Les 9 Numerieke integratie

In de praktijk is het maar zelden het geval dat we een functie expliciet kunnen primitiveren. Voorbeelden hiervoor zijn de Gauss-functie e^{-x^2} die in de statistiek en kansrekening en bij probabilistische modellen een belangrijke rol speelt, maar ook de functie $\frac{\sin(x)}{x}$ die we bij de Fourier transformatie vaker zijn tegen gekomen heeft geen primitieve die zonder integraal te schrijven is.

Verder is de situatie bij de integratie vaak vergelijkbaar met de discrete Fourier transformatie, namelijk dat we een functie alleen maar in sommige (discrete) punten kennen, bijvoorbeeld door een meting.

Om in deze situatie niettemin integralen te kunnen berekenen, zijn numerieke benaderingsmethoden belangrijk. De manier van aanpak hierbij is enigszins voor de hand liggend, want we hebben de integraal gedefinieerd als limiet van een benadering met smalle rechthoeken en gaan dit nu op een of andere manier omdraaien.

9.1 Constante afstanden

De eenvoudigste methoden om een integraal op het interval $[a, b]$ numeriek te benaderen, gebruiken een onderverdeling van het interval in even grote stukken Δx en benaderen de oppervlakte van $f(x)$ op het deelinterval Δx door een rechthoek. Voor de hoogte van de rechthoek zijn er natuurlijk verschillende mogelijkheden, voor de hand liggend zijn de functiewaarde aan de linkerkant van het interval, aan de rechterkant van het interval, of in het midden van het interval.

Om de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ te berekenen, delen we het interval $[a, b]$ in N delen van lengte Δx, dus is $\Delta x = \frac{b-a}{N}$. De randpunten van de deelintervallen noemen we $x_0, \ldots, x_N$, waarbij $x_i := a + i \cdot \Delta x$, dan is $x_0 = a$ en $x_N = b$.

Als we de hoogte van de rechthoek op het deelinterval $[x_{i-1}, x_i]$ door de waarde aan de linkerkant benaderen, is dit $f(x_{i-1})$, aan de rechterkant hebben we $f(x_i)$ en in het midden is het $f(x_i - \frac{\Delta x}{2})$.

Door steeds de functiewaarde aan de linkerkant te kiezen, krijgen we de benaderingsformule

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1})\Delta x = \frac{b-a}{N}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{N-1})\right).$$

Net zo geeft de functiewaarde aan de rechterkant van het deelinterval de formule

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x = \frac{b-a}{N}\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_N)\right).$$

Als we een goede benadering willen hebben, moeten we Δx zeker redelijk klein kiezen, maar dan kunnen we ervan uitgaan dat $f(x)$ op de meeste van de deelintervallen monotoon (stijgend of dalend) is. In zo'n geval is de benadering van de functiewaarde op een deelinterval door de waarde aan een van de randen

zeker slechter dan de benadering door de waarde in het midden van het deelinterval. Daarom krijgt men bijna altijd een betere benadering door de waarde in het midden te kiezen, dus door

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx & \sum_{i=1}^{N} f(x_i - \frac{\Delta x}{2})\Delta x \\ = & \frac{b-a}{N}\left(f(x_1 - \frac{\Delta x}{2}) + f(x_2 - \frac{\Delta x}{2}) + \ldots + f(x_N - \frac{\Delta x}{2})\right).\end{aligned}$$

Meestal wordt deze formule de *rechthoek-regel* genoemd, maar soms vallen ook de formules met de waarden aan de linker- of rechterkant van het deelinterval onder deze naam.

Het idee bij de rechthoek-regel is in principe dat we de functie $f(x)$ door een stuksgewijs constante functie benaderen waarvoor we de integraal makkelijk uit kunnen rekenen. Maar we kennen natuurlijk betere benaderingen van een functie $f(x)$ dan door stuksgewijs constante functies.

Om de notatie iets eenvoudiger te houden, kijken we alleen maar naar één deelinterval en noemen de grenzen hiervan weer a en b. De eerstvolgende soort van functies die beter zijn dan constante functies zijn lineaire functies. Als we een functie $f(x)$ op een interval $[a, b]$ door een lineaire functie willen benaderen, is de meest voor de hand liggende keuze hiervoor de lijn door de twee randpunten, dus de lijn door de punten $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$. De oppervlakte waarmee we onze functie benaderen is dan geen rechthoek meer maar een trapezium met hoogte $f(a)$ aan de ene kant en hoogte $f(b)$ aan de andere. Maar de oppervlakte van dit trapezium is gewoon

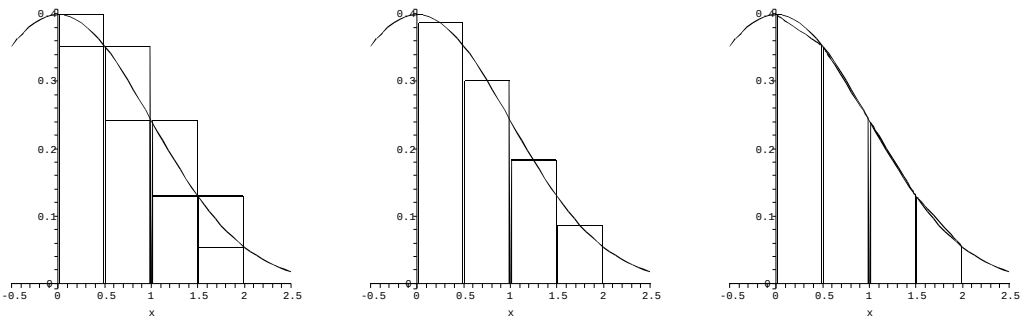
$$\frac{1}{2}(f(a) + f(b))\Delta x = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Als we nu weer naar de combinatie van meerdere deelintervallen kijken, moeten we de oppervlakten van de trapeziums bij elkaar optellen, dit geeft dan

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx & \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}(f(x_{i-1}) + f(x_i))\Delta x \\ = & \Delta x \cdot \frac{1}{2}(f(a) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{N-1}) + f(b)) \\ = & \frac{b-a}{2N}(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i))\end{aligned}$$

Deze benaderingsformule voor een integraal heet de *trapezium-regel*. In Figuur I.42 zijn de benaderingen van de integraal onder de standaardnormaalverdeling $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ met behulp van de rechthoek-regels en de trapezium-regel te zien. Het linkerplaatje geeft de rechthoeken met waarden aan de linker- en aan de rechterkant. Omdat $f(x)$ op het interval $[0, 2]$ strikt dalend is, geeft de waarde aan de linkerkant steeds een te grote en de waarde aan de linkerkant steeds een te kleine waarde. Het middelste plaatje laat zien dat de waarde in

het midden van het deelinterval al een betere benadering geeft, en het rechterplaatje maakt duidelijk dat de trapezium-regel een nog betere benadering geeft.



