x_k, y_k)(x_k - x_{k-1}) - v(x_k, y_k)(y_k - y_{k-1})) \\
&\quad + i \cdot \sum_{k=1}^{n} (u(x_k, y_k)(y_k - y_{k-1}) + v(x_k, y_k)(x_k - x_{k-1})).
\end{aligned}$$

Als we nu naar de limieten overgaan, krijgen we

$$\int_C f(z)\, dz = (\int_C u(x, y)\, dx - \int_C v(x, y)\, dy) + i(\int_C u(x, y)\, dy + \int_C v(x, y)\, dx).$$

Hierbij wordt bij een integraal over x de variabel y gewoon als constante behandeld, en andersom.

3.5 Krommen en paden

Een handige manier om een kromme C aan te geven is als *pad* van een punt $a \in \mathbb{C}$ naar $b \in \mathbb{C}$. Hierbij is een pad een functie $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ met $\gamma(0) = a$ en $\gamma(1) = b$. Het idee is, dat $\gamma(t)$ van a naar b loopt als t het reële interval $[0, 1]$ doorloopt. Belangrijke voorbeelden van paden zijn:

(i) Het lijnstuk tussen a en b:

$$\gamma(t) = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb.$$

(ii) Een driehoek met hoekpunten a, b, c:

$$\gamma(t) = \begin{cases} a + 3t(b - a) & \text{als } t \in [0, \frac{1}{3}] \\ b + (3t - 1)(c - b) & \text{als } t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ c + (3t - 2)(a - c) & \text{als } t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

(iii) Een cirkel met straal r rond a:

$$\gamma(t) = a + re^{2\pi it}.$$

(iv) Een halfcirkel van a naar b:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}((a+b) + (a-b)e^{\pi it}).$$

Als het pad $\gamma(t)$ een differentieerbare functie is, noemen we $C = \gamma([0,1])$ een *gladde kromme*. De voorbeelden (i), (iii) en (iv) zijn gladde krommen. Het driehoek in voorbeeld (ii) is geen gladde krommen, want in de hoeken van de driehoek is de functie $\gamma(t)$ niet differentieerbaar (de hoeken zijn knikken). Maar de zijden van het driehoek zijn wel glad, en een kromme die uit eindig veel gladde stukken samengesteld is, noemen we een *stuksgewijs gladde kromme*. Voor de complexe integralen langs krommen zullen we ons tot stuksgewijs gladde krommen beperken.

Als we de kromme C langs die we integreren door een pad $\gamma(t)$ beschrijven, kunnen we de substitutie $z = \gamma(t)$, $dz = \gamma'(t)dt$ op de integraal $\int_C f(z)\ dz$ toepassen, dit geeft:

$$\int_C f(z)\ dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt.$$

Als toepassing van deze formule berekenen we nu eens de integralen langs een cirkel C van straal r rond de oorsprong voor de functies $f(z) = z^n$ voor $n \in \mathbb{Z}$. Hiervoor hebben we $\gamma(t) = re^{2\pi it}$ en $\gamma'(t) = 2\pi ire^{2\pi it}$. Er geldt

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\ dz &= \int_0^1 (\gamma(t))^n \gamma'(t)\ dt = \int_0^1 (re^{2\pi it})^n \cdot 2\pi ire^{2\pi it}\ dt \\
&= 2\pi r^{n+1} \int_0^1 ie^{2\pi i(n+1)t}\ dt \\
&= 2\pi r^{n+1} \int_0^1 i\left(\cos(2\pi(n+1)t) + i\sin(2\pi(n+1)t)\right)\ dt \\
&= 2\pi r^{n+1} \left(\int_0^1 -\sin(2\pi(n+1)t)\ dt + i \int_0^1 \cos(2\pi(n+1)t)\ dt \right) \\
&= 2\pi r^{n+1} \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\cos(2\pi(n+1)t)\big|_0^1 + i\sin(2\pi(n+1)t)\big|_0^1 \right).
\end{aligned}$$

De laatste stap is natuurlijk alleen maar mogelijk als $n \neq -1$, want anders mogen we niet door $n+1$ delen. Maar voor $n \neq -1$ is $\cos(2\pi(n+1)) = \cos(0)$ en $\sin(2\pi(n+1)) = \sin(0)$, dus is $\cos(2\pi(n+1)t)\big|_0^1 = 0$ en $\sin(2\pi(n+1)t)\big|_0^1 = 0$ en dus

$$\int_C z^n\ dz = 0 \text{ als } n \neq 1.$$

Voor $n = -1$ kijken we naar de voorlaatste stap, die wordt dan

$$\int_C \frac{1}{z}\ dz = 2\pi r^0 \left(\int_0^1 -\sin(0)\ dt + i \int_0^1 \cos(0)\ dt \right) = 2\pi i \int_0^1 1\ dt = 2\pi i.$$

Het belangrijke dat we uit dit rekensommetje leren is dat een integraal langs een gesloten pad niet altijd gelijk aan 0 is. Het probleem is dat de functie $f(z) = \frac{1}{z}$ in het punt $z = 0$ niet differentieerbaar is (de functie is in dit punt zelfs niet gedefinieerd) en dit punt binnen ons gesloten pad ligt. Dat de integralen over $\frac{1}{z^n}$ voor $n \geq 2$ wel 0 worden is eigenlijk meer een toeval.

