Les 10 Discrete Fourier transformatie

We hebben in de vorige lessen gezien hoe we met behulp van de Fourier transformatie een alternatieve beschrijving van een signaal in het frequentiedomein kunnen berekenen. Helaas hebben we het in de praktijk bijna nooit met signalen te maken die zich door eenvoudige combinaties van simpele continue functies zo als $\cos(x)$ of $\sin(x)$ of door rechthoek of driehoek impulsen laten beschrijven. Meestal kunnen we zelfs de functiewaarden $f(t)$ van een signaal alleen maar door een meting bepalen omdat het signaal a priori onbekend is. Dit maakt het natuurlijk onmogelijk, de Fourier getransformeerde van $f(t)$ volgens de (theoretische) formule

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\, dt$$

uit te rekenen, waarbij we het nog niet eens over de oneindige grenzen hebben.

Het idee om uit dit dilemma te ontsnappen is, de functie door voldoende metingen zo goed te beschrijven, dat we niettemin belangrijke informatie over de functie in het tijds- en frequentiedomein krijgen.

10.1 Discretisering

Het beschrijven van een functie door in zeker afstanden de functiewaarde te meten noemt men *sampling*, het resultaat van een sampling is een *discretisering* van de functie.

Als men een tijdsinterval Δt en het aantal N van metingen kiest, beschrijft men een functie $f(t)$ op de tijdstippen $t_k := k \cdot \Delta t$ voor $k = 0, 1, \ldots, N-1$ door de N discrete waarden $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$ gegeven door

$$f_0 := f(0 \cdot \Delta t), \ldots, f_k := f(k \cdot \Delta t), \ldots, f_{N-1} := f((N-1) \cdot \Delta t).$$

> **Merk op:** Het feit dat we steeds met $t_0 = 0$ beginnen is geen echte beperking, want we kunnen door een verschuiving in het tijdsdomein steeds ervoor zorgen dat de eerste meting op het tijdstip $t = 0$ plaats vindt.

Met betrekking tot de Fourier transformatie kijkt men nu ook naar een discrete versie van de Fourier getransformeerde in het frequentiedomein. We hebben N metingen met een afstand van Δt, dus metingen over een tijdsinterval van $T = N \cdot \Delta t$. Het beste dat we zouden kunnen verwachten is dat de functie $f(t)$ periode T heeft, want dan kunnen we elke functiewaarde $f(t)$ identificeren met een functiewaarde in het interval $[0, T]$ en vervolgens deze functiewaarde door de dichtstbij liggende meting benaderen.

Als we nu eens veronderstellen, dat $f(t)$ inderdaad periodiek met periode T is, dan kunnen we $f(t)$ in een Fourier reeks $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ ontwikkelen waarbij $\omega = \frac{2\pi}{T}$ de grondfrequentie is.

De naburige frequenties die een rol in de Fourier reeks van $f(t)$ spelen, hebben dus een verschil van $\frac{2\pi}{T}$ en dit interpreteren we als *afstand* $\Delta\omega$ van de frequenties waarover we informatie uit $f(t)$ kunnen halen.

Dit idee veralgemenen we nu naar functies $f(t)$ die niet periodiek zijn en definiëren de discrete frequenties ω_j door $\omega_j := j \cdot \Delta\omega = j \cdot \frac{2\pi}{T}$. Tenslotte beslissen we nog dat het aantal discrete waarden in het frequentiedomein even groot moet zijn als het aantal tijdstippen in het tijdsdomein, dus juist N. Het interval in het frequentiedomein dat we zo overdekken is $N \cdot \Delta\omega = \frac{2\pi N}{T} = \frac{2\pi}{\Delta t}$.

