Les 4 Fourier analyse

Veel gewone fenomenen hebben iets met golven te maken, zo is bijvoorbeeld geluid een golvende verandering van de luchtdruk en is licht een elektromagnetische golf.

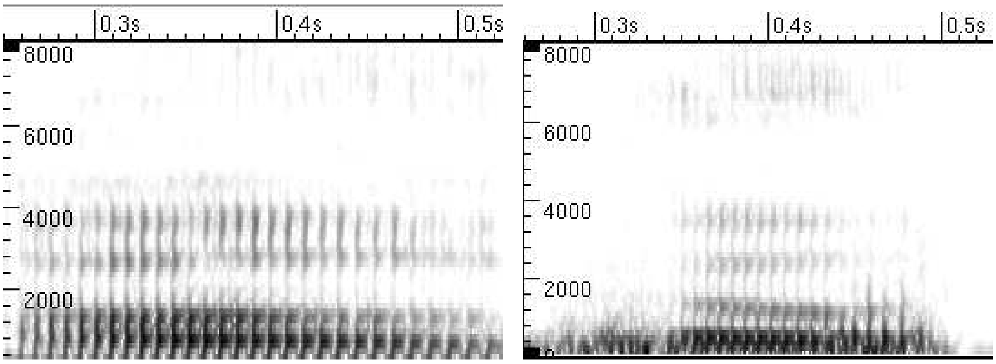
Als we nu eens kijken hoe bij een viool (of elk ander snaarinstrument) het geluid wordt geproduceerd, dan is het duidelijk dat de snaar aan de eindpunten vast zit, maar daartussen een golvende beweging uitvoert. De eenvoudigste mogelijkheid hiervoor is natuurlijk dat in het midden een buik is, waar de snaar de grootste amplitude heeft. Maar we kunnen ook precies in het midden een vinger op de snaar zetten, dan krijgen we twee half zo lange golven en de toon klinkt een octaaf hoger. Net zo kunnen we de vinger op een derde van de snaar plaatsen, de toon klinkt dan nog een kwint hoger, ook al heeft de intensiteit behoorlijk afgenomen. De tonen die we op deze manier produceren heten *boventonen* en klinken harmonisch met de grondtoon samen.

Dit was al aan Pythagoras bekend en ons gewoon systeem van twaalf halftonen in een octaaf berust op het delen van een snaar in twee stukken met een eenvoudig ratio: $2:1$ octaaf, $3:2$ kwint, $4:3$ kwart, $5:4$ grote terts, $6:5$ kleine terts, $9:8$ grote seconde, $16:15$ kleine seconde (halftoon). Uiteindelijk moet men met sommige intervallen iets schuiven, omdat bij deze ratio's twaalf kwinten een iets groter interval geven dan acht octaven: $1.5^{12} \approx 129.75$, $2^8 = 128$. De verhouding $\frac{1.5^{12}}{2^8} \approx 1.01364$ noemt men ook het *Pythagoraeïsch komma*. Om dit probleem te ontsnappen zijn er verschillende *stemmingen* uitgevonden, bekende stemmingen zijn de *gelijkzwevende* en verschillende soorten van *Wohltemperierung*.

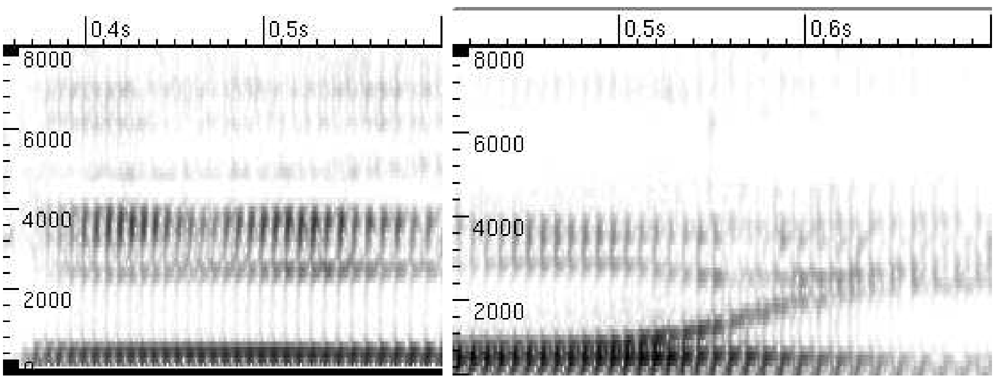
Als we naar verschillende instrumenten luisteren die dezelfde toon spelen, zullen we nog steeds makkelijk het verschil tussen een trompet, een viool en een piano kunnen horen (maar let wel: als je van een toon het begingeruis afplakt wordt dit veel moeilijker). De reden hiervoor ligt in de intensiteiten die de boventonen hebben, bij een trompet zijn er veel meer en ook bij een viool zijn de boventonen nog relatief sterk.

Het idee is nu, de klank van een toon te beschrijven door naar de intensiteiten van de verschillende boventonen te kijken. De verdeling van de intensiteiten (waarbij we de grondtoon bijvoorbeeld op 1 normeren) geeft dan een karakterisering van de klank. Als we de hoogte van een toon door een grondfrequentie ω_0 beschrijven zo dat de frequenties van alle boventonen een veelvoud van ω_0 zijn, kunnen we de toon door de intensiteiten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beschrijven, waarbij a_k de intensiteit van de boventoon met frequentie $k\omega_0$ aangeeft (dit noemen we ook de boventoon van orde k). Bij de meeste instrumenten zijn de intensiteiten van de boventonen van orde 10 of meer erg klein, maar het menselijk oor is verbazingwekkend gevoelig voor heel kleine verschillen. Soms is het ook zo dat de grondfrequentie niet te hoogste intensiteit heeft, bij sommige instrumenten kan de speler dit zelfs bewust veranderen, bijvoorbeeld met de *flageolet* tonen bij een viool of fluit.

