

## Les 7 Discrete Fourier transformatie

In het algemeen hebben we het in de praktijk bijna nooit met signalen te maken die we door eenvoudige combinaties van simpele continue functies zo als  $\cos(x)$  of  $\sin(x)$  kunnen beschrijven. Meestal kunnen we de functiewaarden van een functie  $f(t)$  zelfs alleen maar door een meting bepalen. Dit maakt het natuurlijk onmogelijk, de Fourier getransformeerde van  $f(t)$  volgens de (theoretische) formule

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt$$

uit te rekenen, waarbij we het nog niet eens over de oneindige grenzen hebben.

Het idee om uit dit dilemma te ontsnappen is de functie door voldoende metingen zo goed te beschrijven, dat we niettemin belangrijke informatie over de functie in het tijds en frequentie domein krijgen.

### 7.1 Discretisering

Het beschrijven van een functie door in zeker afstanden de functiewaarde te meten noemt men *sampling*, het resultaat van een sampling is een *discretisering* van de functie.

Als men een tijdsinterval  $\Delta t$  en het aantal  $N$  van metingen kiest, beschrijft men een functie  $f(t)$  op de tijdstippen  $t_k := k \cdot \Delta t$  door de  $N$  discrete waarden

$$f_0 := f(0 \cdot \Delta t), f_1 := f(1 \cdot \Delta t), f_2 := f(2 \cdot \Delta t), \dots, f_{N-1} := f((N-1) \cdot \Delta t).$$

Het feit dat we hierbij steeds met  $t_0 = 0$  beginnen is geen echte beperking, want we kunnen door een verschuiving in het tijds domein steeds ervoor zorgen dat de eerste meting op  $t = 0$  plaats vindt.

Met betrekking tot de Fourier transformatie kijkt men nu ook naar een discrete versie van de Fourier getransformeerde in het frequentie domein. We hebben  $N$  metingen met een afstand van  $\Delta t$ , dus metingen over een tijdsinterval van  $T = N \cdot \Delta t$ . Het beste dat we zouden kunnen verwachten is dat de functie  $f(t)$  periode  $T$  heeft, want dan kunnen we elke functiewaarde  $f(t)$  identificeren met een functiewaarde met  $t \in [0, T]$  en vervolgens deze functiewaarde door de dichtstbij liggende meting benaderen.

Als we nu eens veronderstellen, dat  $f(t)$  periodiek met periode  $T$  is, dan kunnen we  $f(t)$  in een Fourier reeks  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$  ontwikkelen met  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . De frequenties die een rol in de Fourier getransformeerde van  $f(t)$  spelen, hebben dus een afstand van  $\Delta\omega := \frac{2\pi}{T}$ . Dit veralgemenen we nu ook naar functies  $f(t)$  die niet periodiek zijn en definiëren de discrete frequenties  $\omega_j$  door  $\omega_j := j \cdot \Delta\omega$ . Verder beslissen we nog dat het aantal discrete waarden in het frequentie domein even groot moet zijn als het aantal in het tijds domein, dus  $N$ . Het interval in het frequentie domein dat we zo overdekken is  $N \cdot \Delta\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$ . Samengevat hebben we dus:

$$\omega_j := j \cdot \Delta\omega = j \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{j}{N} \cdot \frac{1}{\Delta t} \text{ voor } j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Door deze definities krijgen we in het bijzonder de relatie

$$N \cdot \Delta t \cdot \Delta \omega = 2\pi$$

die zegt dat we bij een constant aantal  $N$  van metingen voor een kleinere tijdelijke afstand  $\Delta t$  van de metingen moeten betalen met een grotere afstand in het frequentie domein.

## 7.2 De discrete Fourier transformatie

In analogie met de Fourier reeks en de Fourier transformatie proberen we nu de waarden  $f(t_k)$  op de discrete tijdstippen  $t_k = k \cdot \Delta t$  te beschrijven door informatie voor de frequenties  $\omega_j = j \cdot \Delta \omega$  in het frequentie domein. Als  $f(t)$  een periodieke functie met periode  $T$  en  $\Delta \omega = \frac{2\pi}{T}$  was, zouden we  $f(t_k)$  schrijven als

$$f(t_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\Delta\omega t_k}.$$

Aan de andere kant geldt voor de Fourier transformatie dat

$$f(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iut_k} du.$$

Maar we beperken ons nu tot informatie op de discrete frequenties  $\omega_j = j \cdot \Delta \omega$  voor  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ , daarom kan in de Fourier reeks  $j$  alleen maar van 0 tot  $N - 1$  lopen en moeten we de integraal van de Fourier transformatie naar een som over de termen  $e^{iut_k}$  met  $u = \omega_k$  vertalen. Uit beide invalshoeken komt het erop neer,  $f(t_k)$  te schrijven als lineaire combinatie van  $e^{ij\Delta\omega t_k}$  met geschikte coëfficiënten  $F_j$  voor  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ . Dit geeft al de eerste formule voor de discrete Fourier transformatie, preciezer gezegd de formule voor de inverse discrete Fourier transformatie, namelijk

$$f(t_k) = f(k \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{ij\Delta\omega t_k}$$

waarbij de factor  $\frac{1}{N}$  net als bij de Fourier reeks en de Fourier transformatie een normeringsfactor is die enigszins willekeurig op de Fourier transformatie en de inverse Fourier transformatie opgedeeld wordt.

De vraag is nu hoe we de coëfficiënten  $F_j$  moeten bepalen. Het idee bij de Fourier reeks en bij de Fourier transformatie was in principe, een orthogonaal stelsel van functies (met betrekking tot een geschikt inproduct) te kiezen en de orthogonale projecties van de functie  $f(t)$  op deze functies te berekenen. Iets soortgelijks gebeurt in principe ook bij de discrete Fourier transformatie. Als de tijdstippen  $t_0, t_1, \dots, t_{N-1}$  vast gekozen zijn, kunnen we een inproduct voor complexe functies definiëren door

$$\Phi(f(t), g(t)) := \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \cdot \overline{g(t_k)}.$$

We laten nu zien dat de functies  $e^{ij\Delta\omega t}$  voor  $j = 0, 1, \dots, N-1$  een orthogonaal stelsel met betrekking tot dit inproduct vormen.