Definitie: Een *discretisering* van een functie $f(t)$ op N tijdstippen t_k met afstand Δt is gegeven door de functiewaarden

$$f_k := f(t_k) = f(k \cdot \Delta t) \text{ met } t_k := k \cdot \Delta t \text{ voor } k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Voor de discretisering in het frequentiedomein zij

$$T := N \cdot \Delta t \text{ en } \Delta\omega := \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{N} \cdot \frac{2\pi}{\Delta t},$$

dan zijn de discrete frequenties ω_j gegeven door

$$\omega_j := j \cdot \Delta\omega = j \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{j}{N} \cdot \frac{1}{\Delta t} \text{ voor } j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Door deze definities krijgen we in het bijzonder de relatie

$$N \cdot \Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi$$

die zegt dat we bij een constant aantal N van metingen een kleinere tijdelijke afstand Δt in het tijdsdomein moeten compenseren door een grotere afstand $\Delta\omega$ in het frequentiedomein, en andersom.

10.2 De discrete Fourier transformatie

In analogie met de Fourier reeks en de Fourier transformatie proberen we nu de waarden $f(t_k)$ op de discrete tijdstippen $t_k = k \cdot \Delta t$ te beschrijven door informatie voor de frequenties $\omega_j = j \cdot \Delta\omega$ in het frequentie domein. Als $f(t)$ een periodieke functie met periode T en $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ was, konden we $f_k = f(t_k)$ schrijven als

$$f_k = f(t_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\Delta\omega t_k}.$$

Aan de andere kant geldt voor de Fourier transformatie dat

$$f_k = f(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iut_k}\, du.$$

Bij de discretisering moeten we ons beperken tot informatie over de discrete frequenties $\omega_j = j \cdot \Delta\omega$ voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$, dus moeten we de Fourier reeks en de Fourier transformatie als volgt veranderen:

- In de Fourier reeks kan j alleen maar van 0 tot $N-1$ lopen.

- De integraal in de Fourier transformatie moet vertaald worden naar een som over de termen e^{iut_k} met $u = \omega_j = j\Delta\omega$ voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Uit beide invalshoeken komen we tot de conclusie dat we $f_k = f(t_k)$ moeten schrijven als lineaire combinatie van de termen

$$e^{i(j\Delta\omega)t_k} = e^{i(j\Delta\omega)(k\Delta t)} = e^{ijk\Delta\omega\Delta t}$$

met *geschikte coëfficiënten* F_j voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Dit geeft al de formele opzet voor de discrete Fourier transformatie, preciezer gezegd voor de inverse discrete Fourier transformatie, namelijk

$$f_k = f(t_k) := f(k \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \, e^{ij\Delta\omega t_k} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \, e^{ijk\Delta\omega\Delta t}.$$

Hierbij is de factor $\frac{1}{N}$ net als bij de Fourier reeks en de Fourier transformatie een normeringsfactor die enigszins willekeurig op de Fourier transformatie en de inverse Fourier transformatie opgedeeld zal moeten worden.

De vraag is nu hoe we de coëfficiënten F_j kunnen bepalen. Hiervoor zijn er verschillende mogelijkheden, die gelukkig alle tot hetzelfde resultaat lijden namelijk:

$$F_j = \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \, e^{-i\,j\Delta\omega\,l\Delta t}.$$

Als we dit in de boven aangegeven formule voor de inverse discrete Fourier transformatie invullen, krijgen we de discrete versie van de Fourier integraal formule en dit geeft aanleiding tot het volgende resultaat over de discrete Fourier transformatie:

Discrete Fourier transformatie

De *discrete Fourier integraal formule* luidt

$$f_k = f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \, e^{-i\,j\Delta\omega\,t_l} \right) e^{i\,j\Delta\omega\,t_k}.$$

De *discrete Fourier transformatie* is gegeven door

$$F_j = \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \, e^{-i\,j\Delta\omega\,t_l} = \sum_{l=0}^{N-1} f_l \, e^{-i\,jl\,\Delta\omega\,\Delta t}$$

en de *discrete inverse Fourier transformatie* door

$$f_k = f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \, e^{i\,j\Delta\omega\,t_k} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \, e^{i\,jk\,\Delta\omega\,\Delta t}.$$

Merk op: Vaak wordt een gesampelde functie en zijn discrete Fourier transformatie gewoon als rij van waarden aangegeven, bijvoorbeeld in de vorm

$$\{f_0, \ldots, f_k, \ldots, f_{N-1}\} \quad \text{en} \quad \{F_0, \ldots, F_j, \ldots, F_{N-1}\}.$$

Voor de geïnteresseerde lezer geven we nu drie manieren aan, hoe dit resultaat afgeleid kan worden:

(1) middels projecties op een orthogonaal stelsel van functies;

(2) middels trigonometrische interpolatie;

(3) middels de Dirac δ-functie.