Het doel van de Fourier analyse is in principe, voor een gegeven 'klank' de intensiteiten $a_0, \ldots, a_n$ te bepalen, die een karakteristiek patroon voor de klank moeten geven. Dit past men bijvoorbeeld in de spraakherkenning toe, waar verschillende klinkers duidelijk verschillende patronen van intensiteiten voor het frequentie spectrum hebben. De frequenties met de hoogste intensiteiten heten *formanten* en bijvoorbeeld de afstand tussen de twee laagste formanten is een belangrijk kenmerk om klinkers te onderscheiden. Bij tweeklanken laat zich goed zien hoe de formanten over de tijd veranderen.



Figuur I.10: Formant spectra voor de klinkers `/a/` en `/oe/`



Figuur I.11: Formant spectra voor de klinker `/i/` en de tweeklank `/o-i/`

4.1 Periodieke functies

Om 'golvende fenomenen' (zo als trillingen) door een model te kunnen beschrijven, hebben we 'golvende functies' nodig, en daarbij denken we natuurlijk aan zo iets als de cosinus of sinus functies. Maar bij de sinus en cosinus heeft de golf een bepaalde vorm, om ook naar anders gevormde golven te kunnen kijken, spreken we algemeen van *periodieke functies*. Hiermee bedoelen we dat een functie zich naar een zeker interval weer herhaald, we zeggen dat een functie $f(t)$ de periode T heeft als $f(t+T) = f(t)$ voor alle t (Merk op: Bij periodieke functies heet de variabel meestal t omdat we hierbij aan de *tijd* denken.)

Bijvoorbeeld zijn $\cos(t)$ en $\sin(t)$ functies met periode 2π. Maar ook $\sin(2t)$ heeft periode 2π, de golven zijn bij deze functie half zo lang en de eigenlijke periode is π, maar dan is de functie natuurlijk ook periodiek met periode 2π. Algemener zijn alle functies $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ met $k = 0, 1, 2 \ldots$ periodiek met periode 2π. Deze functies kunnen we natuurlijk ook nog met factoren (de amplitude) vermenigvuldigen en bij elkaar optellen, dit geeft dan periodieke functies zo als $f(t) = 5\sin(t) + 3\cos(t) - 2\sin(3t) + \sin(4t)$

Nu komt er een roekeloze gedachte aan: Bij gewone functies hebben we gezien dat we deze goed door veeltermen kunnen benaderen, bijvoorbeeld door de Taylor veelterm van zekere orde of door interpolatie. We hebben dus ingewikkelde functies beschreven door een lineaire combinatie van de heel eenvoudige functies 1, x, x^2, x^3 enzovoorts. Het idee is nu of we niet periodieke functies goed kunnen benaderen door een lineaire combinatie van $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$. Het antwoord is een duidelijk 'ja', maar het zou de een of andere verrassen dat dit eigenlijk een vraagstelling uit de lineaire algebra is. We zullen dit toelichten.

In Wiskunde 1 hebben we naar *orthogonale projecties* gekeken om de beste benadering van een punt in een deelruimte te vinden. Bijvoorbeeld wilden we een punt P in het 2-dimensionale vlak benaderen door een punt op een gegeven lijn, en het was bijna vanzelfsprekend dat de beste benadering (het punt op de lijn het dichtst bij P) de orthogonale projectie van P op de lijn was. Dit concept gaan we nu op de periodieke functies toepassen en het pakt nu goed uit dat we toen ook naar algemenere vectorruimten dan 2- en 3-dimensionale hebben gekeken.

De periodieke functies op het interval $[-\pi, \pi]$ vormen een vectorruimte V met optelling $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ en vermenigvuldiging met factoren $(cf)(t) = c \cdot f(t)$. De periodieke functies zijn dus de vectoren in V. We hebben boven al een paar vectoren in deze vectorruimte opgenoemd, namelijk $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$ voor $k \in \mathbb{N}$. De nulvector is de 0-functie $\sin(0 \cdot t)$ en men vindt alle constante functies als $c \cdot \cos(0 \cdot t)$.

Een belangrijk feit is nu dat de genoemde 'vectoren' lineair onafhankelijk zijn, d.w.z.:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) = 0 \text{ voor alle } t \;\Rightarrow a_k = b_k = 0 \text{ voor alle } k.$$

Het bewijs hiervan is niet erg moeilijk, maar we slaan het toch over. Hieruit volgt in het bijzonder dat V een vectorruimte van oneindige dimensie is, maar daar hoeven we niet over te schrikken. Het plan is nu, de vectoren uit V te benaderen door lineaire combinaties van $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$, dus door vectoren in de deelruimte

$$U := \langle \cos(kt), \sin(lt) \mid k, l \in \mathbb{N}, l > 0 \rangle.$$

Omdat $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$ trigonometrische functies zijn, noemt men dit ook een *trigonometrische benadering.*

We weten uit Wiskunde 1 dat we de beste benadering van een vector in een deelruimte vinden door een orthogonale projectie, maar hiervoor moeten we wel kunnen zeggen, wanneer twee periodieke functies *loodrecht* op elkaar staan. Dit hadden we altijd met behulp van een *inproduct* uitgedrukt en voor de periodieke functies definiëren we een inproduct als volgt:

$$\Phi(f(t), g(t)) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t)\, dt.$$

We moeten natuurlijk na gaan dat dit inderdaad een inproduct is, maar gelukkig volgt de *bilineariteit* rechtstreeks uit de eigenschappen van de integraal:

(i) $\Phi(f(t), g(t)) = \Phi(g(t), f(t))$ (symmetrie)

(ii) $\Phi(f(t) + g(t), h(t)) = \Phi(f(t), h(t)) + \Phi(g(t), h(t))$ (optellen)

(iii) $\Phi(cf(t), g(t)) = c \cdot \Phi(f(t), g(t))$ (vermenigvuldigen met een factor).

Verder moet het inproduct positief definiet zijn, d.w.z. $\Phi(f(t), f(t)) \geq 0$ en $\Phi(f(t), f(t)) = 0$ dan en slechts dan als $f(t) = 0$ voor alle t, dus als $f(t)$ de 0-functie is. Maar $\Phi(f(t), f(t)) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt \geq 0$, want $f(t)^2 \geq 0$ voor alle t.

