Les 8 Integratie van functies van meerdere variabelen

Tot nu toe hebben we het in principe over functies van één veranderlijke gehad. In sommige toepassingen is het echter heel natuurlijk, naar functies met meerdere variabelen te kijken. Misschien het meest voor de hand liggende voorbeeld hiervan zijn plaatjes, waarbij we de intensiteit in een punt als functie van de x- en y-coördinaten aangeven. Maar ook in het kader van probabilistische modellen spelen functies van meerdere veranderlijken een belangrijke rol, namelijk als kansverdelingen voor verschillende parameters.

Één aspect van functies van meerdere variabelen hebben we in Wiskunde 1 al kort bekeken, namelijk het vinden van minima en maxima van deze functies. Dit had te maken met de *partiële afgeleiden* van de functies, waarbij we de variabelen tot op een na als constanten beschouwd hebben.

In deze les gaan we nu het omgekeerde van de afgeleide, de integratie bekijken, en zien hoe we deze voor functies van meerdere variabelen definiëren en uitrekenen. We zullen ons meestal tot het geval van functies van twee of drie variabelen beperken, het algemeen geval werkt dan op een analoge manier.

8.1 Integratie op (veralgemeende) rechthoeken

Voor een functie $f(x)$ van een variabel hebben we de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ gedefinieerd als limiet van de som $\sum_{i=0}^{N-1} f(a+i\Delta x)\Delta x$, waarbij $N \cdot \Delta x = b - a$, dus

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(a+i\Delta x)\cdot \Delta x, \text{ waarbij } \Delta x = \frac{b-a}{N}.$$

Het idee hierbij is, de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ te benaderen door een rij van rechthoeken van breedte Δx en hoogte $f(a+i\Delta x)$.

In de wiskunde is een iets algemenere definitie gebruikelijk, waarbij men punten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$ kiest en de som $\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ bekijkt. Dit betekent gewoon dat de rechthoeken niet alle even breed hoeven te zijn. Voor de limiet is het dan wel noodzakelijk dat het maximum van de intervallen $(x_{i+1} - x_i)$ tegen 0 gaat.

Voor de functies waar we het hier over hebben is onze eenvoudigere definitie echter voldoende, de gevallen waar de definities tot verschillende resultaten leiden zijn erg exotisch.

Dit idee kunnen we nu als volgt op functies van meerdere veranderlijke veralgemenen: Uit een interval $[a, b]$ voor de variabel x wordt bij twee variabelen x en y de combinatie van twee intervallen, één voor x en één voor y, dit geeft de rechthoek

$$R_{a,b,c,d} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$

Analoog krijgen we voor een functie van drie variabelen een blok

$$B_{a,b,c,d,e,f} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le x \le b, c \le y \le d, e \le z \le f\}.$$

Algemeen krijgt men bij n variabelen $x_1, \ldots, x_n$ de combinatie van n intervallen $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ de n-dimensionale rechthoek

$$R_{a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i \text{ voor } i = 1, \ldots, n\}.$$

De integratie over een rechthoek wordt nu analoog met het geval van één variabel gedefinieerd als limiet van de som over pilaren met als grondvlak een rechthoek met zijden $\Delta x, \Delta y$ en hoogte $f(a + i\Delta x, c + j\Delta y)$. Het volume van zo'n pilaar is natuurlijk $f(a + i\Delta x, c + j\Delta y) \cdot \Delta x\Delta y$. Men definieert dus:

$$\int_{R_{a,b,c,d}} f(x, y)\, dA = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(a + i\Delta x, c + j\Delta y) \cdot \Delta x\Delta y,$$

waarbij $N = \frac{b-a}{\Delta x}$ en $M = \frac{d-c}{\Delta y}$. Hierbij schrijven we het symbool dA voor het *differentiaal* van een oppervlakte element, dus voor de limiet van de rechthoeken met zijden $\Delta x, \Delta y$.

In een algemenere definitie wordt de rechthoek $R_{a,b,c,d}$ in kleine stukken ΔA_i gesplitst, die niet noodzakelijk rechthoekig hoeven te zijn. Men kiest nu in elk stuk A_i een punt (x_i, y_i) en benadert de integraal door de som $\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)\Delta A_i$. Voor de limiet moet de diameter van de ΔA_i tegen 0 gaan.

Ook hier geldt, dat dit voor redelijke functies geen verschil met onze eenvoudigere definitie geeft. Als redelijk beschouwen we hierbij functies, die stuksgewijs continu zijn.

In de definitie hebben we het met twee limieten tegelijkertijd te maken, met de limiet $\Delta x \to 0$ en de limiet $\Delta y \to 0$. Deze kunnen we op verschillende manieren berekenen, we kunnen of eerst de limiet over Δx en dan die over Δy uitvoeren, of andersom, of we kunnen de twee tegelijkertijd tegen 0 laten gaan. Het is niet vanzelfsprekend dat de verschillende manieren in elk geval hetzelfde resultaat geven, en bij zekere functies is dan helaas ook niet het geval. Maar we mogen hier weer ervan uitgaan, dat het voor de functies die wij tegen komen wel goed gaat en dat we altijd in de aangename situatie zijn die door de stelling van Fubini weergegeven wordt:

Stelling van Fubini: Als de integraal $\int_{R_{a,b,c,d}} f(x, y)\, dA$ bestaat, dan bestaan ook de functies $g(y) := \int_a^b f(x, y)\, dx$ en $h(x) := \int_c^d f(x, y)\, dy$ en er geldt

$$\begin{aligned}\int_{R_{a,b,c,d}} f(x, y)\, dA &= \int_c^d g(y)\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy \\ &= \int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx\end{aligned}$$

Merk op dat we in $g(y) := \int_a^b f(x,y)\ dx$ bij de integratie de variabel y als constante beschouwen, dit is dus een gewone integratie van een veranderlijke. Hetzelfde geldt voor de functie $h(x)$. We kunnen dus een integraal over een functie van twee variabelen uitwerken door eerst over een van de variabelen te integreren, en vervolgens over de andere, dus door geïtereerde gewone integraties van een veranderlijke.