Figuur I.42: Rechthoek-regels en trapezium-regel.

We zijn van de rechthoek-regel naar de trapezium-regel gekomen, door een functie door een stuksgewijs lineaire functie in plaats van een stuksgewijs constante functie te benaderen. Maar in het kader van de Taylor reeksen hebben we al gezien dat we functies steeds beter door veeltermen van hogere graad kunnen benaderen. Daarom is de volgende voor de hand liggende stap, de functie $f(x)$ op een deelinterval $[x_{i-1}, x_i]$ door een kwadratische functie te benaderen. Het idee is dan weer, de oppervlakte onder de parabool als benadering van de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ te zien. Maar de oppervlakte onder een parabool kunnen we makkelijk bepalen, en het is zelfs voldoende als we dit voor de standaard-parabool $f(x) = x^2$ berekenen.

Voor $f(x) := x^2$ geldt dat

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}(b^3-a^3) = \frac{1}{3}(b-a)(a^2+ab+b^2)\\ = \frac{b-a}{3}\cdot\frac{1}{2}(a^2+(a+b)^2+b^2) = \frac{b-a}{6}\cdot(a^2+4(\frac{a+b}{2})^2+b^2)\\ = \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)).\end{aligned}$$

Maar dezelfde vergelijking $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$ geldt ook voor een geschaalde parabool $f(x) := c\cdot x^2$ en omdat we a en b willekeurig hebben gekozen geldt dit ook voor een langs de x-as verschoven parabool. En ook als we langs de y-as verschuiven, dus van $f(x)$ tot $f(x)+d$ over gaan, klopt het nog steeds, omdat $\int_a^b f(x)+d\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + (b-a)d$ en ook $\frac{b-a}{6}(f(a)+d+4(f(\frac{a+b}{2})+d)+f(b)+d) = \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))+(b-a)d$.

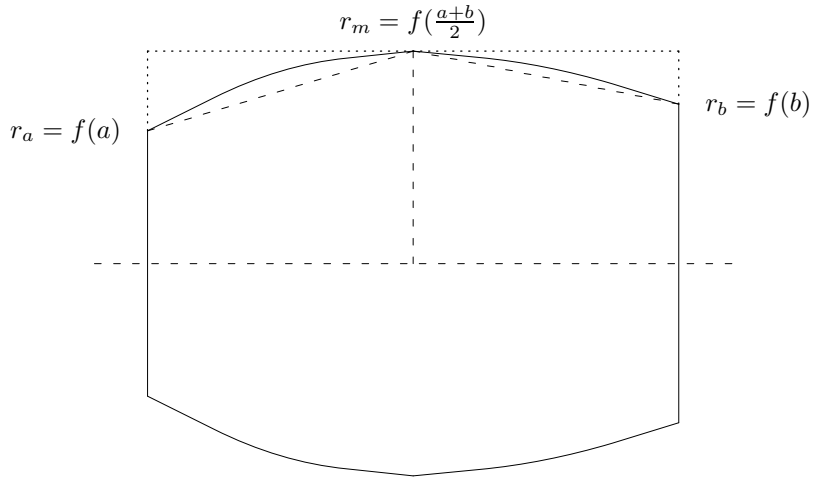
Het idee is nu dat we de functie $f(x)$ op het interval $[a,b]$ benaderen door de parabool die door de drie punten $(a,f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ en $(b,f(b))$ loopt. De oppervlakte onder deze parabool berekenen we met behulp van de boven gegeven formule en we nemen dit als benadering voor de oppervlakte onder de

grafiek van $f(x)$. Dit geeft dus de benaderingsformule

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

en we weten dat deze voor kwadratische veeltermen zelfs exact is.

De formule $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$ staat ook bekend als *Keplers vatregel*. Omdat Kepler na aanleiding van zijn (tweede) huwelijk ontevreden was over de methode hoe de inhoud van een vat wijn bepaald werd (meten met behulp van een staf door het spongat) wilde hij een eenvoudige formule vinden om het volume van een vat te bepalen. Zijn idee was, het volume als volume van een rotatielichaam te berekenen, waarbij de helft van de doorsnede van het vat rond een as tussen bodem en deksel roteert.



Gemeten werd de straal $r_a = f(a)$ van de bodem, de straal $r_b = f(b)$ van de deksel en de straal $r_m = f(\frac{a+b}{2})$ in het midden van het vat en natuurlijk de hoogte $h = b - a$ van het vat. Het roterende oppervlak A benaderde Kepler nu op twee manieren: Een keer door de te grote rechthoek met hoogte r_m en breedte h en een keer door de twee trapeziums tussen r_a en r_m en tussen r_m en r_b, die samen een te kleine waarde opleveren. en een keer door twee te kleine trapeziums. Dit gaf de ongelijkheden

$$(b-a)r_m \geq A \geq \frac{b-a}{2}\frac{r_a+r_m}{2}+\frac{b-a}{2}\frac{r_m+r_b}{2} = \frac{b-a}{4}(r_a+2r_m+r_b).$$

Het laatste idee was nu, een gemiddelde van de twee benaderingen van A te nemen, waarbij de rechthoek gewicht 1 en de trapeziums gewicht 2 krijgen, omdat de trapeziums een onderverdeling in twee stukken gebruiken. Dit geeft de benadering

$$A \approx \frac{1}{3}((b-a)r_m + \frac{b-a}{2}(r_a+2r_m+r_b)) = \frac{b-a}{6}(r_a+4r_m+r_b)$$

en dit is precies wat we boven hebben gevonden.