Om te kunnen concluderen dat alleen maar voor de 0-functie geldt dat $\Phi(f(t), f(t)) = 0$, moeten we nog iets over de periodieke functies eisen. Deze mogen namelijk niet overal 0 zijn behalve in een paar geïsoleerde punten, dan wordt de integraal over $f(t)^2$ namelijk wel 0. We onderstellen dus, dat onze functie *stuksgewijs continu* is, d.w.z. dat we het interval $[-\pi, \pi]$ in eindig veel stukken van lengte > 0 op kunnen splitsen waarop de functie continu is. Met andere woorden eisen we dat de functie continu is tot op een eindig aantal sprongen.

Als men de voorwaarde dat de functies stuksgewijs continu moeten zijn te sterk vindt, moet men een alternatieve aanpak kiezen. De functies $f(t)$ waarvoor de integraal over $f(t)^2$ gelijk aan 0 is, moet men dan tot de 0-functie verklaren. Dit geeft de theorie van *Lebesgue integralen* waarbij men functies met elkaar identificeert die *bijna overal* gelijk zijn. De term 'bijna overal' heeft hierbij een precies gedefinieerde betekenis, namelijk dat de uitzonderingen een verzameling van *maat* 0 zijn. Voor een verzameling (bijvoorbeeld een interval) met een gelijkverdeelde kansverdeling heeft een deelverzameling maat 0 als de kans voor deze deelverzameling 0 is. Op het interval $[-\pi, \pi]$ geldt dit bijvoorbeeld voor alle eindige verzamelingen van punten, maar ook voor de verzameling van rationale getallen die in dit interval liggen.

Om goed naar orthogonale projecties te kunnen kijken, hebben we een orthogonale, of beter nog een orthonormale basis nodig. Een basis heet *orthogonaal* als $\Phi(v, w) = 0$ voor elk paar $v \neq w$ van basis vectoren. Als verder ook nog $\Phi(v, v) = 1$ voor alle basis vectoren, heet de basis *orthonormaal.* Algemeen definiëren we de *lengte* van een vector als $\sqrt{\Phi(v, v)}$. Voor een periodieke functie $f(t)$ is de lengte dus gedefinieerd als

$$\|f(t)\| = \sqrt{\Phi(f(t), f(t))} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

We hebben inmiddels gezien hoe handig de complexe exponentiële functie is om uitspraken over de cosinus en sinus functies te bewijzen. Dit geldt ook voor het berekenen van de inproducten $\Phi(\cos(kt), \sin(lt))$. We zullen zien dat het stelsel $(\cos(kt), \sin(lt))$ al een orthogonaal stelsel is en dat de inproducten er als volgt uit zien:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\sin(lt)\ dt = 0 \qquad \text{voor alle } k, l \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\ dt = \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq l \\ \pi & \text{als } k = l > 0 \\ 2\pi & \text{als } k = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\ dt = \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq l \\ \pi & \text{als } k = l > 0 \end{cases}$$

Bewijs: Uit het feit dat de complexe exponentiële functie een periode van $2\pi i$ heeft, volgt dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\ dt = \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq l \\ 2\pi & \text{als } k = l \end{cases}$$

want voor $k \neq l$ is $\frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)t}$ een primitieve van $e^{i(k-l)t}$ en er geldt dus $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\ dt = \frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)t}\big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)\pi} - \frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)(-\pi)} = 0$ (want $e^{i\pi} = e^{i(-\pi)}$). Voor $k = l$ is $e^{i(k-l)t} = 1$ en $\int_{-\pi}^{\pi} 1\ dt = 2\pi$.

Aan de andere kant is

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kt) + i\sin(kt))(\cos(-lt) + i\sin(-lt))\ dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kt) + i\sin(kt))(\cos(lt) - i\sin(lt))\ dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt) + \sin(kt)\sin(lt)\ dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\sin(kt) - \cos(kt)\sin(lt)\ dt.$$

We kijken eerst naar het reële deel hiervan:
Er geldt $\cos(kt) = \sin(kt + \frac{\pi}{2})$, dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt + \frac{\pi}{2})\sin(lt + \frac{\pi}{2})\ dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(kt)\sin(lt)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\ dt$$

omdat we over een volle periode integreren. Hieruit volgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt) + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\ dt$$
$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\ dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\ dt.$$

Maar voor $k \neq l$ is $\Re(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\ dt) = 0$, dus

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\ dt.$$

Voor $k = l \neq 0$ volgt uit $\Re(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\ dt) = 2\pi$ dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\ dt = \pi.$$

Voor $k = l = 0$ berekenen we heel eenvoudig dat $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0\cdot t)\cos(0\cdot t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\ dt = 2\pi$.

Hetzelfde trucje passen we nu op het imaginaire deel van $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\ dt$ toe: Met $\cos(kt) = \sin(kt + \frac{\pi}{2})$ en $\sin(lt) = -\cos(lt + \frac{\pi}{2})$ volgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\sin(lt)\ dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt + \frac{\pi}{2})\cos(lt + \frac{\pi}{2})\ dt$$
$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(kt)\cos(lt)\ dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\cos(lt)\ dt$$

omdat we weer over een volle periode integreren. We hebben dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\sin(kt)\ dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\sin(lt)\ dt$$
$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\sin(kt)\ dt = -2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\sin(lt)\ dt.$$

Maar $\Im(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\ dt) = 0$, dus hebben we

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\sin(kt)\ dt \text{ voor alle } k, l.$$

We hebben dus bewezen dat $B := (1 = \cos(0\cdot t), \cos(kt), \sin(lt) \mid k, l \geq 1)$ een orthogonaal stelsel is met

$$\Phi(1,1) = 2\pi, \quad \Phi(\cos(kt),\cos(kt)) = \pi, \quad \Phi(\sin(kt),\sin(kt)) = \pi.$$