Voor een functie van drie variabelen geldt hetzelfde als voor twee variabelen, we moeten nu over kleine volume elementen (blokken) $\Delta x \Delta y \Delta z$ integreren, maar kunnen dit ook weer opsplitsen in drie gewone integraties. Er geldt dus:

$$\int_{B_{a,b,c,d,e,f}} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\ dx \right) dy \right) dz.$$

Ook hier kunnen we een andere volgorde voor de integraties kiezen, het maakt niets uit of we eerst over x, y of z integreren. Soms scheelt een geschikte keuze van de volgorde zelfs een hoop rekenwerk.

In principe is het natuurlijk logisch, dat de eerste integraal $\int_a^b$ bij de laatste differentiaal dz hoort, de tweede integraal $\int_c^d$ bij de voorlaatste differentiaal dy enzovoorts. Maar men is vaak iets slordig met de haakjes en ook met de volgorde, en het wordt bij ingewikkelde functies ook soms iets onoverzichtelijk. Daarom is er een vaak gebruikte conventie, de differentiaal meteen achter de bijhorende integraal te plaatsen om zo duidelijk te maken wat de integratie variabel van dit integraalteken is. In plaats van de schrijfwijze hier boven vind je dus ook vaak:

$$\int_{B_{a,b,c,d,e,f}} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\ f(x,y,z).$$

We bekijken nu een paar voorbeelden van integraties over rechthoek gebieden om te zien dat integraties over functies van meerdere variabelen net zo eenvoudig zijn als integraties over functies van één variabel.

Voorbeeld 1: Zij $f(x,y) := 2x + 3y$ en $R := [0,2] \times [3,4]$. Dan is

$$\begin{aligned}\int_R f(x,y)\ dA &= \int_0^2 \left(\int_3^4 (2x+3y)\ dy \right) dx = \int_0^2 \left((2xy + \frac{3}{2}y^2)\Big|_3^4 \right) dx \\ &= \int_0^2 (8x + 24 - 6x - \frac{27}{2})\ dx = \int_0^2 (2x + \frac{21}{2})\ dx \\ &= (x^2 + \frac{21}{2}x)\Big|_0^2 = 4 + 21 = 25.\end{aligned}$$

We kunnen ook eerst over x en dan over y integreren:

$$\begin{aligned}\int_R f(x,y)\ dA &= \int_3^4 \left(\int_0^2 (2x+3y)\ dx \right) dy = \int_3^4 \left((x^2 + 3xy)\Big|_0^2 \right) dy \\ &= \int_3^4 (4+6y)\ dy = (4y + 3y^2)\Big|_3^4 = 16 + 48 - 12 - 27 = 25.\end{aligned}$$

We zien dat in dit geval de tweede manier iets makkelijker is dan de eerste.

Voorbeeld 2: Zij $f(x,y) := e^{x+y}$ en $R := [1,2] \times [1,2]$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_R f(x,y)\,dA &= \int_1^2 \left(\int_1^2 e^{x+y}\,dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_1^2 e^x \cdot e^y\,dy \right) dx \\
&= \int_1^2 \left(\int_1^2 e^y\,dy \right) e^x\,dx = \int_1^2 \left(e^y\big|_1^2 \right) e^x\,dx \\
&= \int_1^2 (e^2 - e)e^x\,dx = (e^2 - e) \int_1^2 e^x\,dx = (e^2 - e) \cdot e^x\big|_1^2 \\
&= (e^2 - e)(e^2 - e) = (e^2 - e)^2.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 3: Zij $f(x,y,z) := \frac{x^2 z^3}{1+y^2}$ en $R := [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_R f(x,y,z)\,dV &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\,dx \right) dz \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{x^3 z^3}{3(1+y^2)}\Big|_0^1 \right) dz \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{z^3}{3(1+y^2)}\,dz \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{z^4}{12(1+y^2)}\Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{12(1+y^2)}\,dy \\
&= \frac{1}{12} \arctan(y)\big|_0^1 = \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{48}.
\end{aligned}$$

8.2 Integratie over normaalgebieden

Het lijkt natuurlijk erg beperkend als we alleen maar over rechthoek gebieden kunnen integreren. In feite is dit niet zo, want we kunnen een willekeurig gebied benaderen door een combinatie van kleine rechthoeken en ervan uit gaan dat de fout die we hierbij maken verwaarloosbaar is. Maar om een goede benadering te krijgen, moeten we hiervoor misschien wel een redelijk groot aantal rechthoeken bepalen en dit is ook weer een beetje vervelend.

