

Les 6 Toepassing van de Fourier transformatie

6.1 Belangrijke voorbeelden

We zullen in deze les een aantal belangrijke Fourier transformaties expliciet berekenen.

Rechthoek impuls

Zij $f(t)$ een rechthoek impuls van sterkte 1 tussen de tijden $-a$ en a , dus

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

dan berekenen we de Fourier getransformeerde $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ als volgt:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt = \int_{-a}^a e^{-iut} dt = \frac{1}{-iu} e^{-iut} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{-iu} (e^{-iua} - e^{iua}) \\ &= \frac{2 e^{iua} - e^{-iua}}{2i} = \frac{2}{u} \sin(au) = 2 \frac{\sin(au)}{u} \end{aligned}$$

Om de Fourier getransformeerden voor verschillende breedten van de impuls goed te kunnen vergelijken, is het handig als we de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ tot 1 normeren, hiervoor moeten we naar een impuls van sterkte $\frac{1}{2a}$ in plaats van 1 kijken. Omdat de Fourier transformatie een lineaire afbeelding is, hoeven we nu niet opnieuw te rekenen, we moeten het resultaat alleen maar met $\frac{1}{2a}$ vermenigvuldigen. De functie $g(t)$ met

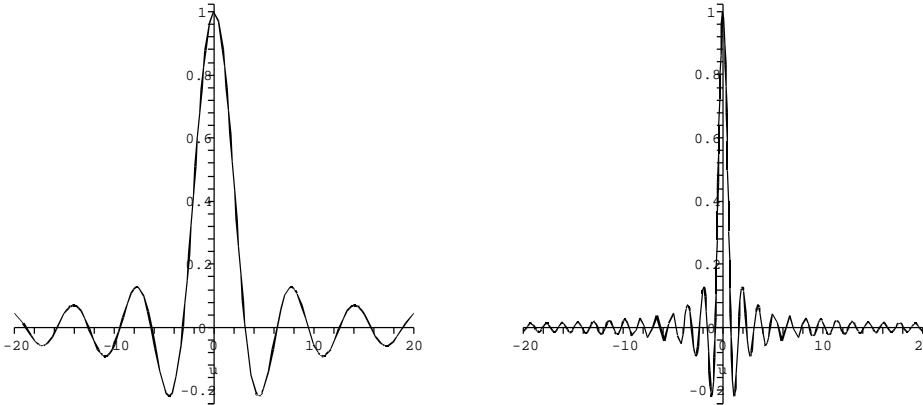
$$g(t) := \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

heeft dus de Fourier getransformeerde

$$G(u) = \mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{2a} \cdot 2 \frac{\sin(au)}{u} = \frac{\sin(au)}{au}.$$

We zien dat de parameter a van de rechthoek impuls bij de Fourier getransformeerde de rol van een schaling van de u -as speelt: Als we a verdubbelen, moeten we de u -as met een factor 2 samen schuiven. Dit betekent in het bijzonder dat voor een grotere waarde van a , dus een langere impuls, de Fourier getransformeerde met stijgende frequenties sneller afneemt als voor een kleinere waarde van a . Dit zouden we ook zo verwachten, want een korte impuls geeft een snelle verandering en heeft dus met hogere frequenties te maken.

In Figuur I.19 zijn de Fourier getransformeerden van een rechthoek impuls voor $a = 1$ en $a = 4$ te zien. Het valt op dat de getransformeerde van de langere impuls met $a = 4$ duidelijk sneller afneemt.



Figuur I.19: Fourier getransformeerden van rechthoek impulsen met $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Driehoek impuls

Zij $f(t)$ een driehoek impuls die tussen de tijden $-a$ en 0 lineair van 0 tot 1 groeit en tussen 0 en a weer lineair naar 0 daalt, dus

$$f(t) := \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

De Fourier getransformeerde $F(u)$ van $f(t)$ is

$$F(u) = \int_{-a}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt = \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{t}{a}\right)e^{-iut} dt + \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right)e^{-iut} dt.$$

Dit lossen we met partiële integratie op, de primitieve van e^{-iut} is $\frac{1}{-iu}e^{-iut}$ en de afgeleide van $1 \pm \frac{t}{a}$ is $\pm \frac{1}{a}$. Voor de eerste integraal volgt hieruit

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{t}{a}\right)e^{-iut} dt &= \left(1 + \frac{t}{a}\right) \frac{1}{-iu} e^{-iut} \Big|_{-a}^0 - \int_{-a}^0 \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{-iu} e^{-iut} dt \\ &= -\frac{1}{iu} - 0 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{iu} \int_{-a}^0 e^{-iut} dt = -\frac{1}{iu} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(iu)^2} e^{-iut} \Big|_{-a}^0 \\ &= -\frac{1}{iu} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} e^{iua} \end{aligned}$$

Net zo krijgen we voor de tweede integraal

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right)e^{-iut} dt &= \left(1 - \frac{t}{a}\right) \frac{1}{-iu} e^{-iut} \Big|_0^a - \int_0^a -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{-iu} e^{-iut} dt \\ &= 0 + \frac{1}{iu} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{iu} \int_0^a e^{-iut} dt = \frac{1}{iu} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(iu)^2} e^{-iut} \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{iu} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} e^{-iua} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} \end{aligned}$$

Als we de twee integralen bij elkaar optellen, krijgen we dus

$$F(u) = -\frac{1}{iu} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} e^{iua} + \frac{1}{iu} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} e^{-iua} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} = \frac{1}{au^2} (2 - e^{iua} - e^{-iua}).$$

Met een klein trucje kunnen we dit nog iets eenvoudiger schrijven, er geldt namelijk

$$(e^{iu\frac{a}{2}} - e^{-iu\frac{a}{2}})^2 = e^{iua} - 2 + e^{-iua} = -(2 - e^{iua} - e^{-iua})$$

Hieruit volgt

$$\sin^2\left(\frac{a}{2}u\right) = \left(\frac{e^{iu\frac{a}{2}} - e^{-iu\frac{a}{2}}}{2i}\right)^2 = \frac{1}{4}(2 - e^{iua} - e^{-iua})$$

en als we dit met de formule van $F(u)$ vergelijken, hebben we uiteindelijk:

$$F(u) = \frac{4}{au^2} \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}u\right) = \frac{a}{\left(\frac{a}{2}u\right)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}u\right) = a \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{a}{2}u\right)}{\frac{a}{2}u}\right)^2.$$