Het volume van het vat wordt op een soortgelijke manier benaderd: Als de rechthoek roteert geeft dit een cilinder en als de trapeziums roteren

geeft dit twee kegelstompen. Ook deze volumes worden weer met de gewichten $1:2$ gemiddeld, en dit geeft de benaderingsformule

$$V = \frac{\pi}{9}(b-a)(r_a^2 + 5r_m^2 + r_b^2 + r_a r_m + r_m r_b)$$

voor het volume.

Als we nu weer het interval $[a,b]$ in meerdere deelintervallen $[x_{i-1}, x_i]$ van breedte Δx opsplitsen en op elk deelinterval Keplers vatregel toepassen, krijgen we

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx \approx & \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{6}(f(x_{i-1}) + 4f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}) + f(x_i))\Delta x \\
= & \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{6}(f(x_{i-1}) + 4f(x_i - \frac{\Delta x}{2}) + f(x_i))\Delta x \\
= & \frac{\Delta x}{6}\left(f(a) + 4f(x_1 - \frac{\Delta x}{2}) + f(x_1) + f(x_1) + 4f(x_2 - \frac{\Delta x}{2}) \right. \\
& \left. + f(x_2) + \ldots + f(x_{N-1}) + 4f(x_{N-1} - \frac{\Delta x}{2}) + f(b) \right) \\
= & \frac{b-a}{6N}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{N} f(x_i - \frac{\Delta x}{2}) \right)
\end{aligned}$$

en dit staat bekend als de *Simpson-regel*. Dit is de typische manier hoe in zakrekenmachines integralen uitgerekend worden.

Nu dat we een keer op stap zijn kan ons natuurlijk niets meer hinderen om ook eens een benadering door een derdegraads-veelterm te proberen. Een soortgelijke redenering als boven laat zien dat het voldoende is om de functie $f(x) := x^3$ te bekijken. Er geldt

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_a^b = \frac{1}{4}(b^4 - a^4) = \frac{1}{4}(b-a)(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3) \\
= \frac{b-a}{4}\cdot\frac{1}{2}(a^3 + 3(\frac{2a+b}{3})^3 + 3(\frac{a+2b}{3})^3 + b^3) \\
= \frac{b-a}{8}(f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)).
\end{aligned}$$

Als we dit nu weer op deelintervallen gaan toepassen, krijgen we

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx \approx & \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{8}(f(x_{i-1}) + 3f(\frac{2x_{i-1}+x_i}{3}) + 3f(\frac{x_{i-1}+2x_i}{3}) + f(x_i))\Delta x \\
= & \frac{b-a}{8N}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + 3\sum_{i=1}^{N}(f(x_i - \frac{2}{3}\Delta x) + f(x_i - \frac{1}{3}\Delta x)) \right)
\end{aligned}$$

en dit heet de *Newton* $\frac{3}{8}$*-regel*. Het is trouwens zo dat ook de Simpson-regel al exact voor derdegraads-veeltermen is, maar dit is eigenlijk een beetje toeval,

omdat zekere termen bij het uitwerken van de Simpson-regel voor $f(x) := x^3$ tegen elkaar wegvallen.

Op een soortgelijke manier kunnen we doorgaan met benaderingen door vierdegraads-, vijfdegraads- en hogere veeltermen. Dit geeft de zogeheten *Newton-Cotes-formules*, waarbij voor een vaste N het interval $[a, b]$ in N even grote stukken van lengte $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ onderverdeelt wordt. Vervolgens wordt door de $N+1$ punten $(x_i, f(x_i))$ met $x_i := a + i\Delta x$ een veelterm van graad N gelegd en de oppervlakte onder $f(x)$ benadert door de oppervlakte onder de grafiek van deze veelterm. Men krijgt op deze manier steeds een formule van de vorm

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{N} w_i \cdot f(a + i\Delta x)$$

voor zekere gewichten w_i een een noemer m. De volgende tabel geeft de gewichten en noemers voor $N = 1, 2, \ldots, 6$:

N	m	w_i	naam
1	2	1 1	trapezium-regel
2	6	1 4 1	Simpson-regel
3	8	1 3 3 1	Newton-$\frac{3}{8}$-regel
4	90	7 32 12 32 7	Milne-regel
5	288	19 75 50 50 75 19	—
6	840	41 216 27 272 27 216 41	Weddle-regel

Natuurlijk worden ook deze formules weer op onderverdelingen van het interval $[a, b]$ in deelintervallen toegepast. Het probleem hierbij is, dat de nauwkeurigheid niet meer zo snel toeneemt, terwijl afrondingsfouten bij veeltermen van hogere graad een steeds grotere rol gaan spelen.

> Wat men in plaats van een benadering van de functie door veeltermen van steeds hogere graad in de praktijk meestal toepast, zijn *adaptieve* methoden. Het idee is, met een eenvoudige methode zo als de trapezium-regel of (hooguit) de Simpson-regel op een redelijk grove onderverdeling te beginnen en deze vervolgens te verfijnen. Op stukken waar de verfijning bijna geen verandering meer oplevert (d.w.z. de verandering ligt binnen de gewenste nauwkeurigheid), is de benadering blijkbaar al heel goed en hoeven we hier niets meer aan te veranderen. Daarentegen gaan we op deelstukken waar de verfijning wel een grotere verandering oplevert nog verder verfijnen, tot dat we ook hier de gewenste nauwkeurigheid bereiken. Een bekende methode van deze soort is de *Romberg-methode* die veel toegepast wordt.

We gaan nu een paar van de genoemde methoden vergelijken, door de integraal

$$I := \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

van de standaardnormaalverdeling met verwachtingswaarde 0 en standaardafwijking 1 te benaderen. Omdat de normaalverdeling symmetrisch ten opzichte van het nulpunt is, geeft deze integraal de helft van de kans, dat bij een normaalverdeling een gebeurtenis binnen 2 keer de standaardafwijking van de verwachtingswaarde valt. Uit de statistiek weten we, dat deze kans ongeveer 95% is.

De op 16 decimalen afgeronde waarde van de integraal is

$$I = 0.4772498680528208.$$

De volgende tabel geeft de benaderingen van de integraal met de rechthoekregel (voor het midden van het deelinterval), met de trapezium-regel en met de Simpson-regel. In elk geval worden onderverdelingen in $N = 4, 8, 16, 32, 64$ deelintervallen bekeken.