Door uitschrijven van het product ziet men algemeen dat

$$(1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1}) = 1 - a^N$$

en hieruit volgt dus dat

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1} = \begin{cases} \frac{1-a^N}{1-a} & \text{als } a \neq 1 \\ N & \text{als } a = 1 \end{cases}$$

Dit passen we nu op het inproduct van de functies  $e^{ij\Delta\omega t}$  en  $e^{il\Delta\omega t}$  toe, er geldt:

$$\Phi(e^{ij\Delta\omega t}, e^{il\Delta\omega t}) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{ij\Delta\omega t_k} \cdot e^{-il\Delta\omega t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(j-l)\Delta\omega t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t})^k.$$

Merk op dat we  $\Delta\omega$  zo hebben gekozen dat  $\Delta\omega\Delta t \cdot N = 2\pi$ , dus  $\Delta\omega\Delta t = \frac{2\pi}{N}$ . Hieruit volgt dat

$$(e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t})^N = e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t N} = (e^{2\pi i})^{j-l} = 1.$$

Aan de andere kant is

$$e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t} = e^{i(j-l)\frac{2\pi}{N}} = e^{2\pi i \frac{j-l}{N}} \begin{cases} \neq 1 & \text{als } j \neq l \\ = 1 & \text{als } j = l \end{cases}$$

omdat  $j$  en  $l$  van 0 tot  $N-1$  lopen en dus  $j-l$  nooit een veelvoud van  $N$  kan zijn. Bij elkaar genomen volgt hieruit dat

$$\Phi(e^{ij\Delta\omega t}, e^{il\Delta\omega t}) = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t})^k = \begin{cases} 0 & \text{als } j \neq l \\ N & \text{als } j = l \end{cases}$$

Net als bij de Fourier reeks vinden we nu de coëfficiënt  $F_j$  van  $e^{ij\Delta\omega t}$  in  $f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{ij\Delta\omega t_k}$  als inproduct  $\Phi(f(t), e^{ij\Delta\omega t})$ , dus

$$F_j = \Phi(f(t), e^{ij\Delta\omega t}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega t_k}.$$

Als controle vullen we dit eens in:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{ij\Delta\omega t_k} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) e^{-ij\Delta\omega t_l} \right) e^{ij\Delta\omega t_k} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) e^{-ij\Delta\omega l\Delta t} \right) e^{ij\Delta\omega k\Delta t} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \left( \sum_{j=0}^{N-1} e^{ij\Delta\omega(k-l)\Delta t} \right) = \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \left( \sum_{j=0}^{N-1} (e^{i(k-l)\Delta\omega\Delta t})^j \right) \end{aligned}$$

Maar de som  $\sum_{j=0}^{N-1} (e^{i(k-l)\Delta\omega\Delta t})^j$  is alleen maar voor  $l = k$  ongelijk aan 0 en in dit geval is de waarde  $N$ . Van de som over  $l$  blijft dus alleen maar de term voor  $l = k$  over en we hebben  $\sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{ij\Delta\omega t_k} = f(t_k) \cdot N$ .

Wat we zojuist hebben gevonden is de discrete versie van de Fourier integraal formule, namelijk

$$f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) e^{-ij\Delta\omega t_l} \right) e^{ij\Delta\omega t_k}.$$

Deze impliceert dat de discrete Fourier transformatie gegeven is door

$$f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{ij\Delta\omega t_k} \quad \text{met} \quad F_j = \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) e^{-i \cdot j \Delta\omega \cdot l \Delta t}.$$

### Motivatie middels trigonometrische interpolatie

Een alternatieve formulering van deze toegang tot de discrete Fourier transformatie zit in de *trigonometrische interpolatie*. We weten dat er voor  $N$  verschillende  $x$ -waarden  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$  met bijhorende  $y$ -waarden  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$  een eenduidige veelterm  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{N-1}x^{N-1}$  van graad  $N - 1$  is, zo dat  $p(x_k) = y_k$  voor alle  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ . Met noemt  $p(x)$  de interpolatie van de gegeven punten, omdat de grafiek van  $p(x)$  de punten  $(x_k, y_k)$  verbindt. Het idee achter het bewijs is simpel: De  $N$  paren van  $x - y$ -waarden geven  $N$  lineaire vergelijkingen voor de  $N$  coëfficiënten van  $p(x)$ , en omdat de functies  $x^j$  lineair onafhankelijk zijn, heeft het bijhorende stelsel lineaire vergelijkingen een eenduidige oplossing.

Als men nu de functies  $x^0, \dots, x^j, \dots$  door de functies  $(e^{i\omega x})^0, \dots, (e^{i\omega x})^j, \dots$  vervangt die ook lineair onafhankelijk zijn, krijgt men een analoge uitspraak voor de interpolatie met behulp van deze functies. Wegens de relatie  $e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$  spreekt men hierbij van *trigonometrische interpolatie*.

We noemen nu de variabele  $x$  weer  $t$  en vervangen  $\omega$  door  $\Delta\omega$ , dan luidt het idee, de functie  $f(t)$  te benaderen door de trigonometrische interpolatie  $\tilde{f}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij\Delta\omega t}$  die gedefinieerd is door de eigenschappen dat  $\tilde{f}(t_k) = f(t_k)$  voor  $k = 0, \dots, N - 1$ . Als men hierop de orthogonaliteitsrelaties voor de functies  $e^{ij\Delta\omega t}$  toepast, vindt men weer dat de coëfficiënten  $c_j$  voldoen aan

$$c_j = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega k \Delta t}.$$

### Motivatie middels Dirac $\delta$ -functie

Omdat we bij de Fourier transformatie naar de eigenschappen van de Dirac  $\delta$ -functie hebben gekeken, kunnen we ook een andere motivatie voor de coëfficiënten van de discrete Fourier transformatie geven.

We weten over de functie  $f(t)$  alleen maar de waarden die we hebben gemeten, dus de functiewaarden  $f(t_k)$  voor  $t = k \cdot \Delta t$ . We vervangen de functie  $f(t)$

nu door de gesamplede functie

$$f_s(t) := \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \cdot \delta(t - t_k)$$

die uit (oneindige) spitsen op de tijdstippen  $t_k$  bestaat die de gemeten waarden  $f(t_k)$  als gewichten hebben. De gesamplede functie heeft de belangrijke eigenschap dat  $\int_{-\infty}^{\infty} f_s(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$  en dat de relatieve intensiteiten van de spitsen evenredig zijn met de gemeten functiewaarden.