Er is echter een algemenere klasse van gebieden dan rechthoek gebieden, waarvoor we de integraal rechtstreeks kunnen uitrekenen, dit zijn de *normaalgebieden.* In het 2-dimensionale geval zijn dit de gebieden van de vorm

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\},$$

d.w.z. gebieden die door twee rechte lijnen $x = a$ en $x = b$ evenredig met de y-as en de twee krommen $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ begrensd zijn. In dit geval geldt

$$\int_B f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Net zo goed kan men natuurlijk ook twee lijnen evenredig met de x-as en twee krommen $\psi_1(y)$ en $\psi_2(y)$ als grenzen hebben, dit geeft ook een normaalgebied, te weten

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

dan wordt de integraal over B berekend als

$$\int_B f(x,y)\,dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Als voorbeeld berekenen we de integraal over de functie $f(x,y) := x^2y$ over de halfcirkel B van straal 1 rond $(0,0)$ die boven de x-as ligt. De halfcirkel B is begrensd door de lijnen $x=-1$ en $x=1$ en de krommen $\varphi_1(x)=0$ en $\varphi_2(x)=\sqrt{1-x^2}$. We hebben dus

$$\begin{aligned}
\int_B f(x,y)\,dA &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x^2y^2|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{2}x^2(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 (x^2-x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)|_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{-1}{3}+\frac{-1}{5}) = \frac{1}{3}-\frac{1}{5} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

In drie dimensies zijn normaalgebieden begrensd door een gebied B in het $x-y$-vlak (bijvoorbeeld) en twee functies $\varphi_1(x,y)$ en $\varphi_2(x,y)$, die de variabel z inschakelen. Dan geldt

$$\int_V f(x,y,z)\,dV = \int_B \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA.$$

Na het uitwerken van de binnenste integraal over z is dit terug gebracht op een integratie met twee variabelen, dus zou het handig zijn als B weer een 2-dimensionaal normaalgebied is.

8.3 Substitutie

Een belangrijke methode in de integratie van gewone functies van één variabel is de substitutie. Het idee hierbij is, de integratievariabel x door een geschikte nieuwe variabel u te vervangen zo dat de integratie makkelijker wordt. Als we in de integraal $\int f(x)\,dx$ de variabel x door een nieuwe variabel u willen vervangen, moeten we de samenhang van x en u kennen, en dit drukken we uit door x te schrijven als een functie $x = x(u)$ van u. Als we nu een functie $g(u)$ definiëren door $g(u) := f(x(u))$ dan zegt de substitutie regel dat

$$\int f(x)\,dx = \int g(u)x'(u)\,du = \int f(x(u))x'(u)\,du.$$

Als we ons nu nog eens herinneren dat de integraal gedefinieerd is als de limiet van de som $\sum f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum f(x_i)\Delta x$, kunnen we precies de reden zien, waarom de differentiaal dx door de nieuwe differentiaal $x'(u)du$ vervangen moet worden. Een motivatie van de afgeleide was namelijk dat we in een kleine omgeving van u de functie $x(u)$ kunnen benaderen door de lineaire functie $x(u+\Delta u) = x(u) + x'(u)\Delta u$. Maar hieruit volgt dat

$$\Delta x = x(u+\Delta u) - x(u) = x'(u)\Delta u$$

en als we Δx weer door dx vervangen is dit precies wat er in de substitutie regel gebeurt.

Jacobi matrix

We hebben net gezien dat het handig is een functie $f(x)$ in een kleine omgeving van x te benaderen door de lineaire functie $f(x) + f'(x)\Delta x$ om hieruit de substitutie regel af te leiden. De vraag is, hoe we dit op functies van meerdere veranderlijke kunnen veralgemenen.

Hiervoor kijken we naar een functie van twee veranderlijken en met twee componenten, de veralgemening op meer variabelen volgt dan per analogie. Zij dus $f(x, y)$ een functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$, dan kunnen we $f(x, y)$ schrijven als $f(x, y) = (g(x, y), h(x, y))$, waarbij $g(x, y)$ en $h(x, y)$ functies van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ zijn. Het is handig, om de functie $f(x, y)$ als vector te schrijven, dus hebben we

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} g(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}.$$

De definitie van de partiële afgeleide zegt nu dat

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x, y) - g(x, y)}{\Delta x}$$

en hieruit volgt

$$g(x + \Delta x, y) \approx g(x, y) + \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \Delta x.$$

Dit werkt natuurlijk net zo voor y in plaats van x en voor $h(x, y)$ in plaats van $g(x, y)$ en we krijgen:

$$\begin{aligned} g(x + \Delta x, y) &\approx g(x, y) + \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \Delta x, \quad & g(x, y + \Delta y) &\approx g(x, y) + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \Delta y \\ h(x + \Delta x, y) &\approx h(x, y) + \frac{\partial h(x, y)}{\partial x} \Delta x, \quad & h(x, y + \Delta y) &\approx h(x, y) + \frac{\partial h(x, y)}{\partial y} \Delta y. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} g(x + \Delta x, y + \Delta y) &\approx g(x + \Delta x, y) + \frac{\partial g(x + \Delta x, y)}{\partial y} \Delta y \\ &\approx g(x, y) + \frac{\partial g(x, y))}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x + \Delta x, y)}{\partial y} \Delta y \end{aligned}$$

en als we nu de limiet $\Delta x \to 0$ en $\Delta y \to 0$ laten gaan, wordt $\frac{\partial g(x+\Delta x, y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$ en we krijgen dus

$$g(x + \Delta x, y + \Delta y) - g(x, y) \approx \frac{\partial g(x, y))}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}.$$