We kunnen ook met behulp van een paar handige opteltheorema's zien zien dat de functies een orthogonaal stelsel zijn. Deze bewijzen we wederom het makkelijkst met behulp van de complexe exponentiële functie. Bijvoorbeeld is $\cos(kt)\cos(lt) = \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}\cdot\frac{e^{ilt}+e^{-ilt}}{2} = \frac{1}{4}(e^{i(k+l)t} + e^{i(k-l)t} + e^{i(-k+l)t} + e^{i(-k-l)t}) = \frac{1}{2}(\frac{e^{i(k+l)t}+e^{-i(k+l)t}}{2} + \frac{e^{i(k-l)t}+e^{-i(k-l)t}}{2}) = \frac{1}{2}(\cos((k+l)t) + \cos(k-l)t)$. Maar de integraal $\int_{-\pi}^{\pi}\cos((k\pm l)t)\ dt$ kunnen we natuurlijk heel eenvoudig uitrekenen. Op dezelfde manier vindt men de opteltheorema's $\sin(kt)\sin(lt) = \frac{1}{2}(\cos((k-l)t) + \cos(k+l)t)$ en $\sin(kt)\cos(lt) = \frac{1}{2}(\sin((k+l)t) + \sin(k-l)t)$.

Nu dat we weten dat de elementen van de basis B een orthogonaal stelsel vormen (dus dat ze alle loodrecht op elkaar staan) kunnen we ook projecties in de deelruimte U opgespannen door $\cos(kt)$ en $\sin(lt)$ berekenen. In Wiskunde 1 hadden we gezien, dat de projectie van een vector v in een deelruimte met orthogonale basis $(v_1, \ldots, v_n)$ gegeven is door $v_\| = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$, waarbij de coëfficiënten c_k gegeven zijn door $c_k = \frac{\Phi(v, v_k)}{\|v_k\|^2}$. (Voor een orthonormaal stelsel zou $\|v_k\|^2 = 1$ en dus $c_k = \Phi(v, v_k)$ gelden, maar onze basis vectoren hebben lengte $\sqrt{\pi}$ of $\sqrt{2\pi}$.) Dat onze basis oneindig veel elementen bevat, heeft tot gevolg dat we de projectie als een oneindige reeks schrijven. Dit is verder geen probleem, we zien deze reeks (zo als de Taylor reeks) als de limiet $n \to \infty$ van de som over de eerste n termen. We moeten dan wel na gaan of de reeks inderdaad convergeert.

De conclusie is nu dat we een periodieke functie $f(t)$ met periode 2π kunnen benaderen door de projectie

$$f_\|(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

met

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\Phi(f(t), \cos(kt))}{\|\cos(kt)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt \text{ voor } k = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ b_k &= \frac{\Phi(f(t), \sin(kt))}{\|\sin(kt)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt \text{ voor } k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

De conventie de eerste coëfficiënt als $\frac{a_0}{2}$ te schrijven, zorgt ervoor dat de algemene formule voor de a_k ook voor a_0 geldt. De reeks $f_\|(t)$ heet de *Fourier reeks* van $f(t)$ en de coëfficiënten a_k, b_k heten de *Fourier coëfficiënten*. De naam wijst op Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), die als eerste de wiskundige theorie van trigonometrische reeksen voor periodieke functies heeft ontwikkeld.

4.2 Eigenschappen van de Fourier reeks

We moeten nu twee belangrijke vragen over de Fourier reeks van een functie beantwoorden:

(1) Wanneer is de Fourier reeks een convergente reeks?

(2) Als de Fourier reeks convergeert, is de limiet dan ook de goede functie $f(t)$?

Het antwoord op beide vragen geeft de **Stelling van Dirichlet**:
Voor een periodieke functie $f(t)$ met periode 2π convergeert de Fourier reeks, als $f(t)$ aan de volgende voorwaarden voldoet:

(a) Het interval $[-\pi, \pi]$ laat zich in eindig veel deelintervallen splitsen waarop $f(t)$ continu en monotoon (stijgend of dalend) is.

(b) In een punt t_0 waar $f(t)$ niet continu is, bestaan de rechtszijdige limiet $f_+(t_0) := \lim_{t \to t_0^+} f(t)$ en de linkszijdige limiet $f_-(t_0) := \lim_{t \to t_0^-} f(t)$ (maar ze zijn niet gelijk).

In de punten waar $f(t)$ continu is, convergeert onder deze voorwaarden de Fourier reeks inderdaad tegen de goede waarde $f(t)$ en in een punt t_0 waar $f(t)$ niet continu is (dus een sprong heeft) convergeert de Fourier reeks tegen het gemiddelde van de rechts- en de linkszijdige limiet, dus tegen $\frac{1}{2}(f_+(t_0)+f_-(t_0))$.

Deze opmerkelijke stelling zegt in het bijzonder dat de projectie van een periodieke functie in de deelruimte U opgespannen van de cosinus en sinus functies in de limiet weer de functie geeft. We zeggen daarom, dat de deelruimte *dicht* ligt in de hele vectorruimte van periodieke functies. Dit is analoog met het feit, dat je elk reëel getal willekeurig goed kunt benaderen met rationale getallen (breuken), men zegt ook hier dat de rationale getallen dicht in de reële getallen liggen. Dit betekent niet dat alle periodieke functies in de deelruimte U liggen, want hiervoor zijn alleen maar eindige lineaire combinaties toegestaan en geen limieten.

We kunnen zelfs de fout afschatten, die we maken als we de Fourier reeks naar een aantal termen afbreken (net zo als we de Taylor reeks naar een paar termen afbreken en een functie door een Taylor veelterm benaderen). Er geldt namelijk de *vergelijking van Parseval* die in principe uit het feit volgt dat we het kwadraat van de lengte van een lineaire combinatie van een orthogonaal stelsel berekenen als $\|c_1v_1 + \ldots + c_nv_n\|^2 = \Phi(c_1v_1 + \ldots + c_nv_n, c_1v_1 + \ldots + c_nv_n) = c_1^2\|v_1\|^2 + \ldots + c_n^2\|v_n\|^2$. Als we dit toepassen op een periodieke functie $f(t)$ met Fourier reeks $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ krijgen we

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt.$$

Als we de reeks na n termen afbreken, kunnen we dus de kwadratische fout afschatten door $\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$.