N	rechthoek	trapezium	Simpson
4	0.4783659765865935	0.4750101352033225	0.4772473627921698
8	0.4775305507336766	0.4766880558949580	0.4772497191207704
16	0.4773201366323807	0.4771093033143173	0.4772498588596929
32	0.4772674412319950	0.4772147199733490	0.4772498674791130
64	0.4772542617227459	0.4772410806026720	0.4772498680160546

We zien dat de rechthoek-regel en de trapezium-regel in dit geval ongeveer even goed scoren, met 64 deelintervallen hebben we een benadering met een nauwkeurigheid van 10^{-5} bereikt. Maar met de Simpson-regel bereiken we deze nauwkeurigheid al met 4 deelintervallen en met elke verdubbeling van het aantal deelintervallen komt er ongeveer één juiste cijfer erbij.

9.2 Gauss kwadratuur

Tot nu toe hebben we een integraal steeds met een formule van de vorm $\int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_{i=1}^N w_i \cdot f(x_i)$ benadert, waarbij $x_i = a + i \cdot \Delta x$. De punten x_i waar we de functie evalueren noemen we ook de *roosterpunten*. De Newton-Cotes methoden zijn dus allemaal methoden met roosterpunten met constante afstanden. Het is natuurlijk aangenaam om hiermee te werken, maar aan de andere kant is het eigenlijk een onnodige beperking. Het algemene idee achter de zogeheten *Gauss kwadratuur-methoden* is, de integraal $\int_a^b f(x)\ dx$ te benaderen door een formule van de vorm

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(x_i)$$

waarbij de roosterpunten x_i geschikt gekozen punten in het interval $[a, b]$ zijn en de w_i zekere gewichten. Het doel is hierbij, x_i en w_i zo te kiezen dat de formule voor veeltermen van zo hoog mogelijke graad exact zijn.

Om de notatie te vereenvoudigen, specialiseren we het interval $[a, b]$ nu tot het interval $[-1, 1]$. We zullen later zien, hoe we weer terug naar een algemeen interval komen.

Legendre-veeltermen

We hebben al in het kader van de Fourier transformatie naar inproducten van functies gekeken, een voorbeeld hiervan is

$$\Phi(f(x), g(x)) := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)\, dx.$$

Het doel is, een orthogonaal stelsel van veeltermen ten opzichte van dit inproduct te vinden. Hiervoor beginnen we met $p_0(x) := 1$ en zien dat $p_1(x) := x$ al loodrecht op $p_0(x)$ staat. Vervolgens bepalen we $p_2(x)$ met $\Phi(p_2(x), p_0(x)) = 0$ en $\Phi(p_2(x), p_1(x)) = 0$ door de projecties van $f(x) = x^2$ op $p_0(x)$ en $p_1(x)$ van x^2 af te trekken. Er geldt $\Phi(x^2, p_0(x)) = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$ en $\Phi(x^2, p_1(x)) = 0$ en wegens $\Phi(p_0(x), p_0(x)) = 2$ is de projectie van x^2 op $p_0(x)$ dus $\frac{1}{3}p_0(x)$. De veelterm $x^2 - \frac{1}{3}$ staat dus loodrecht op $p_0(x)$ en op $p_1(x)$.

Op een soortgelijke manier kan men nu doorgaan en voor elke n een veelterm $p_n(x)$ bepalen die loodrecht op de eerder gevonden $p_m(x)$ met $m < n$ staat. Dit is de *Gram-Schmidt orthogonalisatie* methode. Echter laat zich een orthogonaal stelsel van veeltermen ook op een rechtstreekse manier vinden, namelijk de *Legendre-veeltermen*. De Legendre-veelterm $p_n(x)$ van graad n is gedefinieerd door

$$p_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n, \quad p_0(x) = 1.$$

Dit betekent dat we $p_n(x)$ krijgen door de n-de afgeleide van de veelterm $(x^2 - 1)^n$ te berekenen. Omdat $(x^2 - 1)^n$ een veelterm van graad $2n$ is, levert de n-de afgeleide inderdaad een veelterm van graad n.

Men gaat nu na dat voor de Legendre-veeltermen geldt dat

$$\int_{-1}^{1} p_n(x)p_m(x)\, dx = 0 \text{ als } m \neq n \quad \text{en} \quad \int_{-1}^{1} p_n(x)p_n(x)\, dx = \frac{2}{2n+1},$$

met andere woorden zijn de Legendre-veeltermen een orthogonaal stelsel ten opzichte van het inproduct Φ.

Een belangrijke relatie om de Legendre-veeltermen te berekenen is de recursie formule

$$(n+1)p_{n+1}(x) = (2n+1)xp_n(x) - np_{n-1}(x).$$

Met $p_0(x) = 1$ en $p_1(x) = x$ laten zich hieruit de eerste Legendre-veeltermen snel berekenen:

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
p_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
p_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
p_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
p_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)
\end{aligned}$$

De Gauss-Legendre methode

Wat hebben de Legendre-veeltermen nu met numerieke integratie te maken? Het antwoord is, dat we de nulpunten van de Legendre-veeltermen als roosterpunten x_i kiezen. Er laat zich namelijk ook aantonen, dat de n-de Legendre-veelterm $p_n(x)$ in het interval $[-1,1]$ precies n verschillende nulpunten heeft. Voor $p_1(x)$ is dit bijvoorbeeld $x_1 = 0$ en voor $p_2(x)$ zijn dit $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ en $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

We kiezen nu eerst een vast aantal N van roosterpunten, en kiezen als roosterpunten $x_1, \ldots, x_N$ de nulpunten van $p_N(x)$. De gewichten $w_1, \ldots, w_N$ gaan we nu zo bepalen, dat de formule

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(x_i)$$

voor veeltermen van graad $0, 1, \ldots, N-1$ exact is. Dit is mogelijk omdat we het met een stelsel van N lineaire vergelijkingen in de N onbekende $w_1, \ldots, w_N$ te maken hebben, met als vergelijkingen

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot x_i^j = \int_{-1}^{1} x^j\ dx$$

voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Men gaat na dat de determinant van de matrix van dit stelsel vergelijkingen ongelijk aan 0 is en het stelsel daarom een eenduidige oplossing heeft.