Op precies dezelfde manier zien we in dat

$$h(x + \Delta x, y + \Delta y) - h(x, y) \approx \frac{\partial h(x, y))}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial h(x, y)}{\partial y}$$

en deze twee vergelijkingen laten zich met behulp van vectoren en matrices overzichtelijk opschrijven als:

$$\Delta f(x,y) = \begin{pmatrix} \Delta g(x,y) \\ \Delta h(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x+\Delta x, y+\Delta y) - g(x,y) \\ h(x+\Delta x, y+\Delta y) - h(x,y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$$

De matrix

$$J = J(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial h(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial h(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

met de partiële afgeleiden heet de *Jacobi matrix* van de functie $f(x,y)$. Merk op dat de Jacobi matrix van de coördinaten x en y af hangt, dus bij elk punt (x,y) hoort (in principe) een andere Jacobi matrix. Maar omdat we de partiële afgeleiden voor algemene x en y berekenen, krijgen we ook een algemene uitdrukking voor J.

Algemeen definieert men de Jacobi matrix voor een afbeelding f van de n-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^n$ naar de m-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^m$ die gegeven is door

$$f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))$$

als de $m \times n$-matrix

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

De functie $f(x_1,\ldots,x_n) + J \cdot \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$ noemt men ook de *linearisering* van $f(x_1,\ldots,x_n)$ in het punt $(x_1,\ldots,x_n)$ en men gaat ervan uit dat de functie in een kleine omgeving van $(x_1,\ldots,x_n)$ goed door zijn linearisering benadert wordt.

Substitutie voor functies van meerdere variabelen

Met behulp van de Jacobi matrix kunnen we nu ook de substitutie voor functies van meerdere variabelen formuleren. Hiervoor kijken we eerst weer naar een functie van twee variabelen, x en y. We kiezen twee nieuwe variabelen u en v en schrijven x en y nu als functies van u en v, dus $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Met behulp van de Jacobi matrix van de functie $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$. kunnen we nu $x(u,v)$ en $y(u,v)$ in een omgeving van (u,v) door de linearisering benaderen, namelijk door

$$\begin{pmatrix} \Delta x(u,v) \\ \Delta y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u+\Delta u, v+\Delta v) - x(u,v) \\ y(u+\Delta u, v+\Delta v) - y(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix},$$

waarbij de matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

de Jacobi matrix van de coördinatentransformatie $(x(u, v), y(u, v))$ is.

Bij de substitutie van functies met een variabel hebben we gezien dat we de differentiaal dx door $x'(u)du$ moeten vervangen. De vraag is, hoe in het geval van twee variabelen de differentiaal $dA = dx\,dy$ met de nieuwe differentiaal $du\,dv$ samenhangt.

Om hier uit te komen, gaan we even een stap terug en interpreteren de integraal weer als som van pilaren over kleine rechthoeken met zijden $\Delta x, \Delta y$. Zo'n rechthoek moeten we nu door de nieuwe variabelen u en v beschrijven, en bij benadering lukt dit in een punt (x, y) met behulp van de Jacobi matrix door de vergelijking

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Omdat J en dus ook J^{-1} een lineaire afbeelding is, is het beeld van de rechthoek met zijden $\Delta x, \Delta y$ onder J^{-1} een parallellogram. De vraag is nu wat de oppervlakte van dit parallellogram is.

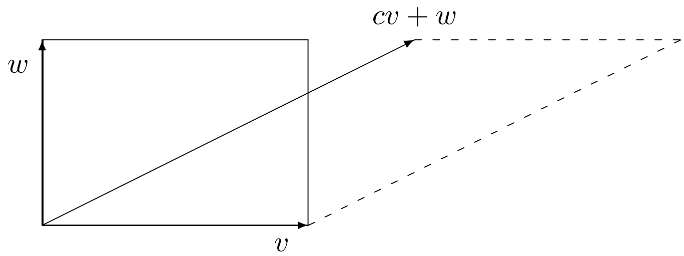
De oplossing van deze vraag is verrassend eenvoudig, we hebben alleen maar de determinant van J nodig. Er geldt namelijk dat de absolute waarde van de determinant $\det(A)$ van een matrix A het *volume* van het parallellepipedum aangeeft, dat door de kolommen van de matrix A opgespannen wordt, dus van het beeld onder A van de eenheidsvierkant (eenheidskubus, eenheidshyperkubus, enz.) opgespannen door de standaardbasis. Dit ziet men als volgt in:

Voor een diagonaalmatrix A is het opspansel van de kolommen van A een rechthoek, blok, enzovoorts, en het volume hiervan is het product van de absolute waarden van de elementen op de diagonaal. Maar dit is ook de absolute waarde van de determinant van de matrix A. Maar we weten dat we elke matrix door elementaire transformatie op diagonaal vorm kunnen brengen, we moeten dus alleen maar kijken, wat er met het volume gebeurt als we een elementaire transformatie toepassen:

(i) Als we twee kolommen verwisselen, verandert het parallellepipedum niet, het volume blijft dus hetzelfde. De determinant wordt hierbij met -1 vermenigvuldigd, maar de absolute waarde blijft gelijk.