Merk op dat de voorwaarden in de stelling van Dirichlet geen noodzakelijke voorwaarden zijn, d.w.z. er zijn ook functies die niet aan deze voorwaarden voldoen, maar waarvoor de Fourier reeks wel tegen de goede functie convergeert. Aan de andere kant zijn er zelfs continue functies waarvoor de Fourier reeks niet tegen de juiste functie convergeert. Het probleem om een precieze karakterisatie van de functies te geven, waarvoor de Fourier reeks tegen de goede functie convergeert, is nog steeds open!

Uit de symmetrie eigenschappen van cosinus en sinus kunnen we heel eenvoudig een aantal belangrijke conclusies trekken. We weten dat $\cos(t)$ een even functie is, dus $\cos(-t) = \cos(t)$. Evenzo is $\sin(t)$ een oneven functie, want $\sin(-t) = -\sin(t)$. De integraal $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt$ kunnen we daarom makkelijk iets anders schrijven, namelijk als

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt = \int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt + \int_{0}^{\pi} f(-t)\cos(-kt)\, dt$$
$$= \int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt + \int_{0}^{\pi} f(-t)\cos(kt)\, dt.$$

Net zo is

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt + \int_0^{\pi} f(-t)\sin(-kt)\,dt$$
$$= \int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt - \int_0^{\pi} f(-t)\sin(kt)\,dt.$$

Als nu $f(t)$ een even functie is, dan is $f(-t) = f(t)$ en dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt - \int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = 0.$$

Hieruit volgt dat in de Fourier reeks van $f(t)$ alle coëfficiënten b_k gelijk aan 0 zijn en $f(t)$ dus een lineaire combinatie van alleen maar cosinus functies is (die precies de even functies in de basis van de deelruimte U zijn). Dit is analoog met het feit dat de Taylor reeks van een even functie alleen maar even machten z^{2n} bevat.

Omgekeerd geldt voor een oneven functie $f(t)$ dat $f(-t) = -f(t)$. In dit geval is

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt - \int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = 0$$

en zijn dus alle coëfficiënten a_k in de Fourier reeks gelijk aan 0. Ook dit is een analogie met de Taylor reeksen voor oneven functies, want deze bevatten alleen maar oneven termen z^{2n+1}.

4.3 Fase verschuivingen

We kunnen ons afvragen hoe het komt, dat we alleen maar functies $\cos(kt)$ die in het nulpunt een maximum hebben, en functies $\sin(kt)$ die in het nulpunt een nulpunt hebben, nodig hebben om algemene periodieke functies te kunnen beschrijven. Hoe zit het bijvoorbeeld met een zuivere sinus functie die langs de x-as verschoven is, dus met $f(t) = \sin(kt + \varphi)$? Dit is een belangrijk punt, want we kunnen niet ervan uitgaan dat elke golvende beweging op het tijdstip $t = 0$ of een nuldoorgang of een maximum heeft. De verschuiving φ noemt men ook de *fase* van de functie. De (misschien verrassende) oplossing is dat we de functie $f(t) = \sin(kt + \varphi)$ kunnen schrijven als lineaire combinatie van $\sin(kt)$ en $\cos(kt)$.

Uit het vergelijken van de imaginaire delen van $e^{i(kt+\varphi)}$ en $e^{ikt} \cdot e^{i\varphi}$ hadden we al eerder het opteltheorema $\sin(kt + \varphi) = \sin(\varphi)\cos(kt) + \cos(\varphi)\sin(kt)$ gevonden. Maar dit zegt precies dat we een functie $A\sin(kt+\varphi)$ kunnen schrijven als lineaire combinatie van $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$, namelijk als:

$$A\sin(kt + \varphi) = a\cos(kt) + b\sin(kt) \text{ met } a = A\sin(\varphi) \text{ en } b = A\cos(\varphi).$$

Met behulp van de relaties $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $\tan(\varphi) = \frac{a}{b}$ kunnen we makkelijk tussen de twee schrijfwijzen hen en weer gaan.

We hebben dus gezien dat het equivalent is een functie als lineaire combinatie $a\cos(kt) + b\sin(kt)$ te schrijven of als $A\sin(kt+\varphi)$, in beide gevallen zijn er drie parameters nodig: de amplituden a en b en de frequentie k óf de amplitude A, de fase φ en de frequentie k.

Dit betekent, dat we ook de Fourier reeks van een periodieke functie $f(t)$ met Fourier coëfficiënten a_k, b_k op een andere manier kunnen schrijven, namelijk als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kt + \varphi_k) \text{ met } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ en } \tan(\varphi_k) = \frac{a_k}{b_k}.$$

Dit noemt men ook de *spectrale* schrijfwijze van de Fourier reeks van $f(t)$. De rij $A_1, A_2, \ldots$ heet dan het *amplitude spectrum* en de rij $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ het *fase spectrum* van $f(t)$.

4.4 Complexe schrijfwijze

We hebben nu al een paar keer gezien dat het soms handig is de cosinus en sinus functies gezamenlijk door de complexe exponentiële functie te beschrijven. Dit geldt ook voor de Fourier reeks!