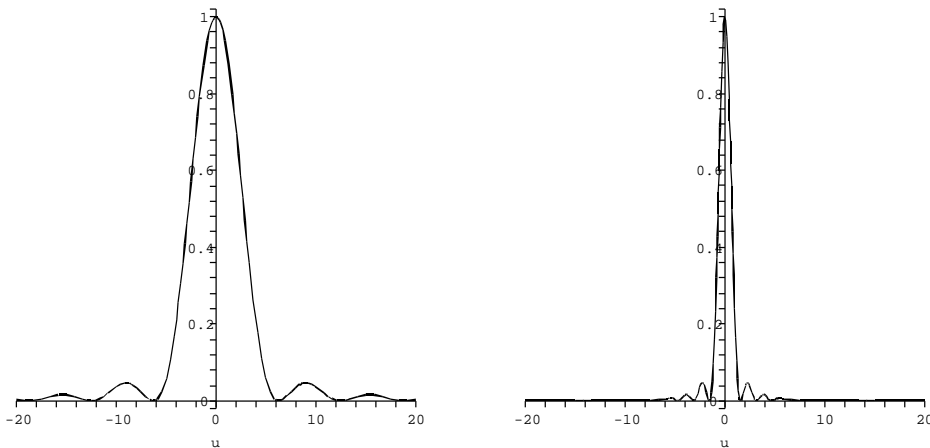
Als we ook bij deze functie de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ op 1 normeren, moeten we $f(t)$ met $\frac{1}{a}$ vermenigvuldigen, dit geeft de functie

$$g(t) := \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|t|}{a}\right) \text{ voor } |t| \leq a \text{ en } g(t) = 0 \text{ elders.}$$

Deze heeft als Fourier getransformeerde

$$\mathcal{F}[g(t)] = \left(\frac{\sin\left(\frac{a}{2}u\right)}{\frac{a}{2}u}\right)^2$$

dus speelt ook hier de parameter a de rol van een schaling van de u -as.



Figuur I.20: Fourier getransformeerden van driehoek impulsen met $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Ook de plaatjes van de Fourier getransformeerden van de driehoek impuls in Figuur I.20 laten duidelijk zien dat bij de kortere impuls voor $a = 1$ de hogere frequenties een grotere rol spelen dan bij de impuls voor $a = 4$.

Gauss functie

Een belangrijke rol bij de Fourier transformaties wordt door de Gauss functies e^{-ax^2} gespeeld, die we in verband met de normaalverdeling ook in de kansrekening en statistiek tegen komen. De opmerkelijke eigenschap van deze functie ten opzichte van de Fourier transformatie is, dat de Fourier getransformeerde weer een functie van dezelfde soort is. Om dit na te gaan hebben we wel een resultaat over de integraal van $-\infty$ tot ∞ van de Gauss functie nodig, namelijk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

waarbij de tweede integraal met de substitutie $\sqrt{a} \cdot t = x$, $\sqrt{a} dt = dx$ uit de eerste volgt.

Voor een Gauss functie $f(t) := e^{-at^2}$ met $a > 0$ geldt voor de Fourier getransformeerde $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-iut} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t^2 + i\frac{u}{a}t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + i\frac{u}{2a})^2} \cdot e^{a(i\frac{u}{2a})^2} dt \\ &= e^{-\frac{u^2}{4a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + i\frac{u}{2a})^2} dt = e^{-\frac{u^2}{4a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4a}} \end{aligned}$$

waarbij we in de voorlaatste stap de substitutie $\tau = t + i\frac{u}{2a}$, $d\tau = dt$ toepassen. Dit resultaat betekent dat de Fourier getransformeerde van een Gauss functie ook weer een Gauss functie is.

De Gauss functie van een normaalverdeling met standaardafwijking σ is $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, dus moeten we $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ in ons resultaat invullen. Dit geeft $\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{2\pi} \sigma$ en $\frac{u^2}{4a} = \frac{\sigma^2 u^2}{2}$, dus geldt:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \Rightarrow \quad F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \sqrt{2\pi} \sigma \cdot e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

De Fourier getransformeerde van een normaalverdeling met standaardafwijking σ is dus een normaalverdeling met standaardafwijking $\sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma}$. In het bijzonder heeft de Fourier getransformeerde van een normaalverdeling met standaardafwijking 1 zelf ook standaardafwijking 1.

Eindige cosinus golf

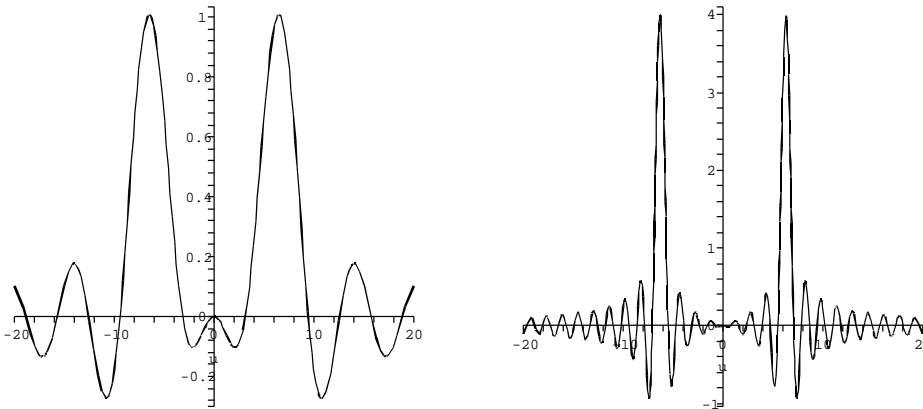
We kijken naar een cosinus functie op het eindige interval $[-a, a]$, dus

$$f(t) := \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

De Fourier getransformeerde is

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt = \int_{-a}^a \cos(\omega t)e^{-iut} dt = \int_{-a}^a \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-iut} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a e^{-i(u-\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-a}^a e^{-i(u+\omega)t} dt \\
 &= \frac{1}{-2i(u-\omega)} e^{-i(u-\omega)t} \Big|_{-a}^a + \frac{1}{-2i(u+\omega)} e^{-i(u+\omega)t} \Big|_{-a}^a \\
 &= -\frac{1}{u-\omega} \cdot \frac{1}{2i} (e^{-i(u-\omega)a} - e^{i(u-\omega)a}) - \frac{1}{u+\omega} \cdot \frac{1}{2i} (e^{-i(u+\omega)a} - e^{i(u+\omega)a}) \\
 &= \frac{\sin(a(u-\omega))}{u-\omega} + \frac{\sin(a(u+\omega))}{u+\omega}
 \end{aligned}$$