(ii) Als we een kolom met een factor $c \neq 0$ vermenigvuldigen, wordt ook het volume van het parallellepipedum $|c|$ keer zo groot, dit klopt dus ook met de determinant.

(iii) Als we een veelvoud van een vector bij een andere optellen, verandert de determinant niet, dus mag ook het volume bij deze transformatie niet veranderen. Omdat hierbij alleen maar twee vectoren een rol spelen, is het voldoende dit in het 2-dimensionale geval in te zien. Maar dit is aan de volgende schets eenvoudig te zien:



De rechthoek opgespannen door de vectoren v en w en het parallellogram opgespannen door v en $cv + w$ hebben dezelfde oppervlakte, omdat de oppervlakte van een parallellogram gelijk is aan het product van de grondzijde en de hoogte.

We hebben dus ingezien, dat de oppervlakte van de het parallellogram met zijden $\Delta u, \Delta v$ gelijk is aan $|\det(J^{-1})| \cdot \Delta x \Delta y$ en hieruit volgt omgekeerd dat

$$\Delta x \Delta y = |\det(J)| \cdot \Delta u \Delta v.$$

Door nu weer de limieten $\Delta x \to 0$ en $\Delta y \to 0$ te nemen, krijgen we dat voor de differentialen geldt dat

$$dx\, dy = |\det(J)|\, du\, dv.$$

Omdat de determinant van de Jacobi matrix zo'n belangrijke rol speelt, heeft deze ook een eigen naam, ze heet natuurlijk *Jacobi determinant*.

We zijn nu klaar voor de substitutie regel voor functies van twee veranderlijken:

Substitutie voor functies van twee variabelen:
Voor nieuwe coördinaten (variabelen) u en v met $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ en Jacobi matrix $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$ geldt met $g(u,v) := f(x(u,v), y(u,v))$:

$$\int_B f(x,y)\, dx\, dy = \int_{B'} g(u,v)\, |\det(J)|\, du\, dv.$$

Hierbij moet het gebied B' in het $u{-}v$-vlak zo gekozen worden, dat (x,y) over B loopt als (u,v) over B' loopt, waarbij elke punt in B precies een keer voorkomt. Dit betekent dat de afbeelding $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$ een bijectieve (omkeerbare) afbeelding van B' naar B is.

Dezelfde regel geldt analoog ook voor functies van meer dan twee variabelen: Als we de coördinaten $x_1, \ldots, x_n$ vervangen door nieuwe coördinaten $u_1, \ldots, u_n$ zo dat $x_i = x_i(u_1, \ldots, u_n)$ een functie van de nieuwe coördinaten wordt, geldt voor de differentialen

$$dx_1 dx_2 \ldots dx_n = |\det(J)|\, du_1 du_2 \ldots du_n$$

waarbij het element J_{ij} in de Jacobi matrix J gegeven is door de partiële afgeleide $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$.

Voor een functie $f(x_1, \ldots, x_n)$ definiëren we
$g(u_1, \ldots, u_n) := f(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n))$ dan is

$$\int_B f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{B'} g(u_1, \ldots, u_n)\, |\det(J)|\, du_1 \ldots du_n.$$

8.4 Poolcoördinaten, cilindercoördinaten, sferische coördinaten

De belangrijkste toepassingen van substitutie bij functies van meerdere variabelen zijn transformaties tussen verschillende standaard stelsels van coördinaten. We hebben bij de complexe getallen al gezien, dat het soms (bijvoorbeeld voor de vermenigvuldiging) handig is, deze met poolcoördinaten te beschrijven. Ook in de 3-dimensionale ruimte zijn er naast de gewone cartesische coördinaten nog twee andere stelsels coördinaten, die geschikt zijn voor zekere situaties, namelijk de cilindercoördinaten en de sferische coördinaten (of kogelcoördinaten).

Poolcoördinaten

Bij functies van twee variabelen zijn vaak poolcoördinaten handig, in het bijzonder als het over integratie van functies op ronde gebieden gaat.

Poolcoördinaten zijn we bij de complexe getallen al tegen gekomen, ze zijn gedefinieerd door (r, φ) met $r \in (0, \infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ zo dat

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi).$$

Voor de partiële afgeleiden geldt in dit geval

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\varphi), \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos(\varphi).$$

Hieruit volgt dat de Jacobi matrix J gelijk is aan

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

en de Jacobi determinant $\det(J)$ is dus

$$r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r.$$

Voor een functie $f(x, y)$ en $g(r, \varphi) := f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ geldt dus

$$\int f(x, y)\, dxdy = \int g(r, \varphi) r\, dr\, d\varphi.$$

Een eerste toepassing van de poolcoördinaten is natuurlijk het berekenen van de oppervlakte van een cirkel met straal R. Dit kunnen we berekenen door de constante functie $f(x, y) = 1$ over het gebied $B := B(0, R) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ te integreren. Maar in poolcoördinaten wordt B opeens een rechthoek, want als (r, φ) over de rechthoek $B' = [0, R] \times [0, 2\pi]$ loopt, loopt (x, y) precies een keer over B. We hebben dus

$$\begin{aligned} \int_B 1\, dx\, dy = \int_{B'} r\, dr\, d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r\, dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R \right) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2\, d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2. \end{aligned}$$

Een iets verrassendere toepassing is dat we nu de integraal over de Gauss-functie e^{-x^2} kunnen berekenen. Hiervoor integreren we deze functie een keer over een cirkel van straal R en een keer over een vierkant met lengte $2a$.