We weten dat $a_k \cos(kt) = a_k \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} = \frac{a_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k}{2} e^{-ikt}$ en $b_k \sin(kt) = b_k \frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} = \frac{b_k}{2}(-i)e^{ikt} + i\frac{b_k}{2} e^{-ikt}$. Hieruit volgt

$$a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)e^{ikt} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k)e^{-ikt}.$$

We definiëren nu $c_0 := \frac{a_0}{2}$, $c_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ en $c_{-k} := \overline{c_k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$ voor $k \geq 1$, dan is

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Voor de coëfficiënten c_k met $k \geq 1$ geldt:

$$\begin{aligned} c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(kt) - i\sin(kt))\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(-kt) + i\sin(-kt))\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt. \end{aligned}$$

Maar de relatie $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt$ geldt ook voor $k < 0$, want

$$\begin{aligned} c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(kt) + i\sin(kt))\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i(-k)t}\, dt. \end{aligned}$$

We definiëren dus algemeen voor $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt$$

en noemen dit de k-de complexe Fourier coëfficiënt van $f(t)$. De complexe schrijfwijze van de Fourier reeks van een periodieke functie $f(t)$ is dus:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \text{ met } c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt.$$

Voor reële functies $f(t)$ hebben we gezien dat $c_{-k} = \overline{c_k}$, maar we kunnen dit net zo goed op complexe functies $f(z)$ toepassen die langs de reële as periodiek zijn. De reële functies zijn echter de meest belangrijke toepassingen van de Fourier reeksen.

We hadden de complexe schrijfwijze van de Fourier reeks ook rechtstreeks middels het concept van de projectie op een deelruimte kunnen afleiden: De functies e^{ikt} met $k \in \mathbb{Z}$ zijn orthogonaal ten opzichte van het inproduct $\Psi(f(z), g(z)) := \int_{-\pi}^{\pi} f(z)\overline{g(z)}\, dz$. Merk op dat de complexe conjugatie bij de tweede factor nodig is om het inproduct positief definiet te hebben, want dan wordt $\Psi(f(z), f(z)) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|^2\, dz$. Met betrekking tot dit inproduct geldt $\Psi(e^{ikt}, e^{ikt}) = 2\pi$, dus vinden we de coëfficiënt c_k van e^{ikt} als $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e^{ikt}}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$.

4.5 Belangrijke voorbeelden

We zullen de theorie van Fourier reeksen nu op een aantal belangrijke periodieke functies toepassen. Hierbij berekenen we voor een gegeven functie de Fourier coëfficiënten en vergelijken de functie met de benadering door de eerste termen van de Fourier reeks. Het produceren van een zekere golfvorm middels lineaire combinaties van cosinus en sinus functies noemt men ook *Fourier synthese*. Dit principe wordt bijvoorbeeld in synthesizers toegepast, waar zuivere sinus-golven elektronisch geproduceerd en vervolgens tot periodieke functies met ingewikkeldere golfvormen gecombineerd worden.

Omdat we het over functies met periode 2π hebben, hoeven we de functies alleen maar voor het interval $[-\pi, \pi]$ te definiëren, door verschuiving van dit interval om veelvouden van 2π overdekken we de hele reële as.

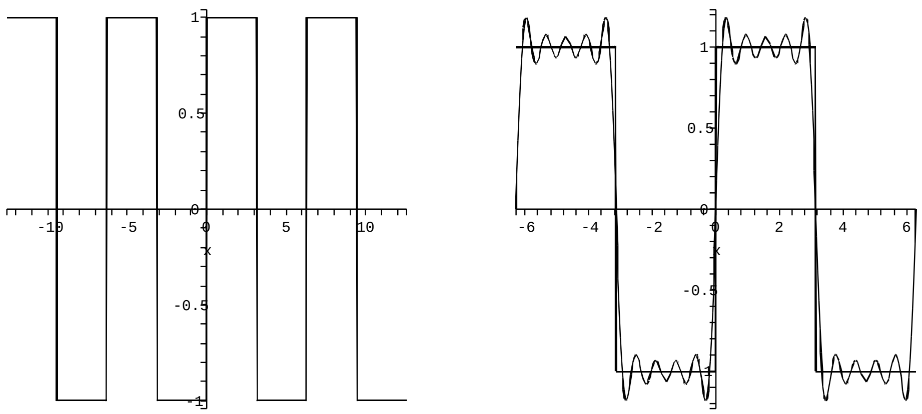
De stapfunctie

De stapfunctie is gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} -1 & \text{als} \quad -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

Omdat $f(t)$ een oneven functie is, zijn de coëfficiënten a_k van $\cos(kt)$ alle gelijk aan 0 en voor de coëfficiënten b_k van $\sin(kt)$ geldt $b_k = 2 \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kt)\, dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}(-\cos(kt)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}(-\cos(k\pi) + 1) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi}\frac{1}{k} & \text{als } k \text{ oneven} \\ 0 & \text{als } k \text{ even} \end{cases} \end{aligned}$$



Figuur I.12: Stapfunctie en benadering door Fourier reeks

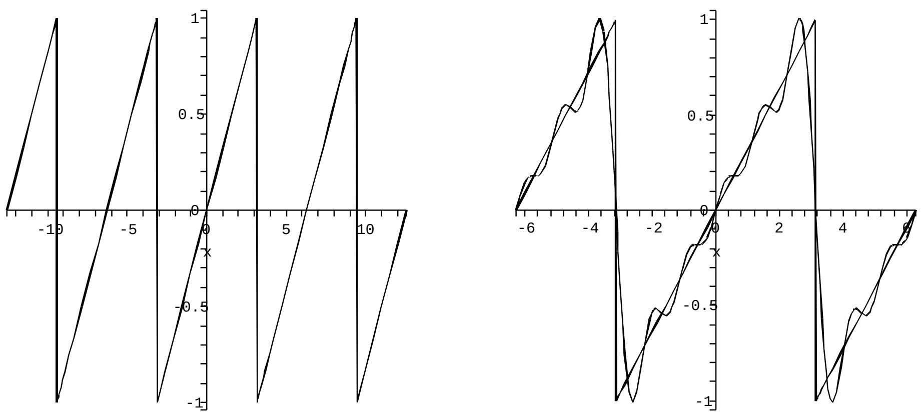
De ontwikkeling van $f(t)$ in een Fourier reeks is dus