Als we dit resultaat met de Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls vergelijken, zien we dat die de som van twee Fourier getransformeerden van die soort is, waarvan een om ω naar rechts en de andere om ω naar links is verschoven. Maar net zo als een verschuiving in het tijd domein om t_0 met een vermenigvuldiging van de Fourier getransformeerde met e^{iut_0} correspondeert, correspondeert een verschuiving van een Fourier getransformeerde om ω in het frequentie domein met een vermenigvuldiging met $e^{i\omega t}$ in het tijd domein. Maar als we een rechthoek impuls met $e^{i\omega t}$ vermenigvuldigen, krijgen we de functie $e^{i\omega t}$ op een eindig interval, en door een keer om ω en een keer om $-\omega$ te verschuiven krijgen we $e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2\cos(\omega t)$ op een eindig interval, en dit is precies waarmee we zijn begonnen



Figuur I.21: Fourier getransformeerden van eindige cosinus golven met frequentie $\omega = 2\pi$ op het interval $[-a, a]$ voor $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Exponentiële afname

Een exponentiële afname wordt door de functie

$$f(t) := \begin{cases} e^{-at} & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases} \quad a > 0$$

beschreven. Hierbij is de afname om zo sneller hoe groter de parameter a is.

Als Fourier getransformeerde hiervan hebben we

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-iut} dt = \int_0^{\infty} e^{-(iu+a)t} dt \\ &= -\frac{1}{iu+a} e^{-(iu+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{iu+a} = \frac{a-iu}{u^2+a^2} = \frac{a}{u^2+a^2} - i \frac{u}{u^2+a^2} \end{aligned}$$

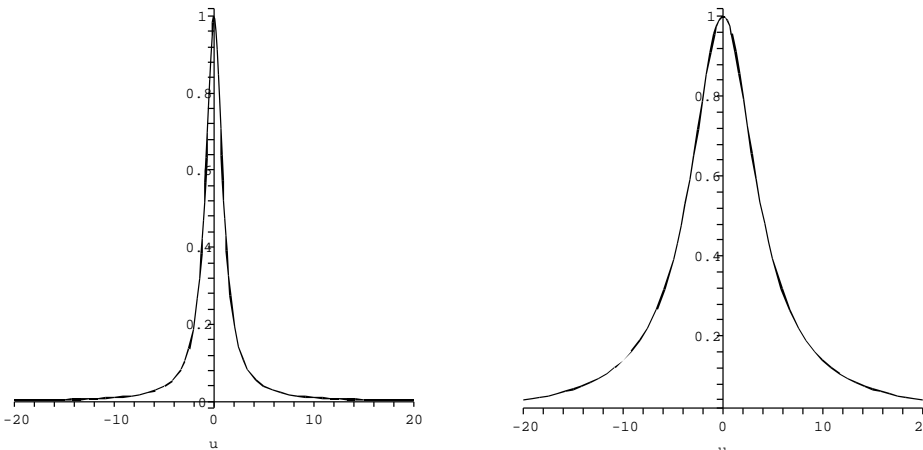
want voor $t \rightarrow \infty$ gaat $e^{-t} \rightarrow 0$ en dus ook $e^{-(iu+a)t} = e^{iu+a}e^{-t} \rightarrow 0$.

Om ook in dit geval verschillende parameters a goed te kunnen vergelijken, normeren we $\int_0^{\infty} f(t) dt$ weer op 1, hiervoor moeten we e^{-at} met a vermenigvuldigen, want $\int_0^{\infty} e^{-at} dt = \frac{-1}{a} e^{-at} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}$. De functie

$$g(t) := ae^{-at} \text{ als } t \geq 0 \text{ en } g(t) := 0 \text{ als } t < 0$$

heeft dus de Fourier getransformeerde

$$G(u) = \frac{a^2 - iau}{a^2 + u^2} \text{ met reëel deel } \Re(G(u)) = \frac{a^2}{a^2 + u^2}.$$



Figuur I.22: Fourier getransformeerden van exponentiële afname met $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Ook hier is in de plaatjes van Figuur I.22 duidelijk te zien dat de snellere afname voor $a = 4$ een grotere bijdrage van hoge frequenties tot gevolg heeft.

Omdat we het hier eigenlijk met een functie te maken hebben, die alleen maar voor positieve tijden gedefinieerd is, is dit een typisch geval om de Fourier cosinus transformatie

$$F_c(u) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(ut) dt$$

toe te passen. Hiervoor hebben we weer een partiële integratie nodig:

$$\begin{aligned} \int e^{-at} \cos(ut) dt &= e^{-at} \frac{1}{u} \sin(ut) - \int (-a)e^{-at} \frac{1}{u} \sin(ut) dt \\ &= \frac{1}{u} e^{-at} \sin(ut) + \frac{a}{u} \int e^{-at} \sin(ut) dt \\ &= \frac{1}{u} e^{-at} \sin(ut) + \frac{a}{u} \left(e^{-at} \left(-\frac{1}{u}\right) \cos(ut) - \int (-a)e^{-at} \left(-\frac{1}{u}\right) \cos(ut) dt \right) \\ &= \frac{1}{u} e^{-at} \sin(ut) - \frac{a}{u^2} e^{-at} \cos(ut) - \frac{a^2}{u^2} \int e^{-at} \cos(ut) dt \end{aligned}$$

Met $1 + \frac{a^2}{u^2} = \frac{u^2+a^2}{u^2}$ volgt hieruit

$$\begin{aligned} F_c(u) &= \int_0^\infty e^{-at} \cos(ut) dt = \frac{u^2}{a^2 + u^2} \left(\frac{1}{u} e^{-at} \sin(ut) - \frac{a}{u^2} e^{-at} \cos(ut) \right) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{a^2 + u^2} (ue^{-at} \sin(ut) - ae^{-at} \cos(ut)) \Big|_0^\infty = \frac{a}{a^2 + u^2} \end{aligned}$$

want voor $t \rightarrow \infty$ gaat $ue^{-at} \sin(ut) - ae^{-at} \cos(ut) \rightarrow 0$.