Maar voor de functie  $f_s(t)$  kunnen we de Fourier getransformeerde makkelijk berekenen, dit is

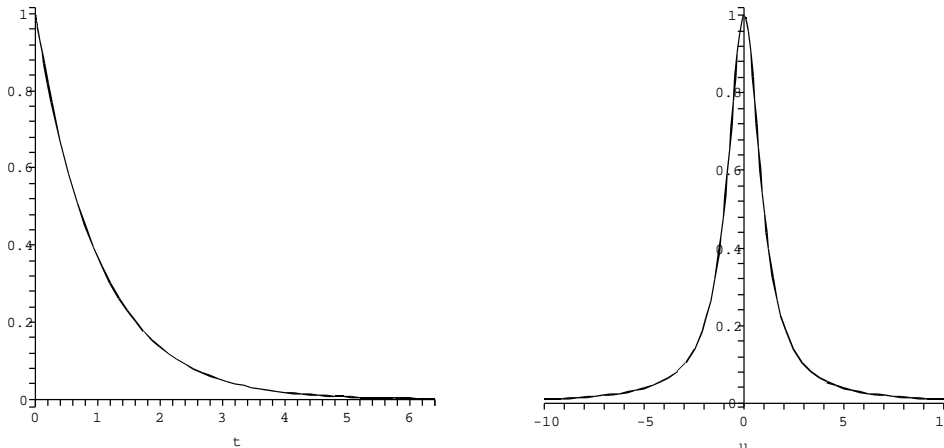
$$F_s(u) = \mathcal{F}[f_s(t)] = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-iut_k}.$$

Als we de functiewaarden van  $F_s(u)$  nu op de discrete frequenties  $u = \omega_j = j \cdot \Delta\omega$  bekijken, hebben we

$$F_s(\omega_j) = f(t_k) e^{-ij\Delta\omega t_k} = F_j$$

dus de functiewaarden van de Fourier getransformeerde van de gesamplede functie op de discrete frequenties  $\omega_j$  zijn precies de coëfficiënten van de discrete Fourier transformatie. We hebben boven al gezien dat we de discrete functiewaarden  $f(t_k)$  uit de discrete waarden  $F_s(\omega_j) = F_j$  van de Fourier getransformeerde kunnen reproduceren.

### 7.3 Voorbeeld van een discrete Fourier transformatie



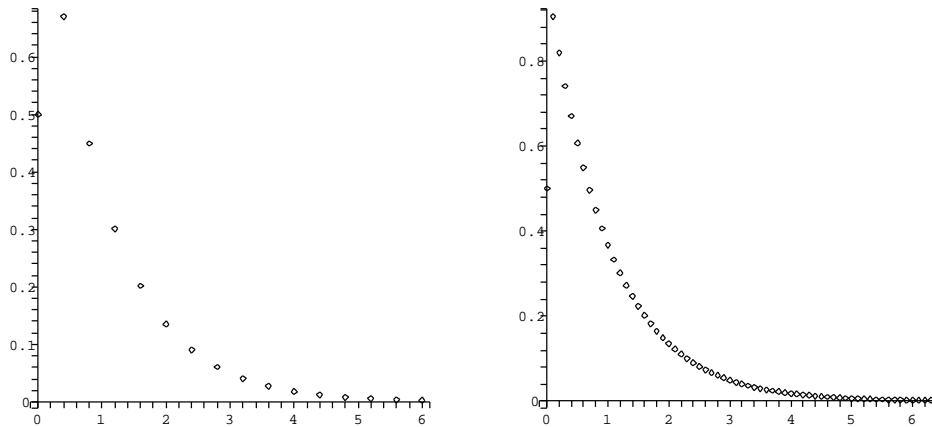
Figuur I.32: Exponentiële afname  $f(t) = e^{-t}$  met Fourier getransformeerde.

We gaan nu eens een voorbeeld van een discrete Fourier transformatie bekijken. Hiervoor kiezen we de functie

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t} & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases}$$

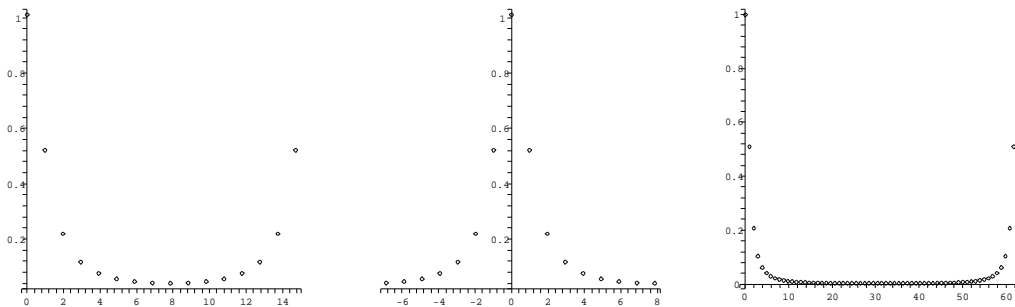
die een exponentiële afname beschrijft. De Fourier getransformeerde van  $f(t)$  hebben we al eerder bepaald, er geldt

$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{1 + iu} \quad \text{met} \quad \Re(F(u)) = \frac{1}{1 + u^2}.$$



Figuur I.33: Discretisering van een exponentiële afname met 16 (links) en 64 punten (rechts).

We samplen de functie  $f(t)$  op twee manieren: Een keer met  $N = 16$  punten op een afstand van  $\Delta t = 0.4$  en een keer met  $N = 64$  punten op een afstand van  $\Delta t = 0.1$ . Dit is in Figuur I.33 te zien. Merk op dat de  $t$ -as net zo geschald is als bij de continue versie, dus met  $k \cdot \Delta t$ . In beide gevallen is  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{6.4}$ , maar in het eerste geval is  $N \cdot \omega = 5\pi$ , in het tweede geval is  $N \cdot \omega = 20\pi$ , we overdekken dus bij een sampling met vier keer zo veel punten over hetzelfde tijdsinterval een vier keer zo groot interval in het frequentie domein.



Figuur I.34: Discrete Fourier transformatie van een exponentiële afname gesampled met 16 (links) en 64 punten (rechts).

Als we het linker en het rechter plaatje in Figuur I.34 met de continue Fourier getransformeerde vergelijken, zien we dat we de discrete Fourier transformatie

iets anders moeten interpreteren. Eigenlijk hoort namelijk (zo als bij de Fourier reeks) bij elke coëfficiënt  $F_j$  met  $j > 0$  ook een coëfficiënt met  $j < 0$ . Deze vinden we als volgt: We kunnen de definitie