3.6 Primitieve en (on)afhankelijkheid van de kromme

We moeten dus voorzichtig zijn met gesloten paden die rond punten lopen waar een functie $f(z)$ niet gedefinieerd is. Gelukkig is dit ook het enige waar we op moeten letten, voor holomorfe functies geldt namelijk:

Stelling (Cauchy): Als $f(z)$ in een gebied G holomorf is en $C \subseteq G$ is een gesloten kromme in dit gebied, dan is $\int_C f(z)\, dz = 0$.

De stelling van Morera zegt overigens dat het omgekeerde ook geldt: Als op een gebied voor alle gesloten krommen C geldt dat $\int_C f(z)\, dz = 0$, dan is $f(z)$ op dit gebied holomorf.

Notatie: Als een integratie langs een gesloten kromme loopt, maar de specifieke kromme niet van belang is, wordt dit vaak een *omloopintegraal* genoemd, genoteerd met $\oint f(z)\, dz$. De stelling van Cauchy schrijft men hiermee kort als $\oint f(z)\, dz = 0$.

Uit de stelling van Cauchy volgt dat een integraal in een gebied waar de functie $f(z)$ holomorf is, alleen maar van het begin- en het eindpunt van C afhangt. Als we namelijk twee krommen C_1 en C_2 hebben, die van a naar b lopen, kunnen we op C_1 van a naar b en langs C_2 van b naar a terug lopen. Omdat we op C_2 in de verkeerde richting lopen, noteren we deze kromme met $-C_2$. Verder schrijven we het achter elkaar aflopen van twee krommen gewoon als optelling van de krommen. De samengestelde kromme $C_1 - C_2$ is een gesloten kromme van a naar a en er geldt $\int_{C_1 - C_2} f(z)\, dz = 0$. Maar natuurlijk is ook de kromme $-C_2 + C_2$ die van b langs C_2 naar a terug loopt en dan weer langs C_2 naar b een gesloten kromme met $\int_{-C_2 + C_2} f(z)\, dz = 0$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z)\, dz &= \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{-C_2+C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1 + (-C_2 + C_2)} f(z)\, dz \\ &= \int_{(C_1 - C_2) + C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1 - C_2} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz. \end{aligned}$$

Nu zijn we eindelijk aan het punt waar we de hoofdstelling van de calculus op complexe functies uit kunnen breiden. Want eigenlijk willen we een integraal graag met behulp van een primitieve van $f(z)$ bepalen. Er geldt:

Stelling: Als $f(z)$ op een gebied G holomorf is en $F(z)$ is een primitieve van $f(z)$ (d.w.z. $F'(z) = f(z)$) dan geldt voor elke kromme $C \subseteq G$ met begin- en eindpunten a en b:

$$\int_C f(z)\, dz = F(b) - F(a).$$

Als we de kromme C door een pad $\gamma(t)$ met $\gamma(0) = a$ en $\gamma(1) = b$ beschrijven, geldt dus

$$\int_C f(z)\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Deze formule maakt duidelijk dat de integraal alleen maar van de begin- en eindpunten van de kromme afhangt, maar anders onafhankelijk van de kromme is. Maar let wel dat dit alleen maar geldt als er geen punten tussen de krommen liggen, waar $f(z)$ niet differentieerbaar is.

3.7 Integraal en Taylor reeks

We hebben gezien dat we de integraal van $f(z) = \frac{1}{z}$ langs een cirkel rond de oorsprong hebben kunnen uitrekenen, alhoewel de functie in de oorsprong niet gedefinieerd is. We noemen de oorsprong ook een *singulariteit* van $f(z)$. Door de functie $f(z)$ om $w \in \mathbb{C}$ te verschuiven, krijgen we analoog de iets algemenere formule $\int_C \frac{1}{z-w}\,dz = 2\pi i$, waarbij C een cirkel rond w is.