De Fourier cosinus transformatie levert dus inderdaad het reële deel van de complexe Fourier transformatie op (maar eist wel behoorlijk meer rekenwerk).

Dirac δ -functie

Een kunstmatige maar uiterst belangrijke functie is de *Dirac δ -functie* of *δ -impuls*. Deze functie is overal 0, behalve van een oneindige spits in het nulpunt en is gedefinieerd door de eigenschap dat de integraal van $-\infty$ tot ∞ de waarde 1 heeft. We kunnen dit zien als limiet van een rechthoek impuls op het interval $[-a, a]$ van sterkte $\frac{1}{2a}$, waarbij men $a \rightarrow 0$ laat gaan. Deze functie wordt aangegeven met $\delta(x)$. De wezenlijke eigenschappen van de δ -impuls zijn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

De tweede eigenschap gaat men na door de δ -functie door een rechthoek impuls te benaderen en de limiet $\delta \rightarrow 0$ te laten gaan: Een rechthoek impuls van breedte δ rond een punt x_0 is gegeven door de functie

$$r_\delta(x) := \begin{cases} \frac{1}{\delta} & \text{als } x \in [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \\ 0 & \text{als } x \notin [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}] \end{cases}$$

We veronderstellen nu dat we een primitieve van $f(x)$ kennen, dus een functie $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$. Er geldt nu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) r_\delta(x) dx = \int_{x_0 - \frac{\delta}{2}}^{x_0 + \frac{\delta}{2}} f(x) \frac{1}{\delta} dx = \frac{1}{\delta} F(x) \Big|_{x_0 - \frac{\delta}{2}}^{x_0 + \frac{\delta}{2}} = \frac{F(x_0 + \frac{\delta}{2}) - F(x_0 - \frac{\delta}{2})}{\delta}$$

Maar de laatste quotiënt is juist de differentiaalquotiënt waarmee de afgeleide van $F(x)$ in het punt $x_0 - \frac{\delta}{2}$ gedefinieerd is, dus gaat deze quotiënt voor $\delta \rightarrow 0$ naar $F'(x_0 - \frac{\delta}{2}) = F'(x_0) = f(x_0)$.

Wat de eigenschap $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0) dx = f(x_0)$ in feite betekent is dat het *convolutie product* van een functie $f(x)$ met de δ -functie met spits in het punt x_0 de waarde van $f(x)$ in dit punt oplevert.

Hieruit volgt meteen wat de Fourier getransformeerde van de δ -functie is, namelijk:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-iut} dt = e^{-iu \cdot 0} = 1$$

Dit zegt dat de Fourier getransformeerde de constante functie met waarde 1 voor alle u is.

De inverse Fourier transformatie geeft nu een alternatieve schrijfwijze voor de δ -functie, namelijk

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{iut} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} du.$$

Voor de δ -functie $\delta(t-t_0)$ met spits in t_0 vinden we met de formule voor een verschoven functie (of direct) dat

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-iut_0}.$$

De samenhang $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]] = 2\pi f(-t)$ tussen Fourier transformatie en inverse Fourier transformatie geeft nu ook de mogelijkheid om de Fourier transformatie van constante functies te berekenen. We hadden gezien dat $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, en als we de variabele t tot u hernoemen, volgt hieruit:

$$\mathcal{F}[1] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta(u)]] = 2\pi \delta(-u) = 2\pi \delta(u)$$

omdat de δ -functie met spits in $u=0$ een even functie is.

Als we in de relatie $\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-iut_0}$ voor de verschoven δ -functie de variabelen hernoemen tot $t \rightarrow u$, $t_0 \rightarrow -\omega$, $u \rightarrow t$ luidt deze $\mathcal{F}[\delta(u+\omega)] = e^{i\omega t}$ en met hetzelfde argument als boven volgt:

$$\mathcal{F}[e^{i\omega t}] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta(u+\omega)]] = 2\pi \delta(-u+\omega) = 2\pi \delta(u-\omega),$$

waarbij we weer uit symmetrie redenen weten dat $\delta(-u+\omega) = \delta(u-\omega)$.

Samenvattend geeft dit de twee paren van relaties:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(t)] &= 1 & \mathcal{F}[\delta(t-t_0)] &= e^{-iut_0} \\ \mathcal{F}[1] &= 2\pi \delta(u) & \mathcal{F}[e^{i\omega t}] &= 2\pi \delta(u-\omega). \end{aligned}$$

Met de gewone theorie van integralen is het eigenlijk onzin naar een integraal als $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} du$ te kijken, want de limiet $L \rightarrow \infty$ van $\int_{-L}^L e^{iut} du$ bestaat niet. Om hier wel na te kunnen kijken, moeten we noodzakelijk een nieuwe functie met de eigenschappen van de δ -functie definiëren. Dit is een verder voorbeeld van een definitie die door de wiskundigen (en natuurkundigen) is verzonnen, om uit een doodlopende straat te ontsnappen.

Omdat we gezegd hebben, dat we de δ -functie als limiet van een rechthoek impuls met oppervlakte 1 kunnen zien, kunnen we nu nog eens kijken of de net gevonden Fourier transformaties ook interpreteerbaar zijn als limieten van de Fourier transformaties voor de rechthoek impulsen. De Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls van breedte $2a$ was $F(u) = \frac{\sin(au)}{au}$. Deze functie heeft voor $u = 0$ de waarde 1 en de nulpunten zijn gegeven door $au = k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$, dus $u = \frac{k\pi}{a}$. In het bijzonder ligt het kleinste positieve nulpunt bij $u = \frac{\pi}{a}$. Als we nu de limiet $a \rightarrow 0$ bekijken, betekent dit dat de eerste nulpunt naar oneindig gaat, dus de heuvel rond $u = 0$ wordt steeds breder en in de limiet wordt de heuvel helemaal plat en wordt de functie $F(u)$ de constante functie 1.