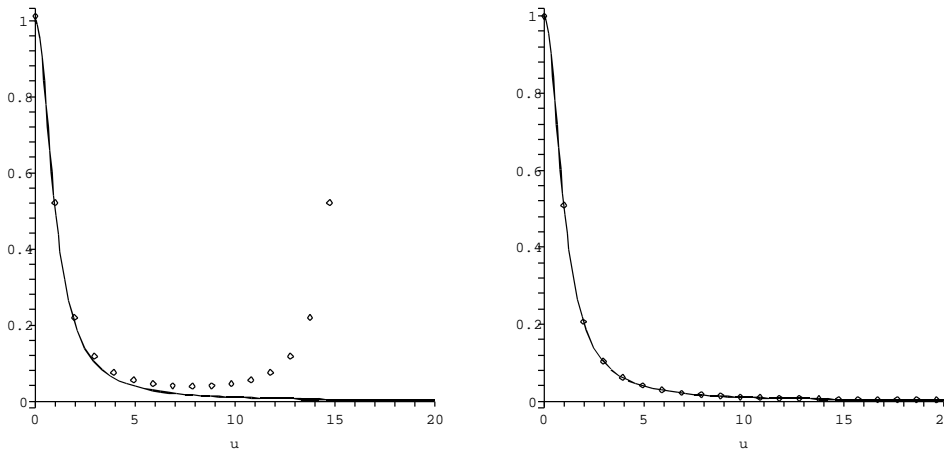
$$F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega k\Delta t}$$

ook lezen voor  $j$  buiten het interval  $[0 \dots N - 1]$ , en omdat  $\Delta\omega\Delta t \cdot N = 2\pi$  en dus  $e^{-iN\Delta\omega\Delta t} = 1$  is, geldt

$$F_{j+N} = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i(j+N)\Delta\omega k\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} = F_j.$$

In het bijzonder betekent dit dat  $F_{-j} = F_{N-j}$  en we moeten de coëfficiënten  $F_{\frac{N}{2}}, \dots, F_{N-1}$  dus eigenlijk lezen als de coëfficiënten  $F_{-\frac{N}{2}}, \dots, F_{-1}$ .

Voor het gemak laten we in de plaatjes niettemin  $j$  van 0 tot  $N - 1$  lopen en denken ons bij het vergelijken met de continue Fourier transformatie de rechter helft van het plaatje links aan de linker helft geplakt. De zo veranderde versie van de discrete Fourier transformatie met 16 punten is in het middelste plaatje van Figuur I.34 te zien.



Figuur I.35: Vergelijk van continue en discrete Fourier transformatie.

Ten slotte vergelijken we de discrete Fourier transformatie met de continue. In Figuur I.35 zijn de waarden van de coëfficiënten  $F_j$  als punten naast de grafiek van de continue Fourier getransformeerde  $F(u)$  te zien. Ook in dit geval is de  $u$ -as zo geschald, dat de coëfficiënt  $F_j$  op de frequentie  $u = j \cdot \Delta\omega$  terecht komt. Het is duidelijk dat bij een sampling met te grote tijdsintervallen de discrete Fourier getransformeerde al snel behoorlijk van de continue Fourier getransformeerde afwijkt. Een verhoging van het aantal metingen op hetzelfde tijdsinterval lijdt echter tot een duidelijk verbeterde benadering. Merk op dat in het rechter plaatje niet eens de helft van de 64 discrete frequentie waarden afgebeeld zijn.

### 7.4 Eigenschappen van de discrete Fourier transformatie

In principe heeft de discrete Fourier transformatie dezelfde eigenschappen als de gewone Fourier transformatie:

Zij  $f(t)$  een functie, die we op  $N$  punten  $t_k = k \cdot \Delta t$  met een tijdelijke afstand van  $\Delta t$  aftasten. We definiëren  $f_k := f(t_k)$ , dan geldt voor de coëfficiënten  $F_j$  van de discrete Fourier transformatie dat  $F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ij\Delta\omega k\Delta t}$  met  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t}$ . Net zo veronderstellen we dat de functies  $g(t)$  en  $h(t)$  met dezelfde  $N$  en  $\Delta t$  gediscrètiseerd zijn als  $g_k$  en  $h_k$  en discrete Fourier getransformeerde  $G_j$  en  $H_j$  hebben.

#### Lineariteit

Omdat we functies puntsgewijs optellen, is de discrete Fourier getransformeerde van  $f_k + g_k$  gelijk aan  $F_j + G_j$ .

Analoog geldt voor de vermenigvuldiging met een factor, dat  $a \cdot f_k$  de discrete Fourier getransformeerde  $a \cdot F_j$  heeft.

#### Verschuiving

Als  $g_k = f_{k-l}$  dan is  $G_j = F_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jl}$  want

$$\begin{aligned} G_j &= \sum_{k=0}^{N-1} f_{k-l} e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} = \sum_{k=l}^{l+N-1} f_{k-l} e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ij\Delta\omega(k+l)\Delta t} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} \right) e^{-ij\Delta\omega l\Delta t} = F_j e^{-ij\Delta\omega l\Delta t}. \end{aligned}$$

#### Convolutie

Het convolutie product  $h_k = f_k * g_k$  van twee gediscrètiseerde functies  $f_k$  en  $g_k$  is in principe zo gedefinieerd als of  $f_k$  en  $g_k$  de coëfficiënten van de term  $x^k$  in twee veeltermen zijn en  $h_k$  de coëfficiënt van de term  $x^k$  in het product van deze veeltermen is. Dit betekent dat

$$h_k := \sum_{l=0}^{N-1} f_l g_{k-l} =: f_k * g_k.$$

De belangrijke eigenschap van het convolutie product is, dat de discrete Fourier getransformeerde  $H_j$  van  $h_k = f_k * g_k$  gelijk is aan het product van de discrete Fourier getransformeerden van  $f_k$  en  $g_k$ , dus  $H_j = F_j \cdot G_j$ .

### 7.5 Snelle (discrete) Fourier transformatie (FFT)

Om bij een gesampled functie  $(f_0, \dots, f_{N-1})$  de coëfficiënten  $F_j$  van de discrete Fourier transformatie te berekenen, zijn er voor elke coëfficiënt  $N$  vermenigvuldigingen nodig, voor alle coëfficiënten dus  $N^2$  vermenigvuldigingen. Bij een typische waarden van  $N = 1024$  is dit al behoorlijk veel rekenwerk, omdat bij veranderlijke signalen vaak opnieuw gesampled moet worden.



Een nauwkeurige analyse van het rekenwerk laat immers zien, dat men door een slimme manier van rekenen het rekenwerk behoorlijk kan reduceren, namelijk tot  $N \cdot 2 \log(N)$  in plaats van  $N^2$  vermenigvuldigingen. Deze manier om de discrete Fourier transformatie uit te rekenen noemt men *snelle Fourier transformatie*, afgekort met *FFT* voor *fast Fourier transformation*. Bij  $N = 1024$  scheelt de FFT bijvoorbeeld een factor van  $\frac{N}{2 \log(N)} = \frac{1024}{10} \approx 100$  in het rekenwerk.