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \dots\right)$$

De zaagfunctie

De zaagfunctie is gedefinieerd door

$$f(t) := \frac{1}{\pi}t.$$



Figuur I.13: Zaagfunctie en benadering door Fourier reeks

Ook de zaagfunctie is een oneven functie, zus zijn ook hier de coëfficiënten van $\cos(kt)$ gelijk aan 0. We moeten de integraal $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t \cdot \sin(kt)\ dt$

berekenen, en hiervoor bepalen we eerst met behulp van partiële integratie een primitieve van $t \cdot \sin(kt)$. Er geldt

$$\int t\sin(kt)\;dt = t\frac{1}{k}(-\cos(kt)) + \int \frac{1}{k}\cos(kt)\;dt = -t\frac{1}{k}\cos(kt) + \frac{1}{k^2}\sin(kt).$$

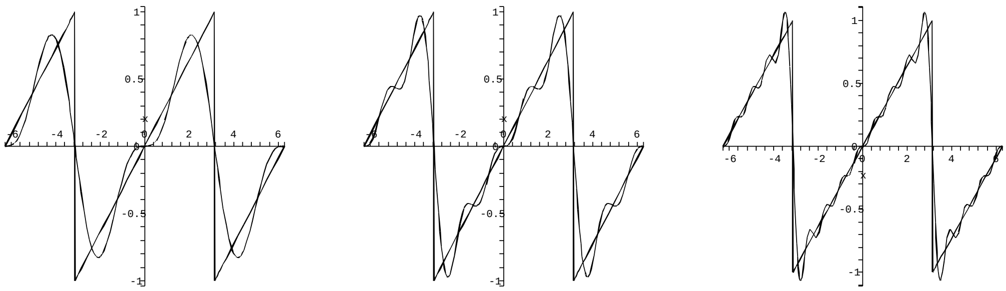
Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t\cdot\sin(kt)\;dt = \frac{2}{\pi^2}(-t\frac{1}{k}\cos(kt)\big|_0^\pi + \frac{1}{k^2}\sin(kt)\big|_0^\pi) \\ &= \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{k}(-\pi\cos(k\pi)) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{k} \end{aligned}$$

De ontwikkeling van $f(t)$ in een Fourier reeks is dus

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(kt) = \frac{2}{\pi}\left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4} + \ldots\right)$$

Voor de zaagfunctie laten we in de volgende drie plaatjes zien hoe de benadering verbeterd door meer termen van de Fourier reeks erbij te pakken. De drie benaderingen breken de Fourier reeks naar 2, 4 en 8 termen af. Het is duidelijk dat vooral het punt waar de functie niet continu is problemen bij de benadering veroorzaakt.



Figuur I.14: Afbreken van de Fourier reeks naar 2, 4 en 8 termen

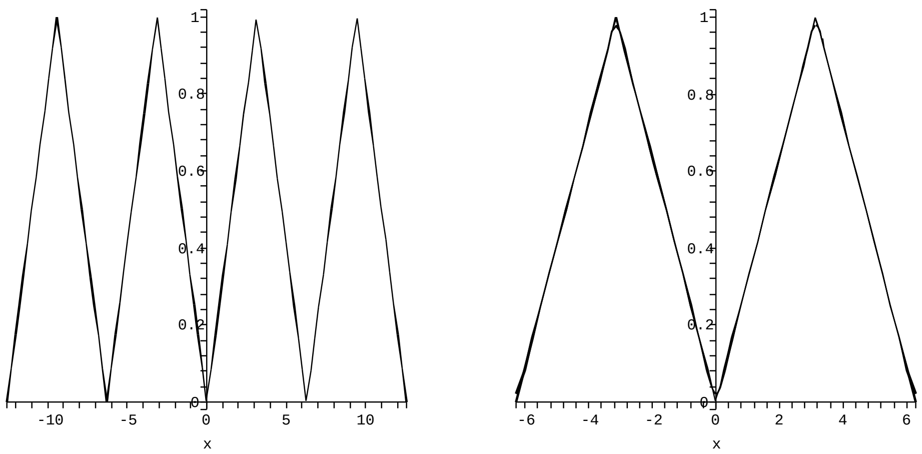
Als we de Fourier reeks van de zaagfunctie voor $t = \frac{\pi}{2}$ toepassen, krijgen we $\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(k\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots)$, want voor even k is $\sin(k\frac{\pi}{2}) = 0$ en voor oneven k is $\sin(k\frac{\pi}{2})$ afwisselend 1 en -1. Hieruit volgt de opmerkelijke formule

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

De zigzagfunctie

De zigzagfunctie krijgen we als we de absolute waarde van de zaagfunctie nemen. We hebben dus

$$f(t) := \frac{1}{\pi}|t|.$$



Figuur I.15: Zigzagfunctie en benadering door Fourier reeks

De zigzagfunctie is een even functie, daarom zijn de coëfficiënten b_k van $\sin(kt)$ gelijk aan 0. Ook hier gebruiken we de symmetrie om de integraal te vereenvoudigen, we krijgen dan $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t \cdot \cos(kt)\ dt$. We moeten dus een primitieve van $t \cdot \cos(kt)$ bepalen:

$$\int t\cos(kt)\ dt = t\frac{1}{k}\sin(kt) - \int \frac{1}{k}\sin(kt)\ dt = t\frac{1}{k}\sin(kt) + \frac{1}{k^2}\cos(kt).$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t \cdot \cos(kt)\ dt = \frac{2}{\pi^2}(t\frac{1}{k}\sin(kt)\big|_0^\pi + \frac{1}{k^2}\cos(kt)\big|_0^\pi) \\ &= \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{k^2}(\cos(k\pi) - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{k^2} & \text{als } k \text{ oneven} \\ 0 & \text{als } k \text{ even} \end{cases} \end{aligned}$$

Voor a_0 hebben we

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t\ dt = \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{2}t^2\big|_0^\pi = 1.$$

De ontwikkeling van $f(t)$ in een Fourier reeks is dus

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos(kt) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(t) + \frac{\cos(3t)}{3^2} + \frac{\cos(5t)}{5^2} + \ldots\right)$$

Merk op dat men hier veel sneller een goede benadering van $f(t)$ krijgt, omdat de noemers in de Fourier reeks met k^2 groeien.