Zij eerst $B := B(0,R) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le R^2\}$, dan is

$$\begin{aligned}\int_B e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) e^{-r^2} r\,dr = 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr \\ &= 2\pi(-\frac{1}{2}e^{-r^2})\big|_0^R = -\pi(e^{-R^2}-1) = \pi(1-e^{-R^2})\end{aligned}$$

Zij nu $B' := V(-a,a) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le a, |y| \le a\}$ de vierkant met lengte $2a$ rond 0, dan is

$$\begin{aligned}\int_{B'} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)} dx\right) dy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx\right) e^{-y^2}\,dy \\ &= (\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx)(\int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy) = (\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx)^2\end{aligned}$$

Maar de cirkel $B(0,a)$ van straal a ligt volledig in het vierkant $V(-a,a)$ en dit ligt wederom volledig in de cirkel $B(0,\sqrt{2}\,a)$ met straal $\sqrt{2}\,a$. Omdat de functie $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ is, volgt hieruit

$$\pi(1-e^{-a^2}) \le (\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx)^2 \le \pi(1-e^{-2a^2}).$$

Als we nu de limiet $a \to \infty$ laten lopen, wordt de rechter en de linker zijde van deze ongelijkheden gelijk aan π, en dus hebben we bewezen dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Cilindercoördinaten

In de 3-dimensionale ruimte komt het vaak voor dat een probleem symmetrisch ten opzichte van een rotatie as is. Dit is bijvoorbeeld het geval voor het elektrische veld rond een rechte geleider. Bij dit soort problemen zijn cilindercoördinaten heel praktisch, die veronderstellen dat de rotatie-as de z-as is. Het idee van de cilindercoördinaten is, een punt (x,y,z) te beschrijven door poolcoördinaten voor het $x-y$-vlak en de gewone z-coördinaat.

Dit geeft:

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi), \qquad z = z,$$

waarbij $r > 0$ en $\varphi \in [0, 2\pi)$. De Jacobi matrix J hiervan is

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en de Jacobi determinant $\det(J)$ is $\det(J) = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r$. Hieruit volgt voor een functie $f(x,y,z)$ en $g(r,\varphi,z) := f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$:

$$\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int g(r,\varphi,z)\,r\;dr\,d\varphi\,dz.$$

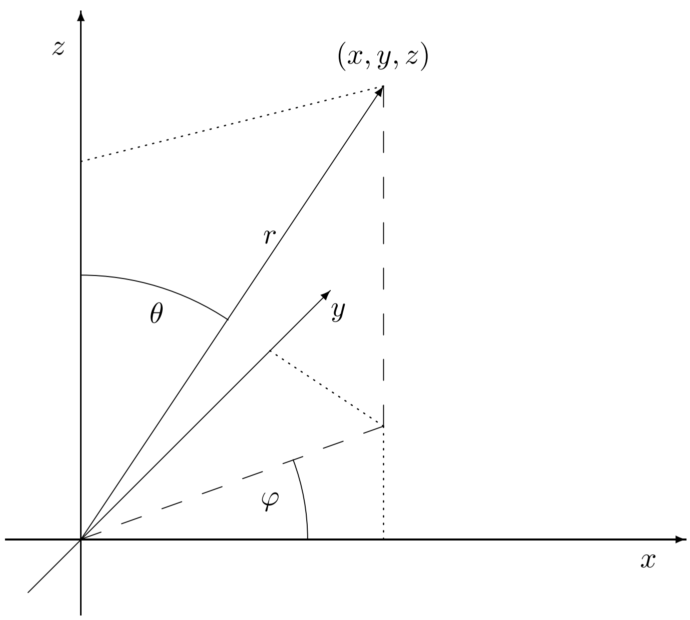
Sferische coördinaten

Bij functies die eigenlijk alleen maar van de afstand van een punt afhangen, zo als de gravitatie kracht of de intensiteit van een geïdealiseerde bron van licht, worden vaak sferische coördinaten toegepast. Het idee is, een punt door zijn afstand en twee ruimtelijke hoeken aan te geven.

Men splitst de vector van de oorsprong naar het punt (x, y, z) in zijn projecties in het $x - y$-vlak en op de z-as. De projectie in het $x - y$-vlak wordt door poolcoördinaten aangegeven en de projectie op de z-as met behulp van de hoek tussen (x, y, z) en de z-as. Dit geeft:

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta), \qquad y = r\sin(\varphi)\sin(\theta), \qquad z = r\cos(\theta)$$

waarbij $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.



Figuur I.41: Sferische coördinaten

De Jacobi matrix J hiervan is

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

en voor de Jacobi determinant $\det(J)$ krijgt men in dit geval

$$\begin{aligned} \det(J) = &- r^2\cos^2(\varphi)\sin^3(\theta) - r^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)\sin(\theta) \\ &- r^2\cos^2(\varphi)\cos^2(\theta)\sin(\theta) - r^2\sin^2(\varphi)\sin^3(\theta) \\ = &- r^2\sin^3(\theta) - r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) \\ = &- r^2\sin(\theta). \end{aligned}$$

Omdat $\sin(\theta) > 0$ is $|\det(J)| = r^2 \sin(\theta)$ en dus

$$\int f(x, y, z)\; dx\, dy\, dz = \int g(r, \varphi, \theta)\, r^2 \sin(\theta)\; dr\, d\varphi\, d\theta,$$

waarbij $g(r, \varphi, \theta) := f(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$.