We gaan vanaf nu ervan uit dat  $N$  even is (meestal is  $N$  zelfs van de vorm  $2^m$ ) en definiëren  $z := e^{-i\Delta\omega\Delta t} = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ . We merken nog op dat wegens  $z^N = e^{-2\pi i} = 1$  geldt dat  $z^{jk} = z^{j(k+N)}$ .

Met deze notatie ziet de discrete Fourier transformatie er zo uit:

$$F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^{jk}$$

en dit laat zich ook met een matrix schrijven, namelijk als

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z^{N-1} & z^{2(N-1)} & \dots & z^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Een coëfficiënt  $F_{2j}$  met even index schrijven we nu iets anders, want voor  $k' \geq \frac{N}{2}$  kunnen we  $k'$  schrijven als  $k' = k + \frac{N}{2}$ , dan is

$$f_{k'} z^{2jk'} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2j(k+\frac{N}{2})} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2jk} z^{jN} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2jk}.$$

Hieruit volgt voor coëfficiënten met even index:

$$F_{2j} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^{2jk} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_k + f_{k+\frac{N}{2}}) z^{2jk}.$$

Op een soortgelijke manier behandelen we ook de coëfficiënten  $F_{2j+1}$  met oneven index. Voor  $k' \geq \frac{N}{2}$  schrijven we weer  $k' = k + \frac{N}{2}$ , dan is

$$f_{k'} z^{(2j+1)k'} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{(2j+1)(k+\frac{N}{2})} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2jk} z^k z^{jN} z^{\frac{N}{2}} = -f_{k+\frac{N}{2}} z^k z^{2jk},$$

want  $z^{\frac{N}{2}} = e^{-\pi i} = -1$ . Hieruit volgt voor coëfficiënten met oneven index:

$$F_{2j+1} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^{(2j+1)k} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_k - f_{k+\frac{N}{2}}) z^k z^{2jk}$$

Met behulp van deze formules kunnen we de coëfficiënten met even en oneven indices apart door matrices beschrijven, het aardige daarbij is dat de matrices

nu alleen maar nog half zo groot zijn, dus  $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$  in plaats van  $N \times N$ :

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & \dots & (z^2)^{\frac{N}{2}-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z^{N-2} & z^{2(N-2)} & \dots & (z^2)^{(\frac{N}{2}-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 + f_{\frac{N}{2}} \\ f_1 + f_{1+\frac{N}{2}} \\ \vdots \\ f_{\frac{N}{2}-1} + f_{N-1} \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & \dots & (z^2)^{\frac{N}{2}-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z^{N-2} & z^{2(N-2)} & \dots & (z^2)^{(\frac{N}{2}-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 - f_{\frac{N}{2}} \\ z(f_1 - f_{1+\frac{N}{2}}) \\ \vdots \\ z^{\frac{N}{2}-1}(f_{\frac{N}{2}-1} + f_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Om deze reductie herhaald toe te kunnen passen is het wenselijk dat  $N$  een macht van 2 is, dus van de vorm  $N = 2^m$ . Dit bereikt men meestal door  $N$  gewoon zo te kiezen, maar soms ook door aanvullen van de waarden met nullen. Er zijn ook versies van de FFT ontwikkeld, waarbij dit niet nodig is.

Om de methode beter toe te lichen gaan we eens een voorbeeld met  $N = 8$  expliciet uitwerken. De berekening die we eigenlijk moeten uitvoeren is

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 & z^5 & z^6 & z^7 \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 & z^8 & z^{10} & z^{12} & z^{14} \\ 1 & z^3 & z^6 & z^9 & z^{12} & z^{15} & z^{18} & z^{21} \\ 1 & z^4 & z^8 & z^{12} & z^{16} & z^{20} & z^{24} & z^{28} \\ 1 & z^5 & z^{10} & z^{15} & z^{20} & z^{25} & z^{30} & z^{35} \\ 1 & z^6 & z^{12} & z^{18} & z^{24} & z^{30} & z^{36} & z^{42} \\ 1 & z^7 & z^{14} & z^{21} & z^{28} & z^{35} & z^{42} & z^{49} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

In de eerste reductiestap gaat dit over in de twee vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 \\ 1 & z^4 & z^8 & z^{12} \\ 1 & z^6 & z^{12} & z^{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 + f_4 \\ f_1 + f_5 \\ f_2 + f_6 \\ f_3 + f_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_5 \\ F_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 \\ 1 & z^4 & z^8 & z^{12} \\ 1 & z^6 & z^{12} & z^{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 - f_4 \\ z(f_1 - f_5) \\ z^2(f_2 - f_6) \\ z^3(f_3 - f_7) \end{pmatrix}$$

en in de tweede stap krijgen we de vier vergelijkingen

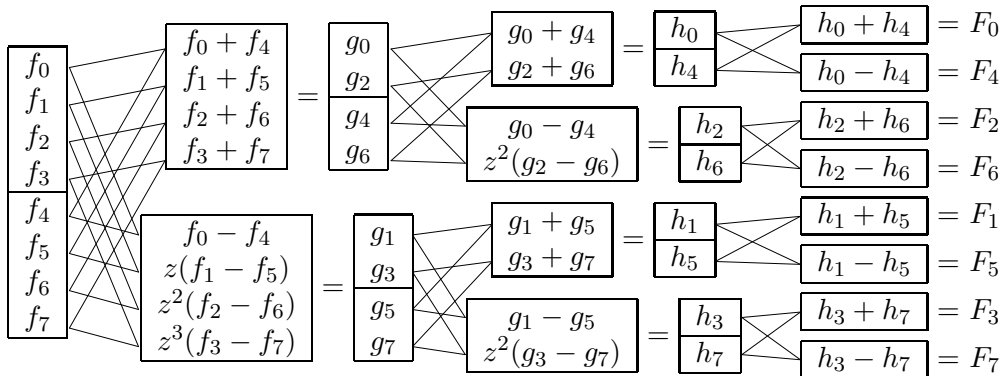
$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 + f_4) + (f_2 + f_6) \\ (f_1 + f_5) + (f_3 + f_7) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 + f_4) - (f_2 + f_6) \\ z^2((f_1 + f_5) - (f_3 + f_7)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 - f_4) + z^2(f_2 - f_6) \\ z(f_1 - f_5) + z^3(f_3 - f_7) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 - f_4) - z^2(f_2 - f_6) \\ z^2(z((f_1 + f_5) - (f_3 + f_7))) \end{pmatrix}$$