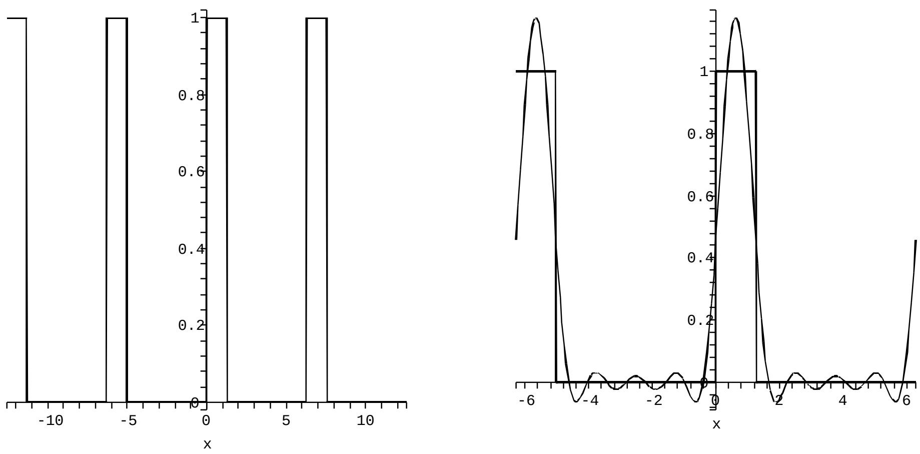
Als we de Fourier reeks van de zigzagfunctie voor $t = 0$ toepassen, krijgen we $0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos(k\cdot 0) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots)$ en hieruit volgt de formule

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

De impulsfunctie

De impulsfunctie $f(t)$ heeft op het tijdstip 0 een impuls van lengte a en is verder 0 op het interval $[-\pi, \pi]$. De functie is dus gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{als} \quad 0 \le t \le a \\ 0 & \text{als} \quad t \notin [0, a]. \end{cases}$$



Figuur I.16: Impulsfunctie en benadering door Fourier reeks

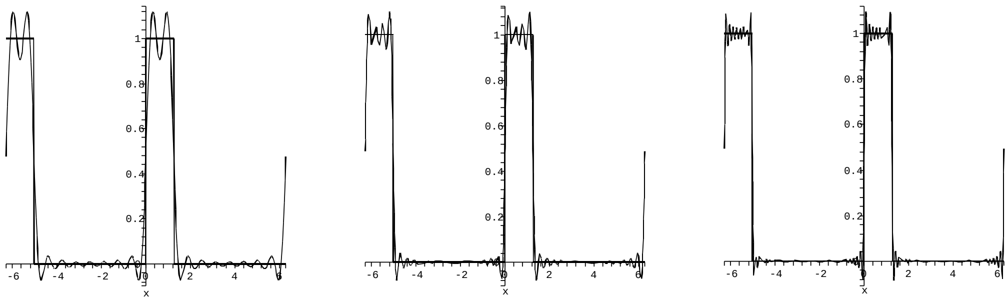
Omdat de functie buiten het interval $[0, a]$ gelijk aan 0 is, hoeven we ook alleen maar over dit deelinterval te integreren. Er geldt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^a 1 \, dt = \frac{1}{\pi} a \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \cos(kt) \, dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k} \sin(kt)\Big|_0^a = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(ka)}{k} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \sin(kt) \, dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k} (-\cos(kt))\Big|_0^a = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(ka)}{k} \end{aligned}$$

De ontwikkeling van $f(t)$ in een Fourier reeks is dus

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(ka)}{k} \cos(kt) + \frac{1 - \cos(ka)}{k} \sin(kt) \right) \\ &= \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \Bigg(\sin(a) \cos(t) + (1 - \cos(a)) \sin(t) \\ &\qquad + \frac{\sin(2a)}{2} \cos(2t) + \frac{1 - \cos(2a)}{2} \sin(2t) + \dots \Bigg) \end{aligned}$$

Bij de impulsfunctie geven we nog drie benaderingen van hogere graden aan, om te laten zien dat ook een korte impuls goed benaderd wordt.



Figuur I.17: Benaderingen van hogere orde voor de impulsfunctie

Belangrijke begrippen in deze les

- periodieke functies
- trigonometrische benadering
- Fourier reeks, Fourier coëfficiënten
- spectrale schrijfwijze, complexe schrijfwijze
- stapfunctie, zaagfunctie, impulsfunctie

Opgaven

23. We bekijken de functie

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{als} \quad -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{als} \quad \frac{\pi}{2} \leq t < \pi \end{cases}$$

die we door verschuiven om veelvouden van 2π tot een 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$ voortzetten.

(i) Maak een schets van de functie.

(ii) Bepaal de Fourier reeks van de functie

(iii) Maak een schets van de eerste twee benaderingen van $f(t)$ door afbreken van de Fourier reeks.

24. Bereken de Fourier reeks van $f(t) := |\sin(t)|$.
Hint: Met partiële integratie vindt men een primitieve van $\sin(t)\cos(kt)$ als volgt:
$\int \sin(t)\cos(kt)\,dt = -\cos(t)\cos(kt) - \int(-\cos(t))(-k\sin(kt))\,dt$
$= -\cos(t)\cos(kt) - k\int \cos(t)\sin(kt)\,dt$
$= -\cos(t)\cos(kt) - k(\sin(t)\sin(kt) - \int \sin(t)k\cos(kt)\,dt)$
$= -\cos(t)\cos(kt) - k\sin(t)\sin(kt) + k^2\int \sin(t)\cos(kt)\,dt$
$= \frac{1}{k^2-1}(\cos(t)\cos(kt) + k\sin(t)\sin(kt))$.

25. Bereken de Fourier reeks van de functie $f(t) := t^2$ die we van het interval $[-\pi, \pi]$ door verschuiven om veelvouden van 2π op de hele reële as voortzetten.