Afleiding middels een orthogonaal stelsel van functies

Het idee bij de Fourier reeks en bij de Fourier transformatie was in principe, een orthogonaal stelsel van functies (met betrekking tot een geschikt inproduct) te kiezen en de orthogonale projecties van de functie $f(t)$ op deze functies te berekenen. Iets soortgelijks gebeurt in principe ook bij de discrete Fourier transformatie. Als de tijdstippen $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}$ vast gekozen zijn, kunnen we een inproduct voor complexe functies definiëren door

$$\langle f(t), g(t)\rangle := \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \cdot \overline{g(t_k)}.$$

We laten nu zien dat de functies $e^{ij\Delta\omega t}$ voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$ een orthogonaal stelsel met betrekking tot dit inproduct vormen.

Hulpstelling: Door uitschrijven van het product ziet men algemeen dat

$$(1-a)(1+a+a^2+\ldots+a^{N-1}) = 1-a^N$$

en hieruit volgt dat

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = 1+a+a^2+\ldots+a^{N-1} = \begin{cases} \frac{1-a^N}{1-a} & \text{als} \quad a \neq 1 \\ N & \text{als} \quad a = 1 \end{cases}$$

Deze hulpstelling passen we nu op het inproduct van de functies $e^{ij\Delta\omega t}$ en $e^{il\Delta\omega t}$ toe, er geldt:

$$\langle e^{ij\Delta\omega t}, e^{il\Delta\omega t}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} e^{ij\Delta\omega t_k} \cdot e^{-il\Delta\omega t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(j-l)\Delta\omega t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t})^k.$$

Merk op dat we $\Delta\omega$ zo hebben gekozen dat $\Delta\omega\Delta t \cdot N = 2\pi$, dus $\Delta\omega\Delta t = \frac{2\pi}{N}$. Hieruit volgt dat

$$(e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t})^N = e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t N} = (e^{2\pi i})^{j-l} = 1.$$

Aan de andere kant is

$$e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t} = e^{i(j-l)\frac{2\pi}{N}} = e^{2\pi i \frac{j-l}{N}} \begin{cases} \neq 1 & \text{als} \quad j \neq l \\ = 1 & \text{als} \quad j = l \end{cases}$$

omdat j en l van 0 tot $N-1$ lopen en dus $j-l$ nooit een veelvoud van N kan zijn. Bij elkaar genomen volgt hieruit met de hulpstelling dat

$$\langle e^{ij\Delta\omega t}, e^{il\Delta\omega t}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t})^k = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad j \neq l \\ N & \text{als} \quad j = l. \end{cases}$$

Net als bij de Fourier reeks vinden we nu coëfficiënten c_j met $f(t_k) = \sum_{j=0}^{N-1} c_k e^{ij\Delta\omega t_k}$ door

$$c_j = \frac{\langle f(t), e^{ij\Delta\omega t}\rangle}{\langle e^{ij\Delta\omega t}, e^{ij\Delta\omega t}\rangle} = \frac{1}{N}\langle f(t), e^{ij\Delta\omega t}\rangle$$

dus is de coëfficiënt F_j van $e^{ij\Delta\omega t_k}$ in $f(t_k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{ij\Delta\omega t_k}$ gegeven door

$$F_j = \langle f(t), e^{ij\Delta\omega t}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-ijk\,\Delta\omega\,\Delta t}.$$