De grap is nu dat we dit iets anders uitrekenen, namelijk beginnend met de vector  $(f_0, \dots, f_7)$  de stappen op één vector toepassen, die uiteindelijk (tot op volgorde na) de vector  $(F_0, \dots, F_7)$  wordt. We vermijden zo, dat we uitdrukkingen zo als  $(f_0 + f_4)$  of  $z(f_1 - f_5)$  die herhaald voorkomen meerdere keren berekenen. Dit gebeurt volgens het volgende schema:



Figuur I.36: Schema van FFT voor  $N = 8$  punten

In de laatste stap hebben we gebruik ervan gemaakt dat  $z^{\frac{N}{2}} = z^4 = -1$ . Merk op dat we de indices van de  $g_i$  en  $h_i$  zo hebben aangepast dat deze met de goede index van  $F_i$  corresponderen. Dit is in de praktijk niet nodig, want de volgorde van de  $F_i$  kunnen we makkelijk achterhalen, als we de indices binair schrijven. De goede volgorde van de  $F_i$  krijgen we, door de binaire schrijfwijzen voor de getallen  $0, \dots, N - 1$  te spiegelen (d.w.z. van rechts naar links te lezen). Hierbij schrijven we een getal  $n$  binair als een keten  $n = a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0$  met  $a_i \in \{0, 1\}$  zo dat  $n = a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + a_1 \cdot 2 + a_0$ . Bijvoorbeeld schrijven we het getal 42 binair als 101010. Om duidelijk te maken dat een getal een binaire schrijfwijze is, voegt men soms een index 2 aan het getal toe, bijvoorbeeld  $42 = 101010_2$ .

In het voorbeeld met  $N = 8$  krijgen we op deze manier de volgorde van de  $F_i$  als volgt:

0 = 000 <sub>2</sub>	000 <sub>2</sub> = 0
1 = 001 <sub>2</sub>	100 <sub>2</sub> = 4
2 = 010 <sub>2</sub>	010 <sub>2</sub> = 2
indices 3 = 011 <sub>2</sub>	110 <sub>2</sub> = 6
4 = 100 <sub>2</sub>	001 <sub>2</sub> = 1
5 = 101 <sub>2</sub>	101 <sub>2</sub> = 5
6 = 110 <sub>2</sub>	011 <sub>2</sub> = 3
7 = 111 <sub>2</sub>	111 <sub>2</sub> = 7

van  $f_i$  worden gespiegeld      de indices van  $F_i$

In de praktijk zijn er verschillende manieren om de FFT te implementeren, de meest bekende zijn de *Cooley-Tukey* en de *Sande-Tukey*

methode.

In principe heeft pas de ontwikkeling van de FFT de doorbraak van de Fourier transformatie in de signaalverwerking veroorzaakt, want eerder was het berekenen van de Fourier getransformeerde voor interessante toepassingen gewoon ondoenlijk. Inmiddels heeft men overigens achterhaald dat het idee van de FFT al door Gauss wordt toegepast.

## 7.6 Shannon's aftast-theorema

Een belangrijke vraag die we ons bij het samplen van een signaal moeten stellen, is, hoe veel informatie we door het samplen eigenlijk verliezen. In de signaalverwerking komen we dit probleem bijvoorbeeld bij de digitalisering van analoge signalen tegen, zo als bij een CD-opname van een concert. De vraag is of we het oorspronkelijke signaal uit de digitale informatie, die in de discrete samples zit, kunnen reconstrueren.

In het algemeen is dit natuurlijk onmogelijk, als we maar een keer per seconde een sample hebben kunnen we bijna niets erover zeggen, wat tussendoor gebeurd is. Maar als we met een hogere frequentie samplen, kunnen we wel verwachten dat we meer informatie terug kunnen vinden.

Intuïtief kunnen we verwachten dat het resultaat ermee te maken heeft, welke frequenties in het signaal voorkomen. Om hoge frequenties te kunnen reconstrueren, moeten we zeker ook met een hogere frequentie samplen. Hoe het hiermee precies zit, zegt het aftast-theorema dat door Claude E. Shannon 1949 wordt bewezen. Hierbij gaat het om signalen met een begrensde *bandbreedte*, d.w.z. om signalen waarin alleen frequenties uit een begrensd interval een rol spelen. In de taal van de Fourier transformatie kunnen we dit zo uitdrukken, dat de Fourier getransformeerde van het signaal alleen maar op een begrensd interval ongelijk aan 0 is.

Het concept van begrensde bandbreedte is iets redelijk gewoons, het meest belangrijke voorbeeld is het menselijke oor, dat bij kinderen frequenties tot hooguit 25000 Hz kan verwerken en bij oudere mensen al bij frequenties van 12000 - 15000 Hz ophoudt. Om deze reden zijn ook de meeste HiFi-toestellen zo gebouwd, dat ze alleen maar frequenties tussen 20 Hz en 25 kHz verwerken. Nog beperkter is de bandbreedte van de telefoon, hier worden alleen maar frequenties tussen 300 Hz en 3500 Hz over gebracht.

Het aftast-theorema zegt nu dat we een signaal minstens met de dubbele frequentie moeten samplen die in het signaal een rol speelt, preciezer:

**Shannon's aftast-theorema** (sampling/scanning theorem):

Zij  $f(t)$  een signaal met Fourier getransformeerde  $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$  waarvoor geldt dat  $F(u) = 0$  voor alle  $u$  met  $|u| > u_m = 2\pi f_m$ . Als voor het aftast-interval  $\Delta t$  en de aftast-frequentie  $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$  geldt dat  $\omega \geq 2u_m$ , dus  $\Delta t \leq \frac{1}{2f_m}$ , dan laat zich het signaal  $f(t)$  uit de discrete samples  $f_k := f(k \cdot \Delta t)$  met  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  reconstrueren.

De minimale frequentie  $2f_m$  heet ook de *Nyquist-frequentie*, het interval  $\Delta t = \frac{1}{2f_m}$  het *Nyquist-interval*. Let op dat er in de literatuur ver-

schillende definities voor de Nyquist-frequentie en het Nyquist-interval gegeven worden, soms zit er een factor 2 tussen.

Voor een CD-opname met een bandbreedte van 22 kHz hebben we dus een sampling frequentie van minstens 44 kHz nodig, terwijl voor een telefoon gesprek een sampling frequentie van 8 kHz voldoende is.