Omgekeerd laten we nu eens voor een rechthoek impuls van sterkte 1 en breedte $2a$ de parameter $a \rightarrow \infty$ lopen. Deze rechthoek impuls heeft de Fourier getransformeerde $F(u) = 2\frac{\sin(au)}{u} = 2a\frac{\sin(au)}{au}$ en voor $a \rightarrow \infty$ wordt de functie $\frac{\sin(au)}{au}$ en spits van hoogte 1 in het nulpunt, dus wordt $F(u)$ inderdaad een δ -functie. (Dat de constanten hierbij kloppen moet men met een integratie nagaan.)

We zien dus dat de kunstmatige definitie van de δ -functie tenminste ten opzichte van de Fourier transformatie de goede eigenschappen heeft.

Periodieke functies

Met behulp van de δ -functie kunnen we nu ook de Fourier transformaties van periodieke functies bepalen. Een periodieke functie $f(t)$ met periode L en grondfrequentie $\omega = \frac{2\pi}{L}$ kunnen we schrijven als Fourier reeks

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt}.$$

Uit de lineariteit van de Fourier transformatie en de resultaten voor de δ -functie volgt

$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}[e^{i\omega kt}] = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \delta(u - \omega k)$$

(waarbij we ons geen zorgen over de oneindige som maken). Dit betekent dat we een periodieke functie beschrijven door een som van δ -functies met spitsen op de veelvouden van de grondfrequentie en geschaald volgens de Fourier coëfficiënten. In feite is deze beschrijving van een periodieke functie niets anders dan de beschrijving door de Fourier reeks.

Als we nu nog eens terug kijken naar de Fourier transformaties van eindige cosinus golven in Figuur I.21, zien we dat de functie voor $a = 4$ al twee duidelijke spitsen heeft. Als we het interval $[-a, a]$ van de cosinus golf nu laten groeien, worden deze spitsen steeds geprononceerder en voor $a \rightarrow \infty$ krijgen we uiteindelijk de som van twee δ -functies met spitsen in ω en $-\omega$.

Sprong

Nu dat we de δ -functie kennen en de Fourier getransformeerde hiervan hebben bepaald, kunnen we ook naar functies met een sprong kijken. Het eenvoudigste

voorbeeld hiervan is de functie $f(t)$, gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{als } t < 0 \\ 1 & \text{als } t \geq 0 \end{cases}$$

Omdat voor de Dirac δ -functie geldt dat $\int_{-\infty}^t \delta(x) dx = 0$ als $t < 0$ en $\int_{-\infty}^t \delta(x) dx = 1$ als $t > 0$, is $f(t)$ een primitieve van de δ -functie. Omgekeerd betekent dit dat $f'(t) = \delta(t)$. Dit is een verdere motivatie om een functie zo als de δ -functie te definiëren. We hadden in de vorige les gezien dat $\mathcal{F}[f'(t)] = iu\mathcal{F}[f(t)]$, maar omdat we het hier met de δ -functie te maken hebben, moeten we iets voorzichtig zijn.

Er geldt $f(t) + f(-t) = 1$ (behalve voor $t = 0$). Hieruit volgt dat $\mathcal{F}[f(t)] + \mathcal{F}[f(-t)] = \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(u)$. Maar voor $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ is $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-u)$, dus hebben we $F(u) + F(-u) = 2\pi\delta(u)$. We schrijven nu

$$F(u) = k\delta(u) + G(u)$$

dan geldt

$$\begin{aligned} 2\pi\delta(u) &= F(u) + F(-u) = k\delta(u) + G(u) + k\delta(-u) + G(-u) \\ &= 2k\delta(u) + G(u) + G(-u) \end{aligned}$$

omdat de δ -functie een even functie is. Hieruit volgt dat $k = \pi$ en dat $G(u) = -G(-u)$, dus moet $G(u)$ een oneven functie zijn. Er geldt nu

$$1 = \mathcal{F}[\delta(t)] = \mathcal{F}[f'(t)] = iu\mathcal{F}[f(t)] = iuF(u) = iu\pi\delta(u) + iuG(u).$$

Men kan aantonen dat $u\delta(u) = 0$, dus volgt hieruit dat $G(u) = \frac{1}{iu}$. Bij elkaar genomen hebben we dus voor de sprong functie $f(t)$ dat

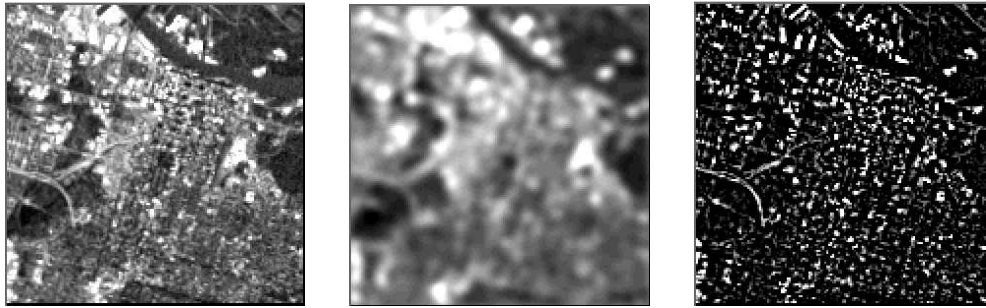
$$\mathcal{F}[f(t)] = \pi\delta(u) + \frac{1}{iu}.$$

6.2 Filters

Het idee bij een filter is dat we zekere frequentieaandelen in een signaal willen versterken en andere onderdrukken. Dit gebeurt typisch door de Fourier getransformeerde met een geschikte functie te vermenigvuldigen en het resultaat met de inverse Fourier transformatie terug naar het tijd domein te transformeren:

Een functie $f(t)$ met $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$ veranderen we in het frequentie domein met behulp van de filter functie $H(u)$ tot $G(u) = F(u) \cdot H(u)$ en krijgen hieruit het gefilterde signaal $\mathcal{F}^{-1}[G(u)] = f(t) * h(t)$, waarbij $h(t)$ de inverse Fourier transformatie van $H(u)$ is.