De bewering is nu, dat met deze keuze van roosterpunten x_i en gewichten w_i, de formule

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(x_i)$$

voor elke veelterm $f(x)$ van graad hoogstens $2N-1$ exact is.

Dit zien we als volgt in: Zij $f(x)$ een veelterm van graad $m \leq 2N-1$, dan kunnen we $f(x)$ met behulp van een staartdeling schrijven als

$$f(x) = p_N(x)g(x) + r(x)$$

waarbij de graden van $g(x)$ en $r(x)$ hoogstens $N-1$ zijn.

Aan de ene kant geldt nu

$$\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = \int_{-1}^{1} p_N(x)g(x)\ dx + \int_{-1}^{1} r(x)\ dx = \int_{-1}^{1} r(x)\ dx$$

omdat $\int_{-1}^{1} p_N(x)x^m\ dx = 0$ voor alle $m < N$, want x^m is een lineaire combinatie van de $p_k(x)$ met $k \leq m$ en deze staan allemaal loodrecht op $p_N(x)$. Aan de andere kant is

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(x_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot p_N(x_i)g(x_i) + \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot r(x_i) = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot r(x_i)$$

omdat de x_i de nulpunten van $p_N(x)$ zijn, dus $p_N(x_i) = 0$ voor alle i. Maar de gewichten w_i zijn juist zo gekozen dat $\int_{-1}^{1} r(x)\ dx = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot r(x_i)$ voor veeltermen $r(x)$ van graad hoogstens $N-1$, en bij elkaar genomen zegt dit dat inderdaad $\int_{-1}^{1} f(x)\ dx = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(x_i)$.

De methode om een integraal met deze roosterpunten en gewichten te benaderen, heet de *Gauss-Legendre methode*. Merk op dat de roosterpunten x_i en de gewichten w_i alleen maar van het gekozen aantal N van roosterpunten afhangt, maar niet van de functie $f(x)$. Voor gegeven N kunnen de x_i en w_i dus een keer uitgerekend en tot de benodigde nauwkeurigheid opgeslagen worden. De volgende tabel geeft de roosterpunten x_i en de gewichten w_i van de Gauss-Legendre-methode voor $N = 1, \ldots, 4$ met een nauwkeurigheid van 6 decimalen. Merk op dat met $N = 4$ veeltermen van graad 7 nog exact uitgewerkt worden.

N	i	x_i	w_i
1	1	0	2
2	1	-0.577350	1
	2	0.577350	1
3	1	-0.774597	0.555556
	2	0	0.888889
	3	0.774597	0.555556
4	1	-0.861136	0.347855
	2	-0.339981	0.652146
	3	0.339981	0.652146
	4	0.861136	0.347855

We zijn bij de Legendre-veeltermen ervan uit gegaan dat we een integraal op het interval $[-1, 1]$ willen berekenen. Maar een integraal op een algemeen interval $[a, b]$ kunnen we door een eenvoudige substitutie op dit interval terug brengen, er geldt:

Met $u = \frac{2}{b-a}x - \frac{b+a}{b-a}$ is $x = x(u) = \frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}$ en $dx = \frac{b-a}{2}du$. Als u van -1 tot 1 loopt, loopt x van a tot b en er geldt dus:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(x(u))\ du = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}u + \frac{b+a}{2}\right)\ du.$$

Als we de Gauss-Legendre methode weer op de integraal

$$I := \int_0^2 f(x)\ dx \text{ met } f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2}}$$

van de standaardnormaalverdeling willen toepassen, is de substitutie gewoon een verschuiving om 1, dus we berekenen de integraal door

$$I := \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}\ dx.$$

Voor $N = 2$ hebben we $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ en $w_1 = w_2 = 1$. Als we hiermee de integraal I zonder verdere onderverdeling van het interval benaderen, krijgen

we $I \approx f(x_1+1)+f(x_2+1) = 0.47983991$ en dit is een afwijking van slechts 0.5%.

Voor $N=3$ hebben we $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$ en $w_1 = \frac{5}{9}$, $w_2 = \frac{8}{9}$, $w_3 = \frac{5}{9}$. In dit geval krijgen we $I \approx w_1 \cdot f(x_1+1)+w_2 \cdot f(x_2+1)+w_3 \cdot f(x_3+1) = .47705889$ en dit is een afwijking van 0.04%.

De Gauss-Legendre methode is een speciaal geval van een algemenere klasse van methode, die onder de naam *Gauss kwadratuur* vallen. Hierbij gaat het om het benaderen van integralen van de vorm $\int_a^b \rho(x)f(x)\ dx$ voor een zekere gewichtsfunctie $\rho(x)$ die in het geval van de Gauss-Legendre methode $\rho(x) = 1$ is. Deze gewichtsfunctie kan men ook in het inproduct inbouwen, dit is dan $\Phi(f(x), g(x)) := \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)\ dx$. Voor zekere functies $\rho(x)$ krijgt men ook in dit geval een stelsel van orthogonale veeltermen. Voorbeelden zijn:

- $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ op $[-1,1]$ geeft de Chebyshev-veeltermen,
- $\rho(x) = e^{-x}$ op $[0,\infty]$ geeft de Laguerre-veeltermen,
- $\rho(x) = e^{-x^2}$ op $[-\infty,\infty]$ geeft de Hermite-veeltermen.

Analoog met het geval van de Legendre-veeltermen worden in elk geval de nulpunten van deze veeltermen als roosterpunten gekozen en de gewichten zo bepaald, zo dat de formule $\int_a^b \rho(x)f(x)\ dx = \sum_{i=1}^N w_i \cdot f(x_i)$ exact is voor veeltermen $f(x)$ van graad hoogstens $2N-1$.

9.3 Functies van meerdere variabelen

We hebben in de vorige les gezien, dat we integralen over functies van meerdere variabelen in principe uit kunnen werken door in elkaar geschakelde gewone integraties. Hetzelfde geldt ook voor de numerieke integratie, we kunnen de integraties voor de verschillende variabelen achter elkaar uitvoeren, waarbij we voor elke 1-dimensionale integratie onze favoriete benaderingsmethode gebruiken.

We gaan dit nu eens aan de hand van een functie $f(x,y)$ van 2 variabelen voor de Simpson-regel en de Gauss-Legendre methode uitschrijven.