De vraag is nu, hoe we het signaal uit de discrete waarden  $f_k$  kunnen reconstrueren. Dit gebeurt door een interpolatie van functies van de vorm  $\frac{\sin(x)}{x}$ , die we als Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls al eerder zijn tegengekomen. Men vindt het signaal terug uit de formule

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \frac{\sin(\frac{\omega}{2}(t - k\Delta t))}{\frac{\omega}{2}(t - k\Delta t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \frac{\sin(\frac{t}{\Delta t}\pi - k\pi)}{\frac{t}{\Delta t}\pi - k\pi}$$

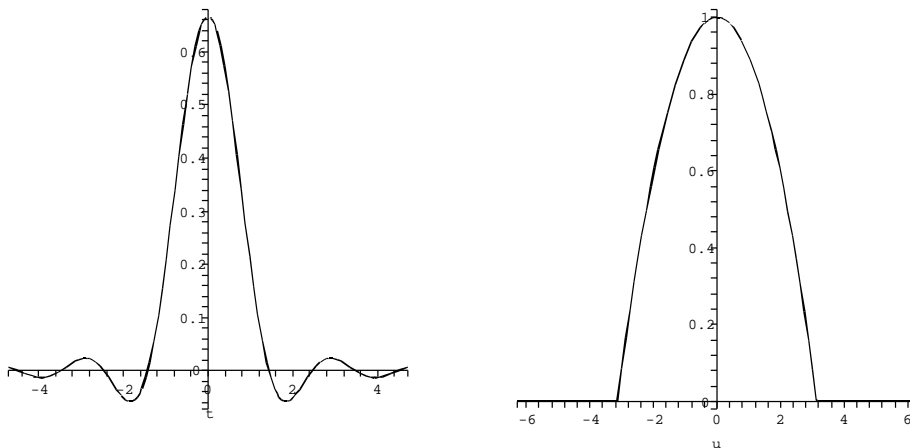
We gaan het proces van sampling en interpolatie aan een voorbeeld bekijken. Als functie nemen we

$$f(t) = \frac{2 \sin(\pi t) - 2\pi t \cos(\pi t)}{\pi^3 t^3}$$

dan heeft  $f(t)$  de Fourier getransformeerde

$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \begin{cases} 1 - (\frac{u}{\pi})^2 & \text{als } |u| \leq \pi \\ 0 & \text{als } |u| > \pi \end{cases}$$

De functie  $f(t)$  is natuurlijk verkregen als inverse Fourier transformatie van een functie die alleen maar op een eindig interval ongelijk aan 0 is.



Figuur I.37: Functie met Fourier getransformeerde van begrensde bandbreedte.

Als we  $f(t)$  met tijdelijke afstanden van  $\Delta t$  samples, krijgen we de discrete waarden  $f_k = f(k \cdot \Delta t) = f(t_k)$ . De discrete functiewaarden  $f_k$  beschrijven we

nu door de *sampling functie* van  $f(t)$ , namelijk

$$f_s(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\delta(t - t_k)$$

die op de tijdstippen  $t_k$  Dirac  $\delta$ -functies met intensiteit  $f(t_k)$  heeft.

We berekenen nu eerst de Fourier getransformeerde van de speciale functie  $\text{III}(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k)$ : De functie  $\text{III}(t)$  is periodiek met periode  $\Delta t$  en heeft dus een Fourier reeks

$$\text{III}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \text{ waarbij } \omega = \frac{2\pi}{\Delta t}.$$

Voor de coëfficiënten  $c_k$  geldt dat

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \text{III}(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t) e^{-ik\omega t} dt = \frac{1}{\Delta t}.$$

Hieruit volgt dat

$$\text{III}(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega t}.$$

Aan de andere kant weten we dat de functie  $e^{ik\omega t}$  de Fourier getransformeerde  $2\pi\delta(u - k\omega)$  heeft, bij elkaar genomen volgt hieruit dat

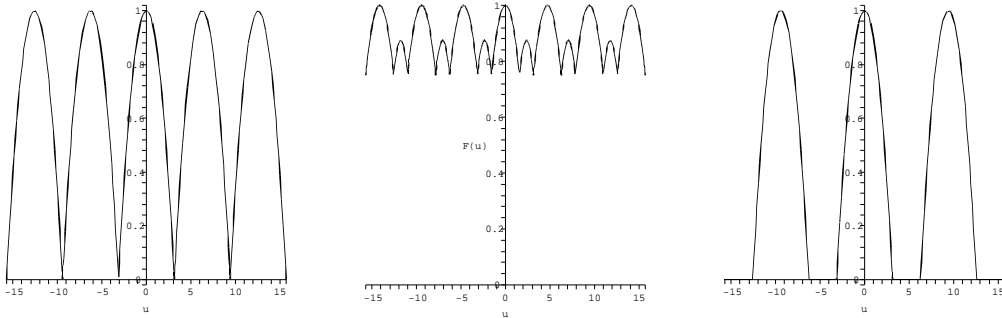
$$\mathcal{F}[\text{III}(t)] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(u - k\omega) = \omega \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega).$$

Omdat  $f_s(t) = \text{III}(t) \cdot f(t)$  is, kunnen we de Fourier getransformeerde  $F_s(u)$  van de gesamplede functie  $f_s(t)$  nu met behulp van een convolutie product berekenen, er geldt:

$$\begin{aligned} F_s(u) &:= \mathcal{F}[f_s(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[\text{III}(t)] * \mathcal{F}[f(t)] = \left( \frac{\omega}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega) \right) * F(u) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega) * F(u) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{F}(u - k\omega) \end{aligned}$$

omdat  $\delta(u - k\omega) * F(u) = F(u - k\omega)$ .

Dit betekent dat zich bij  $F_s(u)$  de functie  $F(u)$  (geschaald met een factor  $\frac{1}{\Delta t}$ ) periodiek met periode  $\omega$  herhaald. Als we nu  $F(u)$  uit  $F_s(u)$  zouden kunnen reconstrueren, dan kunnen we met behulp van de inverse Fourier transformatie ook  $f(t)$  weer reconstrueren. Hier is het punt waar de Nyquist-frequentie in het spel komt: Als de periodieke herhalingen van  $F(u)$  niet overlappen, dan kunnen we  $F(u)$  door vermenigvuldiging met een rechthoek-filter functie terug vinden. Hiervoor hebben we nodig, dat  $\omega \geq 2u_m$ , want dit is de lengte van het interval waarop  $F(u) \neq 0$  is, en dit geeft precies de voorwaarde in Shannon's aftast-theorema.



Figuur I.38: Effect van aftasten met Nyquist-frequentie, undersampling en oversampling.

De plaatjes in Figuur I.38 laten de effecten van verschillende aftast frequenties zien. In het linker plaatje wordt precies met de Nyquist-frequentie gesampled, hier laat zich de oorspronkelijke Fourier getransformeerde terug vinden, door met een rechthoek functie te vermenigvuldigen. Hetzelfde geldt voor het rechter plaatje, waar met een frequentie hoger dan de Nyquist-frequentie gesampled wordt, dit noemt men *oversampling*. In het middelste plaatje is daarentegen het geval van *undersampling* te zien, de verschillende kopieën van  $F(u)$  overlappen en worden gedeeltelijk bij elkaar opgeteld. De oorspronkelijke Fourier getransformeerde  $F(u)$  is uit deze functie niet meer terug te vinden.