In Figuur I.23 is een voorbeeld van de toepassing van een low pass en een high pass filter op een satelliet opname te zien. Bij een low pass filter worden de lage frequenties doorgelaten en de hoge onderdrukt en bij een high pass filter is het omgekeerd, de lage frequenties worden onderdrukt en de hoge doorgelaten. Het effect is, dat met een low pass filter het grove patroon van een signaal



Figuur I.23: Origineel, low pass en high pass gefilterd versie van een satelliet foto.

hetzelfde blijft, maar de scherpe contrasten tot een meer geleidelijke overgang verzacht worden. Omgekeerd benadrukt een high pass filter alleen maar de scherpe contrasten, terwijl bijvoorbeeld de informatie over de intensiteit van het signaal verloren gaat. Zo is in het rechterplaatje niet meer te achterhalen of een gebied in het origineel licht of donker grijs is, maar wel heel duidelijk waar de grijstonen sterk veranderen.

Belangrijke typen van filters zijn:

- (1) Low pass filter: De lage frequenties corresponderen met de grove kenmerken over grotere gebieden. Een filter die deze frequenties benadrukt en hogere frequenties onderdrukt heet een *low pass filter*. In de beeldverwerking zal zo'n filter een zachter beeld tot gevolg hebben, waarbij de scherpe contrasten afgezwakt zijn.
- (2) High pass filter: De hoge frequenties corresponderen met snelle veranderingen. Een filter die lage frequenties onderdrukt en hoge frequenties benadrukt heet *high pass filter*. Bij de beeldverwerking worden hierdoor scherpe contrasten, zo als knikken benadrukt en hierdoor kan een beeld scherper lijken.



Figuur I.24: Origineel, low pass en high pass gefilterd versie van een eenvoudig plaatje.

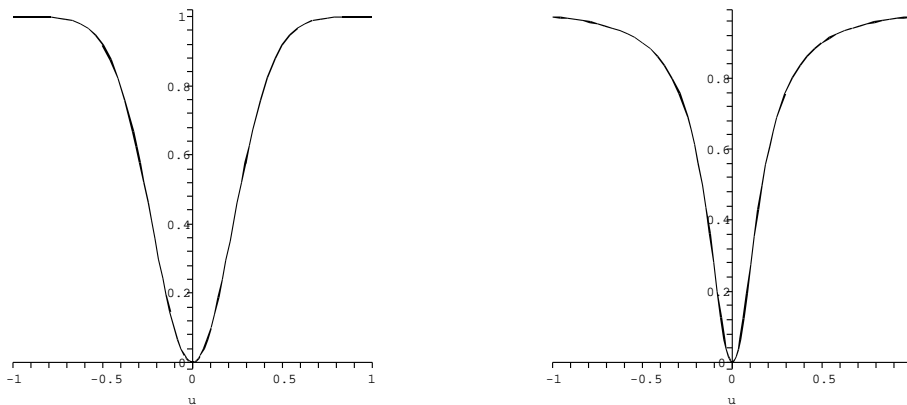
- (3) Gauss filter: We hebben gezien dat een Gauss functie de mooie eigenschap heeft dat ook zijn Fourier getransformeerde weer een Gauss functie is.

Dit maakt het omschakelen tussen tijd en frequentie domein bijzonder eenvoudig.

Met $H(u) = A \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$ krijgt men een low pass filter waarbij de parameter σ (de standaardafwijking) aangeeft, hoe breed de filter is, d.w.z. voor een grotere σ worden meer frequenties doorgelaten, terwijl een kleine σ bijna alle frequenties wegdraait.

Een Gauss high pass filter krijgt men in het eenvoudigste geval als verschil van een constante functie en een Gauss low pass filter, namelijk als $H(u) = A(1 - e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}})$. Algemener neemt men vaak het verschil van twee Gauss functies met parameters σ en ρ : $H(u) = A \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} - B \cdot e^{-\frac{u^2}{2\rho^2}}$.

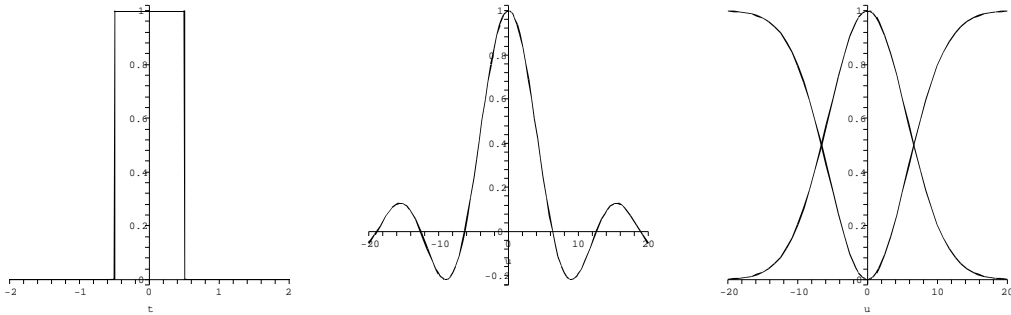
- (4) Notch filter: In het punt $u = 0$ geeft de Fourier getransformeerde het gemiddelde $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ van de functie $f(t)$ aan. Door dit op 0 te zetten, wordt bijvoorbeeld de helderheid van plaatjes genormeerd. De hiervoor benodigde filter heeft in het frequentie domein de functie $H(0) = 0$ en $H(u) = 1$ voor $u \neq 0$. Om hiervan een continue functie te maken moeten we rond $u = 0$ een scherpe dip hebben. In principe kunnen we hiervoor een high pass filter nemen, die alleen maar de frequenties heel dicht bij $u = 0$ onderdrukt. Een mogelijkheid hiervoor is een Gauss high pass filter $H(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$ met een kleine waarde van σ . Maar ook een functie zo als $H(u) = \frac{(au)^2}{1+(au)^2}$ met een grote waarde van a is geschikt.



Figuur I.25: Notch filters, links Gauss high pass filter, rechts met functie $\frac{(au)^2}{1+(au)^2}$.