> Een alternatieve versie van de sferische coördinaten gebruikt voor de hoek θ in plaats van de hoek tussen (x, y, z) en de z-as de hoek tussen (x, y, z) en het $x - y$-vlak. Dit geeft
>
> $$x = r\cos(\varphi)\cos(\theta), \quad y = r\sin(\varphi)\cos(\theta), \quad z = r\sin(\theta),$$
>
> waarbij $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
> In dit geval wordt $dxdydz = r^2 \cos(\theta)\, drd\varphi d\theta$.

De meest voor de hand liggende toepassing van sferische coördinaten is het bepalen van het volume V van een kogel $B := B(0, R)$ van straal R. De functie $f(x, y, z)$ is in dit geval $f(x, y, z) = 1$, dus hebben we

$$\begin{aligned} V &= \int_B 1\; dx\, dy\, dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin(\theta)\; dr\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} R^3 \sin(\theta)\; d\varphi\, d\theta = \int_0^\pi \frac{2\pi}{3} R^3 \sin(\theta)\; d\theta = \frac{2\pi}{3} R^3 (-\cos(\theta))\Big|_0^\pi \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

8.5 Toepassingen

Oppervlaktes, volumes

Een belangrijke toepassing voor integralen over functies van meerdere variabelen is het bepalen van oppervlaktes en volumes. Voorbeelden hiervan hebben we al gezien, namelijk de oppervlakte van een cirkel en het volume van een kogel. De manier van aanpak is steeds het zelfde: Men integreert de constante functie die overal de waarde 1 heeft over het gebied waarvan men de oppervlakte of het volume wil bepalen. De kunst ligt hierbij meestal niet zo zeer in de integratie, maar in het beschrijven van het gebied. Soms is het mogelijk een gebied in meerdere delen te splitsen die als normaalgebieden te beschrijven zijn en vaak helpt een geschikte keuze van nieuwe coördinaten.

Vaak is het ook handig een van de standaard coördinatentransformaties te combineren met een verdere substitutie. Een voorbeeld hiervoor is het berekenen van de oppervlakte van een ellips.

Zij E een ellips rond het nulpunt $(0, 0)$ met hoofdassen van lengte a en b in de richtingen van de x-as en de y-as, dan wordt E beschreven door:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Door de transformatie op nieuwe coördinaten u, v met $x = au$ en $y = bv$ wordt E op de eenheidscirkel $B(0,1)$ getransformeerd, want $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(au)^2}{a^2} + \frac{(bv)^2}{b^2} = u^2 + v^2 \leq 1$. De Jacobi matrix voor deze substitutie is heel eenvoudig, we hebben $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ en dus $\det(J) = ab$. Hieruit volgt dat

$$\int_E 1 \, dx \, dy = \int_{B(0,1)} ab \, du \, dv = ab \int_{B(0,1)} 1 \, du \, dv = \pi ab.$$

Zwaartepunten

Een verdere toepassing van meervoudige integralen is het berekenen van zwaartepunten van objecten. Het zwaartepunt is een soort gemiddelde van het object en in drie dimensies kunnen de coördinaten (x_s, y_s, z_s) van het zwaartepunt van een object B met volume V berekenen als $x_s = \frac{1}{V} \int_B x \;\; dx\, dy\, dz$ $y_s = \frac{1}{V} \int_B y \;\; dx\, dy\, dz$ $z_s = \frac{1}{V} \int_B z \;\; dx\, dy\, dz$ waarbij we veronderstellen dat de dichtheid van het object overal hetzelfde is.

Maar we kunnen het zwaartepunt ook berekenen als de dichtheid niet constant is, maar een functie $\rho(x, y, z)$. De massa van B berekenen we door $M = \int_B \rho(x, y, z) \;\; dx\, dy\, dz$, dus geeft de functie $\frac{1}{M} \int_B \rho(x, y, z) \;\; dx\, dy\, dz$ de verdeling van de massa over B aan. Deze verdelingsfunctie moeten we nu gewoon in de integralen invullen en krijgen zo $x_s = \frac{1}{M} \int_B x\rho(x, y, z) \;\; dx\, dy\, dz$ $y_s = \frac{1}{M} \int_B y\rho(x, y, z) \;\; dx\, dy\, dz$ $z_s = \frac{1}{M} \int_B z\rho(x, y, z) \;\; dx\, dy\, dz$ Het speciaal geval voor constante dichtheid $\rho(x, y, z) = \rho$ volgt hieruit met $V = \int_B dx\, dy\, dz$, omdat dat $M = \int_B \rho \; dx\, dy\, dz = \rho \cdot V$, dus $\frac{\rho}{M} = \frac{1}{V}$.

In het kader van de kansrekening is het taalgebruik is anders en het zwaartepunt is een oude bekende. Als $f(x, y)$ of $f(x, y, z)$ de dichtheidsfunctie van een meerdimensionale kansverdeling is, heet het zwaartepunt namelijk de *verwachtingswaarde* van de kansverdeling. De dichtheidsfunctie speelt precies de rol van de functie $\frac{1}{M}\rho(x, y, z)$ voor de verdeling van de massa, want de integraal over het hele gebied is gelijk aan 1.