2-dimensionale Simpson-regel

De 1-dimensionale Simpson-regel geeft voor een onderverdeling van het interval $[a,b]$ in N deelintervallen de benaderingsformule

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i)+4\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}})\right)$$

waarbij $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, $x_i = a+i\Delta x$ en $x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{\Delta x}{2}$.

Als we nu een integratie van een functie met meerdere variabelen willen benaderen, kunnen we de Simpson-regel op de enkele 1-dimensionale integraties toepassen. Voor een functie $f(x,y)$ van twee variabelen op de rechthoek $R =$

$[a,b]\times[c,d]$, waarbij we het interval $[a,b]$ in N stukken van lengte $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ en het interval $[c,d]$ in M stukken van lengte $\Delta y = \frac{d-c}{M}$ onderverdelen, geeft dit:

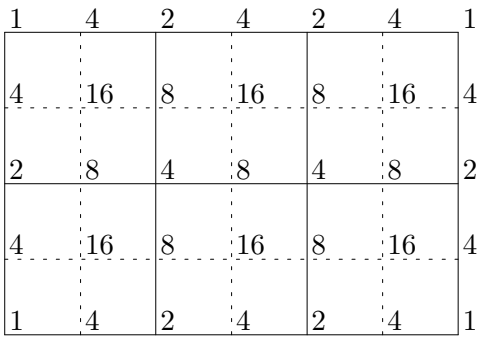
$$\begin{aligned}
\int_R f(x,y)\,dA &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy \\
&\approx \int_c^d \left(\frac{b-a}{N}(f(a,y)+f(b,y)+2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i,y)+4\sum_{i=1}^{N} f(x_{i-\frac{1}{2}},y)\right) dy \\
&= \frac{b-a}{N}\left(\int_c^d f(a,y)\,dy+\int_c^d f(b,y)\,dy\right. \\
&\qquad \left. +\sum_{i=1}^{N-1} 2\int_c^d f(x_i,y)\,dy+\sum_{i=1}^{N} 4\int_c^d f(x_{i-\frac{1}{2}},y)\,dy\right)
\end{aligned}$$

In elke integraal in deze formule moeten we nu nog de Simpson-regel op de y-coördinaat toepassen, dit betekent dat elke integraal in vier termen opgesplitst moet worden. De uiteindelijke formule ziet er niet zo erg mooi uit, maar is wel nuttig:

$$\begin{aligned}
&\int_R f(x,y)\,dA \approx \\
&\frac{(b-a)(d-c)}{NM}\left(f(a,c)+f(a,d)+2\sum_{j=1}^{M-1} f(a,y_j)+4\sum_{j=1}^{M} f(a,y_{j-\frac{1}{2}})\right. \\
&+f(b,c)+f(b,d)+2\sum_{j=1}^{M-1} f(b,y_j)+4\sum_{j=1}^{M} f(b,y_{j-\frac{1}{2}}) \\
&+2\sum_{i=1}^{N-1}(f(x_i,c)+f(x_i,d))+4\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M-1} f(x_i,y_j)+8\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{M} f(x_i,y_{j-\frac{1}{2}}) \\
&\left.+4\sum_{i=1}^{N}(f(x_{i-\frac{1}{2}},c)+f(x_{i-\frac{1}{2}},d))+8\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1} f(x_{i-\frac{1}{2}},y_j)+16\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(x_{i-\frac{1}{2}},y_{j-\frac{1}{2}})\right)
\end{aligned}$$

De beste manier om de 2-dimensionale Simpson-regel te onthouden is, de verdeling van de gewichten in het schema van roosterpunten te bekijken. De 1-dimensionale Simpson-regel heeft de rij van gewichten $1,4,2,4,\ldots,2,4,1$. In 2 dimensies moeten we nu de gewichten voor de twee coördinaten met elkaar vermenigvuldigen, dit geeft aan de randen gewichten $1,4,2,4,\ldots,2,4,1$ (omdat we met 1 vermenigvuldigen) en daartussen afwisselend rijen $2,8,4,8,\ldots,4,8,2$ (als we met 2 vermenigvuldigen) en $4,16,8,16,\ldots,8,16,4$ (als we met 4 vermenigvuldigen).

Als we voor de punten x_i en y_j doorgetrokken lijnen nemen en voor de punten $x_{i-\frac{1}{2}}$ en $y_{j-\frac{1}{2}}$ stippellijnen, ziet het schema van gewichten op de roosterpunten er zo uit als in Figuur I.43.



Figuur I.43: Gewichten voor 2-dimensionale Simpson-regel.

2-dimensionale Gauss-Legendre methode

Bij de Gauss-Legendre methode ziet de situatie er eigenlijk iets overzichtelijker uit. Voor een 1-dimensionale integraal hebben de benaderingsformule

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(x_i)$$

waarbij x_i de nulpunten van de Legendre-veelterm $p_N(x)$ van graad N zijn en de w_i de bijhorende gewichten. Als we nu veronderstellen dat we voor de x-richting en de y-richting de Gauss-Legendre methode van dezelfde graad N toepassen, hebben we $y_i = x_i$ en krijgen voor de integratie over de vierkant $R := [-1,1] \times [-1,1]$:

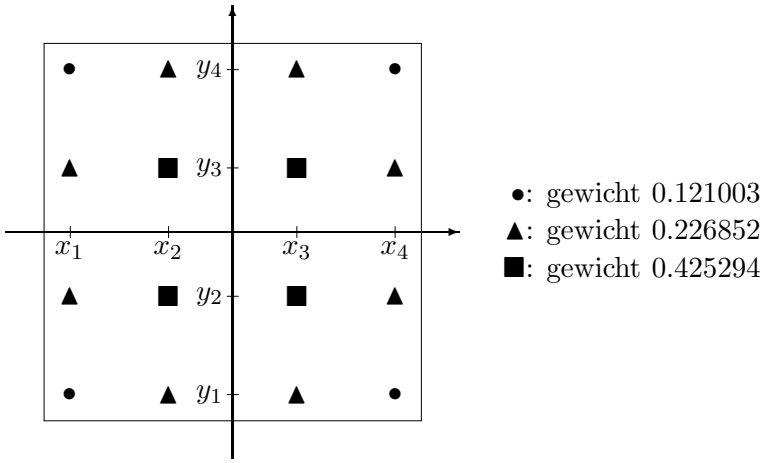
$$\begin{aligned}\int_R f(x,y)\,dA &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy \approx \int_{-1}^{1}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot f(x_i,y)\right)dy \\ &= \sum_{i=1}^{N} w_i \int_{-1}^{1} f(x_i,y)\,dy \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \left(\sum_{j=1}^{N} w_j \cdot f(x_i,y_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \cdot f(x_i,y_j).\end{aligned}$$

Deze formule betekent dat we over de functiewaarden in de roosterpunten (x_i, y_j) met $1 \le i,j \le N$ middelen, waarbij de functiewaarde in het punt (x_i, y_j) het gewicht $w_i w_j$ krijgt.