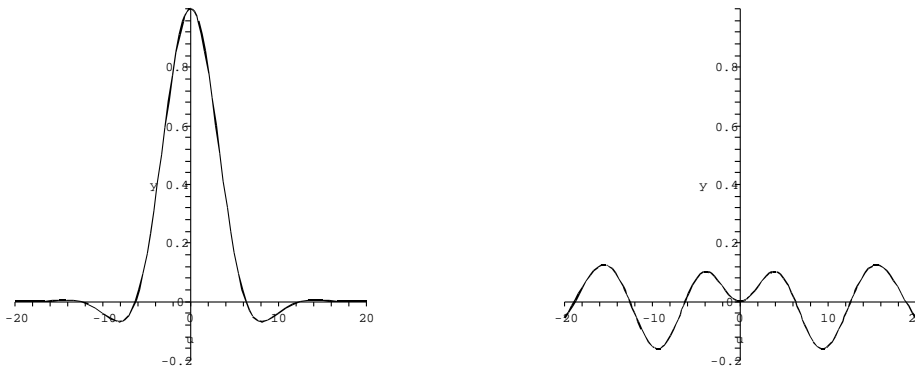
Voorbeeld: Rechthoek impuls

We kijken naar een rechthoek impuls $f(t)$ van breedte 1 en sterkte 1, hiervoor hebben we in het begin van deze les al de Fourier getransformeerde bepaald, namelijk $F(u) = \frac{\sin(\frac{1}{2}u)}{\frac{1}{2}u}$. De kleinste positieve nulpunt van $F(u)$ is 2π , zo als ook in het middelste plaatje van Figuur I.26 te zien is.



Figuur I.26: Rechthoek impuls, Fourier getransformeerde en Gauss low pass en high pass filters

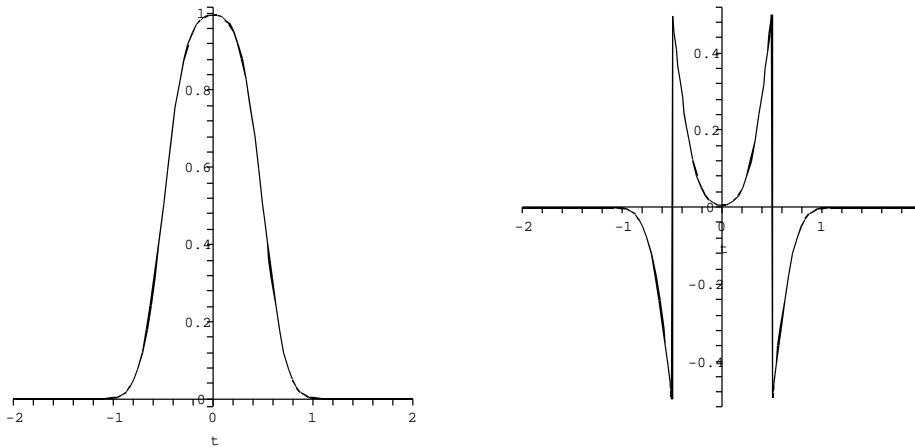
We gaan nu een Gauss low pass en high pass filter op dit signaal toepassen en kiezen hiervoor (enigszins willekeurig) de filter functie $H_l(u) = e^{-\frac{u^2}{20\pi}}$. De breedte van de Gauss functie $H_l(u)$ is zo gekozen, dat bij het minimum van $F(u)$ op $u = 3\pi$ de filter functie ongeveer bij 0.5 zit. Als high pass filter kiezen we $H_h(u) = 1 - H_l(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{20\pi}}$. De twee filter functies zijn in het rechterplaatje van Figuur I.26 te zien.



Figuur I.27: Product van Fourier getransformeerde met Gauss low pass en high pass filters

Het idee bij een filter is dat we zekere frequenties onderdrukken, hiervoor vermenigvuldigen we de Fourier getransformeerde met de filter functie. Voor de low pass filter krijgen we zo de functie $G_l(u) = F(u) \cdot H_l(u)$ en voor de high pass filter $G_h(u) = F(u) \cdot H_h(u)$. De functies $G_l(u)$ en $G_h(u)$ zijn in Figuur I.27 te zien en het is duidelijk hoe de low pass filter de heuvels in de Fourier getransformeerde $F(u)$ onderdrukt, behalve van de hoofdspits in $u = 0$. Omgekeerd verdwijnt bij de high pass filter deze hoofdspits helemaal, terwijl de andere maxima en minima voor hogere frequenties duidelijk zichtbaar blijven.

Het gefilterde signaal krijgen we nu als inverse Fourier transformatie van het



Figuur I.28: Inverse Fourier transformatie van het product met de filter functies geeft de gefilterde signalen

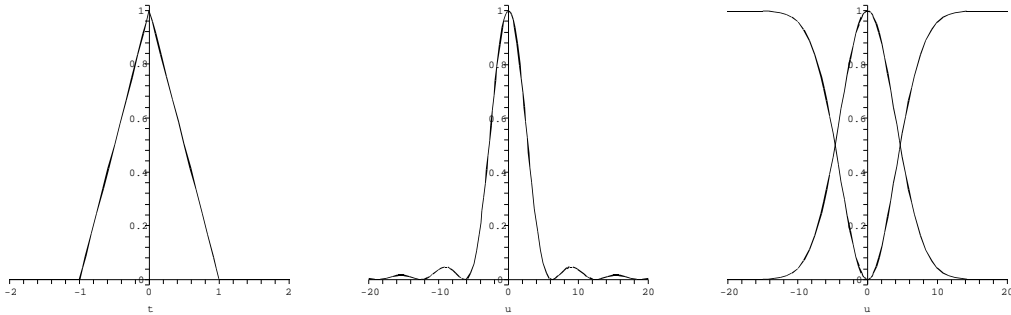
product van de Fourier getransformeerde en de filter functie in het frequentie domein, dus het low pass gefilterde signaal is $f_l(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_l(u)]$ en het high pass gefilterde signaal is $f_h(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_h(u)]$. Deze signalen zijn in Figuur I.28 te zien. Het is duidelijk dat de low pass filter het signaal grofweg bewaart, maar de scherpe knikken tot ronde bochten verzacht. In tegenstelling hiermee geeft het high pass gefilterde signaal aan, waar het signaal sterk verandert, namelijk in de punten $t = \pm 0.5$ van de knikken. In het punt $t = 0$ waar het signaal de grootste intensiteit heeft, geeft de high pass filter zelf de waarde 0, want hier veranderd de signaal niet. Dit is in overeenstemming met de waarnemingen bij Figuur I.23: Als de grijs-intensiteit op een gebied nauwelijks veranderd, geeft de high pass filter steeds eenzelfde grijs-kleuring, onafhankelijk of het origineel in dit gebied licht of donker grijs is.