Als voorbeeld berekenen we het zwaartepunt van een halfkogel H met straal R rond het nulpunt $(0, 0, 0)$ die boven het $x - y$-vlak ligt. We gaan van constante dichtheid uit. Een halfkogel beschrijven we het makkelijkste met sferische coördinaten, we moeten alleen maar over de hoek θ tussen (x, y, z) en de z-as nadenken. Bij een volle kogel loopt die van 0 tot π en voor punten in het $x - y$-vlak is $\theta = \frac{\pi}{2}$, dus loopt θ nu van 0 tot $\frac{\pi}{2}$. Uit symmetrie redenen is het duidelijk dat het zwaartepunt op de z-as moet liggen, daarom hoeven we alleen maar de z-coördinaat uit te rekenen. Omdat een volle kogel van straal R het volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ heeft, heeft H het volume $V = \frac{2}{3}\pi R^3$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
z_s &= \frac{1}{V}\int_H z\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\theta)\, r^2 \sin(\theta)\ d\theta\, d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 (\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\big|_0^{\frac{\pi}{2}})\ d\varphi\, dr = \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^3\ d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \pi r^3\ dr = \frac{1}{V}\frac{1}{4}\pi r^4\big|_0^R = \frac{\pi}{4V}R^4 = \frac{\pi}{4\frac{2}{3}\pi R^3}R^4 = \frac{3}{8}R.
\end{aligned}$$

Hetzelfde voorbeeld kunnen we ook in cilindercoördinaten uitwerken. In het $x-y$-vlak loopt de straal r dan van 0 tot R, de hoek φ van 0 tot 2π en de z-variabel loopt van 0 tot $\sqrt{R^2 - r^2}$. Hiermee krijgen we:

$$\begin{aligned}
z_s &= \frac{1}{V}\int_H z\ dx\, dy\, dz = \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z\, r\ dz\, d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2}z^2\big|_0^{\sqrt{R^2-r^2}})\, r\ d\varphi\, dr = \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(R^2 - r^2) r\ d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \pi(R^2 - r^2) r\ dr = \frac{\pi}{V}\int_0^R (rR^2 - r^3)\ dr = \frac{\pi}{V}(\frac{1}{2}r^2R^2 - \frac{1}{4}r^4)\big|_0^R \\
&= \frac{\pi}{V}\frac{1}{4}R^4 = \frac{3}{8}R.
\end{aligned}$$

Belangrijke begrippen in deze les

- integratie van functies van meerdere variabelen als geïtereerde integratie over de enkele variabelen
- integratie over rechthoek gebieden
- integratie over normaalgebieden
- Jacobi matrix, Jacobi determinant
- substitutie voor functies van meerdere variabelen
- coördinatentransformatie
- poolcoördinaten
- cilindercoördinaten, sferische coördinaten

Opgaven

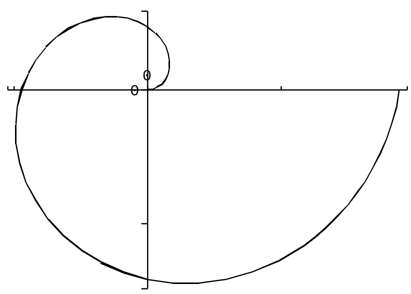
33. Bereken de volgende 2-dimensionale integralen:
    (i) $\int_B (xy + y^2)\, dA$ met $B = [0,1] \times [0,1]$,
    (ii) $\int_B \sin(x+y)\, dA$ met $B = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,
    (iii) $\int_B (x + y^2)\, dA$, waarbij B de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$ is.
    (iv) $\int_B (x^2 + y^2)\, dA$, waarbij B de driehoek met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ is.

34. Zij B het gebied tussen de grafieken van $\varphi_1(x) := x^3$ en $\varphi_2(x) := x^2$. Bereken de integralen $\int_B x\, dA$ en $\int_B y\, dA$.

35. Bereken de integraal $\int_B \frac{\sin(x)}{x}\, dA$ voor de driehoek B met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$ en $(1,1)$. Let op dat hierbij de volgorde van de integraties een rol speelt, want de integraal $\int \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ laat zich niet zonder integraal teken schrijven.

36. Beschrijf het gebied $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3y \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$. en bereken de integraal $\int_B e^{x^2}\, dA$. Dit lukt helaas alleen maar voor een van de twee mogelijke volgordes van integratie.

37. Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de archimedische spiraal gegeven door $r = a\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ en de x-as. Merk op dat de spiraal in poolcoördinaten aangegeven is.



38. Bereken het volume van de (onregelmatige) tetraëder die begrensd is door de drie coördinaatvlakken $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$ en het vlak met $z = 2 - 2x - y$.

39. Een cirkelvormige boor van straal R snijdt uit een kogel van straal $2R$ een cilinder langs de z-as uit. Wat is het volume van de cilinder?

40. Een halfkogel H van straal R die op het $x - y$-vlak ligt heeft een niet constante dichtheidsfunctie, de dichtheid hangt namelijk af van de afstand van het grondvlak: $\rho(x,y,z) = az$ voor een $a > 0$. Bereken het zwaartepunt van de halfkogel.