Voor $N = 4$ hebben we de nulpunten $x_1 = y_1 = -0.861136$, $x_2 = y_2 = -0.339981$, $x_3 = y_3 = 0.339981$, $x_4 = y_4 = 0.861136$, en de gewichten $w_1 = w_4 = 0.347855$, $w_2 = w_3 = 0.652146$. Hieruit volgt, dat er maar 3 verschillende gewichten voor de roosterpunten zijn, namelijk

$$\begin{aligned}&w_1w_1 = w_1w_4 = w_4w_1 = w_4w_4 = 0.121003,\\ &w_1w_2 = w_1w_3 = w_2w_1 = w_2w_4 = w_3w_1 = w_3w_4 = w_4w_2 = w_4w_3 = 0.226852,\\ &w_2w_2 = w_2w_3 = w_3w_2 = w_3w_3 = 0.425294.\end{aligned}$$

We krijgen dus een plaatje van roosterpunten en gewichten zo als in Figuur I.44.



Figuur I.44: Roosterpunten en gewichten voor 2-dimensionale Gauss-Legendre methode met $N = 4$.

Speciale methoden

In het (belangrijke) 2-dimensionale geval zijn er ook nog alternatieve methoden, die een goede benadering opleveren.

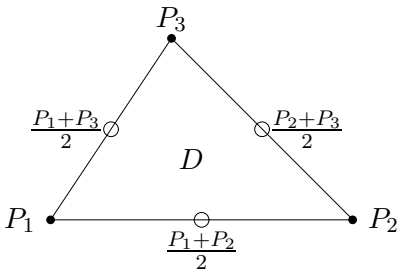
Het idee dat we bij de trapezium-regel hadden, was dat we de functie tussen twee punten door een lijn benaderen. Maar net zo als twee punten in het vlak een lijn eenduidig bepalen, leggen drie punten in de 3-dimensionale ruimte een vlak eenduidig vast. Als we dus drie (verschillende) punten $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ in het $x - y$-vlak kiezen, is er een eenduidig vlak in $\mathbb{R}^3$ dat de drie punten $(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$, $(x_2, y_2, f(x_2, y_2))$ en $(x_3, y_3, f(x_3, y_3))$ bevat. Het idee is, dat we de functie $f(x, y)$ op het driehoek dat door de drie punten P_1, P_2, P_3 opgespannen is, door dit vlak benaderen. Bij deze methode zou men verwachten dat de benadering alleen maar voor lineaire functies exact is.

Er is echter een trucje, waarmee zelfs kwadratische functies nog exact berekend worden, namelijk door in plaats van de hoekpunten P_1, P_2, P_3 van de driehoek de functiewaarden in de middelpunten van de zijden te nemen, dus in de punten $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, $\frac{1}{2}(P_2 + P_3)$, $\frac{1}{2}(P_3 + P_1)$. Dit lijkt op de rechthoek-regel in het 1-dimensionale geval, waar we als gemiddelde functiewaarde de functiewaarde in het midden nemen. Maar bij een driehoek hebben we drie zijden, dus drie gemiddelde functiewaarden op de zijden en het gemiddelde van deze functiewaarden geeft inderdaad een goede benadering voor de integraal.

Het idee is dus dat we voor een driehoek D met hoekpunten P_1, P_2, P_3 en oppervlakte $opp(D)$ de integraal van $f(x, y)$ op D benaderen door

$$\int_D f(x,y)\, dA \approx \frac{opp(D)}{3}(f(\frac{P_1+P_2}{2}) + f(\frac{P_2+P_3}{2}) + f(\frac{P_3+P_1}{2}))$$

en men kan bewijzen dat deze benadering voor kwadratische functies exact is, d.w.z. voor functies van de vorm $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$.



We gaan dit eens aan het voorbeeld van de driehoek D met hoekpunten $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$ en $P_3 = (0,1)$ en de functie $f(x,y) := xy$ checken. Er geldt $opp(D) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{P_1+P_2}{2}) = f(\frac{1}{2},0) = 0$, $f(\frac{P_2+P_3}{2}) = f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $f(\frac{P_3+P_1}{2}) = f(0,\frac{1}{2}) = 0$, dus geeft de benadering het resultaat

$$\int_D f(x,y)\,dA \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

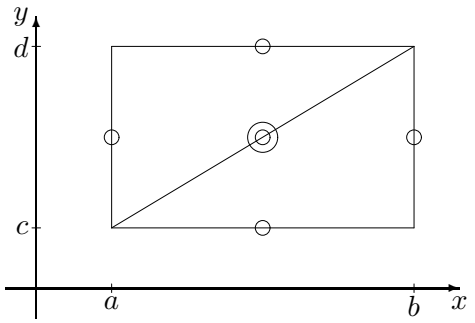
Aan de andere kant geeft de expliciete integratie

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{1-x} xy\,dy\,dx &= \int_0^1 (\frac{1}{2}xy^2|_0^{1-x})\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x(1-x)^2\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4)|_0^1\\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Op een soortgelijke manier gaat men na dat de benadering ook voor de functies $f(x,y) = x^2$ en $f(x,y) = y^2$ exact is. Verder komt men van de speciale driehoek D tot een willekeurige driehoek door een verschuiving en een lineaire transformatie en men ziet dat bij deze transformaties de integraal en de benadering op dezelfde manier veranderen. Dit is voldoende om te laten zien dat de benaderingsformule inderdaad voor kwadratische veeltermen exact is.