Het feit dat $H_l(u) + H_h(u) = 1$ heeft tot gevolg dat $F(u) = F(u) \cdot H_l(u) + F(u) \cdot H_h(u)$ en hieruit volgt dat $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_l(u)] + \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_h(u)]$. Dit betekent dat in dit geval het originele signaal de som van het low pass gefilterde signaal en het high pass gefilterde signaal is.

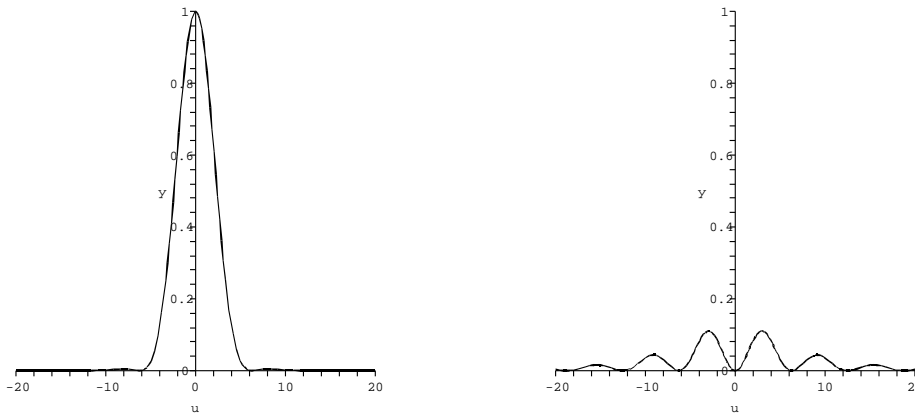
Voorbeeld: Driehoek impuls

We kijken op een soortgelijke manier naar het voorbeeld van een driehoek impuls $f(t)$ tussen -1 en 1 die in $t = 0$ de sterkte 1 heeft.. Hiervoor hadden we als Fourier getransformeerde de functie $F(u) = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}u)}{\frac{1}{2}u}\right)^2$ bepaald.

In dit geval passen we een scherpere low pass filter toe, die al op de frequentie $u = 2\pi$ waar $F(u)$ het kleinste positieve nulpunt heeft een waarde van ongeveer 0.5 heeft. Hiervoor kiezen we $H_l(u) = e^{-\frac{u^2}{10\pi}}$. Net zo als in het voorbeeld van de rechthoek nemen we als high pass filter het verschil $1 - H_l(u)$, dus $H_h(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{10\pi}}$.



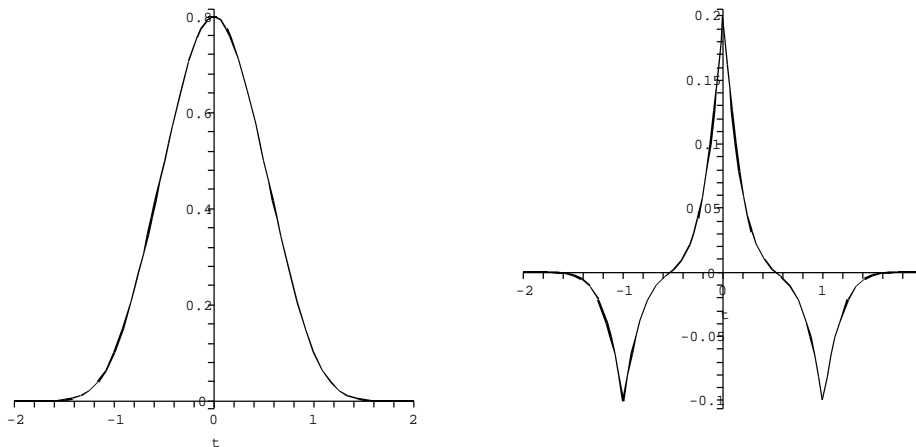
Figuur I.29: Driehoek impuls, Fourier getransformeerde en Gauss low pass en high pass filters



Figuur I.30: Product van Fourier getransformeerde met Gauss low pass en high pass filters

Als we in dit geval naar de producten van de Fourier getransformeerde $F(u)$ met de filter functies kijken, zien we duidelijk dat de low pass filter alleen maar de hoofdspits doorlaat en de rest van de Fourier getransformeerde onderdrukt. Interessant is hier het product met de high pass filter. De functie $F(u)$ heeft het eerste positieve maximum bij $u = 3\pi$, maar in het rechterplaatje van Figuur I.30 is duidelijk te zien dat het product $F(u) \cdot H_h(u)$ in $u = \pi$ al een maximum heeft. Met het blote oog is dit verschil tussen de hoofdspitsen van $F(u)$ en $F(u) \cdot H_l(u)$ nauwelijks te zien omdat de absolute hoogte van de spits overweegt. Maar de inverse Fourier transformatie van de producten in het frequentie domein maakt duidelijk dat de subtiele verschillen een belangrijke effect op het signaal hebben.

In het linkerplaatje van Figuur I.31 zien we dat de low pass filter de vorm van de driehoek impuls ongeveer bewaart, maar wel de knikken behoorlijk verzacht. Dit is het gevolg van onze keuze van een relatief scherpe low pass filter. Het high pass gefilterde signaal in het rechterplaatje laat duidelijk de drie knikken van de driehoek impuls bij $t = -1$, $t = 0$ en $t = 1$ zien.



Figuur I.31: Inverse Fourier transformatie van het product met de filter functies geeft de gefilterde signalen

BELANGRIJKE BEGRIPPEN IN DEZE LES

- Fourier getransformeerde van rechthoek impuls
- Fourier getransformeerde van Gauss functies zijn Gauss functies
- Dirac δ -functie
- low pass en high pass filters

OPGAVEN

30. Zij $f(t)$ de functie gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} 1 - t^2 & \text{als } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{als } |t| > 1. \end{cases}$$

- (i) Maak een schets van de functie.
- (ii) Bepaal de Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ van $f(t)$.
- (iii) Maak een schets van de Fourier getransformeerde $F(u)$.

31. Bepaal de Fourier getransformeerden van

- (i) $\cos(\omega t)$,
- (ii) $\sin(\omega t)$.

32. Laat zien dat voor de *signum functie*, gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} -1 & \text{als } t < 0 \\ 1 & \text{als } t > 0 \end{cases}$$

geldt, dat $\mathcal{F}[f(t)] = \frac{2}{iu}$.