In het geval dat met een voldoende hoge frequentie gesampled is, dus  $\omega \geq 2u_m$ , vermenigvuldigen we  $F_s(u)$  met de rechthoek-filter functie

$$r(u) := \begin{cases} 1 & \text{als } |u| \leq \frac{\omega}{2} \\ 0 & \text{als } |u| > \frac{\omega}{2} \end{cases}$$

Dan is  $F(u) = \Delta t \cdot F_s(u) \cdot r(u)$  en dus

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \mathcal{F}^{-1}[\Delta t \cdot F_s(u)] * \mathcal{F}^{-1}[r(u)].$$

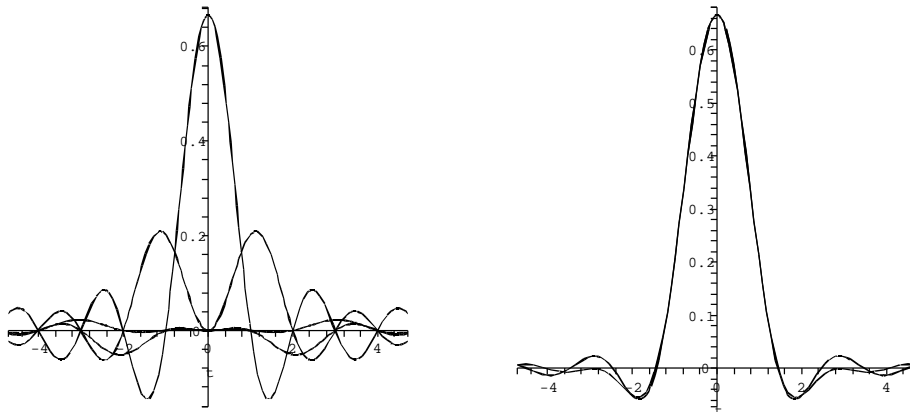
We hebben  $F_s(u)$  zo gedefinieerd dat  $\mathcal{F}^{-1}[F_s(u)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\delta(t-t_k)$ . Maar met de relatie  $\mathcal{F}^{-1}[f(u)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f(-u)]$  tussen inverse Fourier transformatie en Fourier transformatie kunnen we ook de inverse Fourier transformatie van  $r(u)$  makkelijk berekenen, er geldt:

$$\mathcal{F}^{-1}[r(u)] = \frac{2}{2\pi} \frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{t} = \frac{\omega}{\pi} \frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\omega t} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t}$$

en hieruit volgt:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\delta(t-t_k) * \frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \frac{\sin(\frac{\omega}{2}(t-t_k))}{\frac{\omega}{2}(t-t_k)}.$$

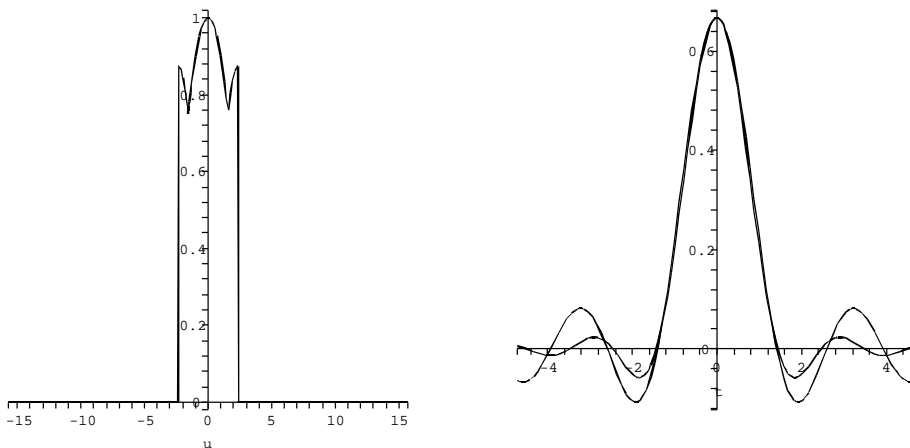
In Figuur I.39 zijn de interpolerende functies  $f(t_k) \frac{\sin(\frac{\omega}{2}(t-t_k))}{\frac{\omega}{2}(t-t_k)}$  voor  $k = -3, \dots, 3$  te zien, waarbij de functies voor  $k$  en  $-k$  bij elkaar opgeteld zijn



Figuur I.39: Interpolerende functies en reconstructie door som van interpolerende functies.

om symmetrische functies te krijgen. Het rechter plaatje laat de reconstructie van de originele functie  $f(t)$  door de som van de interpolerende functies voor  $k = -2, \dots, 2$  zien. Het is duidelijk dat dit al een erg goede benadering oplevert.

Wat gebeurt er nu als we een signaal met een te lage aftast-frequentie samplen, dus bij ondersampling? De bijdragen van de frequenties boven  $\frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{\Delta t}$  worden afgebeeld op lagere frequenties en dit resulteert in een verandering van de functie  $F_s(u)$  en dus ook van het gereconstrueerde signaal. Dit effect noemt men *aliasing*. Om zo'n effect te vermijden, wordt een signaal voor het aftasten meestal door een low pass filter gestuurd die de te hoge frequenties wegsnijdt.



Figuur I.40: Aliasing in het frequentie domein en reconstructie bij ondersampling.

In Figuur I.40 is de functie  $f(t)$  uit het voorbeeld met de te lage frequentie



$\frac{3}{2}u_m$  in plaats van de Nyquist frequentie  $2u_m$  gesampled. Dit heeft tot gevolg dat de functie  $F_s(u)$  zo als in het middelste plaatje van Figuur I.38 verander, en het vermenigvuldigen met de rechthoek-filter lijdt tot een functie  $\Delta t F_s(u)r(u)$  met te hoge waarden voor de lage frequenties, omdat hogere frequenties op deze lage frequenties afgebeeldt worden. Als effect hiervan levert de reconstructie van de oorspronkelijke functie middels inverse Fourier transformatie een functie die niet snel genoeg afneemt, wat we duidelijk aan het te grote tweede maximum van de gereconstrueerde functie in het rechter plaatje van Figuur I.40 kunnen zien.

#### BELANGRIJKE BEGRIPPEN IN DEZE LES

- sampling, discretisering
- discrete Fourier transformatie
- trigonometrische interpolatie
- FFT: snelle Fourier transformatie
- Shannon's aftast-theorema