Als we nu over een rechthoek willen integreren, is het natuurlijk enigszins voor de hand liggend, de rechthoek in twee driehoeken te delen, en de formule voor driehoeken op deze twee driehoeken toe te passen. Als men dit doet, gebeurt er iets soortgelijks als bij de Simpson-regel, namelijk er vallen derdegraads-termen tegen elkaar weg en deze benadering is zelfs nog voor kubische functies $f(x,y)$ exact. Voor de rechthoek $R = [a,b]\times[c,d]$ krijgt men zo de benadering

$$\begin{aligned}\int_R f(x,y)\,dA \approx \frac{(b-a)(d-c)}{6}\Big(&f(\frac{a+b}{2},c) + f(\frac{a+b}{2},d)\\ &+ f(a,\frac{c+d}{2}) + f(b,\frac{c+d}{2}) + 2f(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2})\Big).\end{aligned}$$



Dat deze benadering inderdaad voor derdegraads-veeltermen in x en y werkt, ziet men bijvoorbeeld door narekenen voor de functies $f(x,y) = x^3, x^2y, xy^2, y^3$ op de vierkant $[0,1] \times [0,1]$. Verschuiving en schaling maakt ook hier geen verschil in de geldigheid van de formule.

> Ook in het meerdimensionale geval worden in de praktijk vaak *adaptieve methoden* gebruikt. Men begint met een redelijk grove onderverdeling van het gebied in driehoeken (een zogeheten *triangulatie*) en verfijnd deze op gebieden waar een verfijning nog afwijkingen boven de gewenste nauwkeurigheid oplevert. Methoden als deze vallen onder het begrip van *eindige elementen methoden*.

9.4 Monte-Carlo methoden

Vooral in de numerieke integratie van functies met meerdere variabelen worden inmiddels vaak methoden toegepast die een toevalsgenerator gebruiken. Het idee hierbij is simpel: Als $x_1, x_2, \ldots$ toevallig volgens een uniforme verdeling op het interval $[a,b]$ gekozen worden, dan is het gemiddelde $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)$ een redelijke afschatting voor de gemiddelde functiewaarde van $f(x)$ op het interval $[a,b]$ en men krijgt zo de benadering

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{N} = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$

De convergentie van deze methode is voor functies van een variabel niet erg goed, hier zijn andere methoden meestal beter.

Maar hetzelfde idee laat zich ook op functies van meerdere veranderlijken toepassen. Hierbij hoeft het gebied waarover geïntegreerd wordt niet eens een veralgemeend rechthoek te zijn. Het enige wat nodig is om de integraal

$$\int_B f(x_1,\ldots,x_n)\,dA$$

te benaderen, zijn grenzen voor de enkele coördinaten, dus a_i, b_i zo dat $a_i \leq x_i \leq b_i$ voor alle $(x_1,\ldots,x_n) \in B$. Dit betekent dat het gebied B door een veralgemeend rechthoek $R := [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ ingesloten wordt. Vervolgens moet er nog een toets zijn die zegt of een punt $X = (x_1,\ldots,x_n) \in R$ in B ligt of niet. Bij een kogel van straal r is dit bijvoorbeeld gewoon de test, of

$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq r$. Vervolgens worden toevallig punten $X \in R$ geproduceerd door elke coördinaat toevallig volgens een uniforme verdeling uit het interval $[a_i, b_i]$ te kiezen. Als $X \in B$ is, wordt $f(X)$ berekent, over deze functiewaarden wordt gemiddeld en het gemiddelde met het (n-dimensionale) volume van B vermenigvuldigd.

Belangrijke begrippen in deze les

- roosterpunten
- rechthoek-regel
- trapezium-regel
- Keplers vatregel
- Simpson-regel
- Gauss-Legendre-methode

Opgaven

41. Bereken de integraal

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin(x)}\, dx$$

met behulp van de trapezium-regel. Gebruik hierbij eerst een onderverdeling in deelintervallen van lengte $\Delta x = \frac{\pi}{2}$ (dus 4 deelintervallen) en dan deelintervallen van lengte $\Delta x = \frac{\pi}{4}$ (dus 8 deelintervallen).

42. Zij $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$, dan kunnen we de integraal over $f(x)$ niet door een primitieve zonder integraal schrijven. Voor $x = 0$ heeft $f(x)$ de waarde 1 en de kleinste nulpunt wordt in $x = \pi$ bereikt. Benader de integraal $I := \int_0^\pi f(x)\, dx$ met een foutmarge van hoogstens 0.1%:

    (i) Gebruik de trapezium-regel met een geschikte onderverdeling in N delen. Hoe groot moet N zijn om de gewenste nauwkeurigheid te bereiken?

    (ii) Gebruik de Simpson-regel met een geschikte onderverdeling. Hoe groot moet N nu zijn?

    (iii) Gebruik de Gauss-Legendre methode met $N = 2$. Is hierbij überhaupt een onderverdeling nodig om de nauwkeurigheid te bereiken?

    Je hoeft de foutmarge niet strikt te bewijzen, maar de nauwkeurigheid moet uit de berekeningen plausibel blijken.

43. We bekijken de 2-dimensionale standaardnormaalverdeling

$$f(x, y) := \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

De vierkant $R := \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ is de verzameling van punten in het vlak, waarvoor beide coördinaten binnen de standaardafwijking van de 1-dimensionale normaalverdeling liggen. Om de kans te berekenen dat een uitkomst bij een 2-dimensionale normaalverdeling in dit gebied ligt, moeten we de integraal $I := \int_R f(x, y)\, dA$ benaderen.

(i) Bereken I door de trapezium-regel op beide coördinaten toe te passen. Gebruik hiervoor eerst een onderverdeling van de intervallen $[-1, 1]$ in 2 deelintervallen en dan een onderverdeling in 4 deelintervallen.

(ii) Bereken I door de Simpson-regel op beide coördinaten toe te passen. Gebruik hiervoor dezelfde onderverdelingen als in deel (i).

(iii) Bereken I door de Gauss-Legendre methode met $N = 2$ op beide coördinaten toe te passen. Doe dit eerst voor de volledige vierkant R en dan op de vier deelvierkanten in die R door de x-as en de y-as onderverdeelt wordt.