> Het feit dat voor een cirkel C rond w geldt dat $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-w}\,dz = 1$ geeft aanleiding tot de definitie van het *windingsgetal* van een kromme. Voor een algemene gesloten kromme C definieert men het windingsgetal $Ind_C(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z-w}\,dz$ en men gaat na dat dit steeds een geheel getal oplevert. Dit getal geeft aan hoe vaak zich de kromme C rond het punt w windt.

De integratie rond een singulariteit is in feite zo interessant, dat men soms een singulariteit kunstmatig produceert om deze integratie uit te kunnen voeren. Stel dat $w \in \mathbb{C}$, zij C de cirkel van straal r rond w en neem aan dat $f(z)$ op de cirkelschijf met straal r rond w holomorf is. We kijken nu naar de functie $g(z) := \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$. Deze is in voor $z = w$ natuurlijk niet gedefinieerd, maar we kunnen $g(z)$ door $g(w) := f'(w)$ holomorf in dit punt voortzetten. We hebben nu weer een functie $g(z)$ zonder singulariteit, en daarom geldt

$$\begin{aligned}0 = \int_C g(z)\,dz = \int_C (\frac{f(z)}{z-w} - \frac{f(w)}{z-w})\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z-w}\,dz - f(w)\int_C \frac{1}{z-w}\,dz \\ = \int_C \frac{f(z)}{z-w}\,dz - 2\pi i f(w)\end{aligned}$$

en hieruit volgt de *Cauchy integraal formule*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-w}\,dz.$$

We vinden dus de functiewaarde $f(w)$ door een iets aangepaste functie op een cirkel rond w te integreren.

Als we in de Cauchy integraal formule de cirkel door het pad $\gamma(t) = w+re^{2\pi it}$ beschrijven, krijgen we

$$\begin{aligned} f(w) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-w}\gamma'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{f(w+re^{2\pi it})}{re^{2\pi it}} 2\pi i r e^{2\pi it}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 f(w+re^{2\pi it}) 2\pi i\,dt \\ &= \int_0^1 f(w+re^{2\pi it})\,dt \end{aligned}$$

Hier zien we dus duidelijk dat de integraal langs een cirkel als gemiddelde de functiewaarde in het centrum van de cirkel geeft.

Als toepassing van de integratie langs krommen rond een singulariteit geven we nu nog aan hoe we met behulp hiervan de coëfficiënten van de Taylor reeks van een functie $f(z)$ kunnen vinden. Er geldt namelijk voor een cirkel C rond w:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz = f'(w), \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-w)^3}\,dz = \frac{f''(w)}{2!}$$

en algemeen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz = \frac{f^{(n)}(w)}{n!}.$$

Voor de Taylor reeks van $f(z)$ ontwikkelt in het punt w geldt dus:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-w)^n \text{ met } a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz.$$

Belangrijke begrippen in deze les

- complexe differentieerbaarheid
- holomorfe functies
- Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen
- termsgewijs afleiden van Taylor reeksen
- integraal langs een kromme
- omloopintegraal, onafhankelijkheid van de kromme

Opgaven

17. (i) In welke punten $z \in \mathbb{C}$ is $f(z) := \Re(z)^2 + i \cdot \Im(z)^2$ complex differentieerbaar? Bepaal in deze punten $f'(z)$.

    (ii) In welke punten $z \in \mathbb{C}$ is $f(z) := \overline{z}(3z^2 + \overline{z}^2)$ complex differentieerbaar? Bepaal in deze punten $f'(z)$.

18. Ga na dat $\sin(z)$ en $\cos(z)$ aan de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen voldoen en dus complex differentieerbaar zijn. (Hint: De reële en imaginaire delen van de complexe sinus en cosinus functies hebben we in de vorige les bepaald, voor de reële hyperbolische functies geldt $\cosh'(x) = \sinh(x)$ en $\sinh'(x) = \cosh(x)$.)

19. Gebruik de relaties $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ en $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ om de afgeleiden $\cos'(z) = -\sin(z)$ en $\sin'(z) = \cos(z)$ rechtstreeks uit de afgeleide van $\exp(z)$ te berekenen (zonder Taylor reeksen of partiële afgeleiden). Let op dat volgens de kettingregel $(e^{iz})' = i \cdot e^{iz}$.

20. De *arcustangens* functie heeft in $z_0 = 0$ de Taylor reeks
$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots.$$
Laat zien dat $\arctan'(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

21. Zij C de (redelijk rechte) gesloten kromme langs de vierkant met hoekpunten $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$. Bereken de integraal $\int_C \frac{1}{z}\, dz$. Let op dat $\log(z)$ op de negatieve reële as niet continu is. Het stuk kromme tussen $-1+i$ en $-1-i$ moet je dus in twee delen splitsen.

22. Laat zien dat $\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = 0$ als $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Wat is $\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt$ voor $k = 0$?