Als controle vullen we dit eens in:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{ij\Delta\omega t_k} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) e^{-ij\Delta\omega t_l} \right) e^{ij\Delta\omega t_k} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) e^{-ij\Delta\omega l\Delta t} \right) e^{ij\Delta\omega k\Delta t} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \left(\sum_{j=0}^{N-1} e^{ij\Delta\omega(k-l)\Delta t} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \left(\sum_{j=0}^{N-1} (e^{i(k-l)\Delta\omega\Delta t})^j \right) \\
&= f(t_k) \cdot N.
\end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we weer de hulpstelling toegepast die zegt dat de som $\sum_{j=0}^{N-1}(e^{i(k-l)\Delta\omega\Delta t})^j$ alleen maar voor $l = k$ ongelijk aan 0 is en in dit geval de waarde N heeft. Van de som over l blijft dus alleen maar de term voor $l = k$ over en hiervoor krijgen we juist de waarde $f(t_k) \cdot N$.

Motivatie middels trigonometrische interpolatie

Een alternatieve formulering van deze toegang tot de discrete Fourier transformatie zit in de *trigonometrische interpolatie*. We weten dat er voor N verschillende x-waarden $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ met bijhorende y-waarden $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$ een eenduidige veelterm $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{N-1}x^{N-1}$ van graad $N-1$ bestaat, zo dat $p(x_k) = y_k$ voor alle $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Met noemt $p(x)$ de interpolatie van de gegeven punten, omdat de grafiek van $p(x)$ de punten (x_k, y_k) verbindt. Het idee achter het bewijs is simpel: De N paren van $x-y$-waarden geven N lineaire vergelijkingen voor de N coëfficiënten van $p(x)$, en omdat de functies

x^j lineair onafhankelijk zijn, heeft het bijhorende stelsel lineaire vergelijkingen een eenduidige oplossing.

Als men nu de functies $x^0, \ldots, x^j, \ldots$ door de functies $(e^{i\omega x})^0, \ldots, (e^{i\omega x})^j, \ldots$ vervangt die ook lineair onafhankelijk zijn, krijgt men een analoge uitspraak voor de interpolatie met behulp van deze functies. Wegens de relatie $e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i\sin(\omega x)$ spreekt men hierbij van *trigonometrische interpolatie*.

We noemen nu de variabel x weer t en vervangen ω door $\Delta\omega$, dan luidt het idee, de functie $f(t)$ te benaderen door de trigonometrische interpolatie $\tilde{f}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij\Delta\omega t}$ die gedefinieerd is door de eigenschappen dat $\tilde{f}(t_k) = f(t_k)$ voor $k = 0, \ldots N-1$. Als men hierop de orthogonaliteitsrelaties voor de functies $e^{ij\Delta\omega t}$ toepast, vindt men weer dat de coëfficiënten c_j voldoen aan

$$c_j = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ijk\Delta\omega\Delta t}.$$

Motivatie middels Dirac δ-functie

Omdat we bij de Fourier transformatie de Dirac δ-functie behandeld hebben, kunnen we nog een andere motivatie voor de coëfficiënten van de discrete Fourier transformatie geven die hierop gebaseerd is.

We weten van de functie $f(t)$ alleen maar de waarden die we op de tijdstippen $t_k = k \cdot \Delta t$ voor $k = 0, 1, \ldots, N-1$ gemeten hebben, dus de functiewaarden $f_k = f(t_k)$. We vervangen de functie $f(t)$ nu door de gesampelde functie

$$f_s(t) := \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \cdot \delta(t - t_k)$$

die uit (oneindige) spitsen op de tijdstippen t_k bestaat die de gemeten waarden $f(t_k)$ als gewichten hebben. De gesampelde functie heeft de eigenschap dat $\int_{-\infty}^{\infty} f_s(t)\ dt = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)$ en dat de relatieve intensiteiten van de spitsen evenredig zijn met de gemeten functiewaarden.

Voor de functie $f_s(t)$ kunnen we de Fourier getransformeerde makkelijk berekenen, dit is

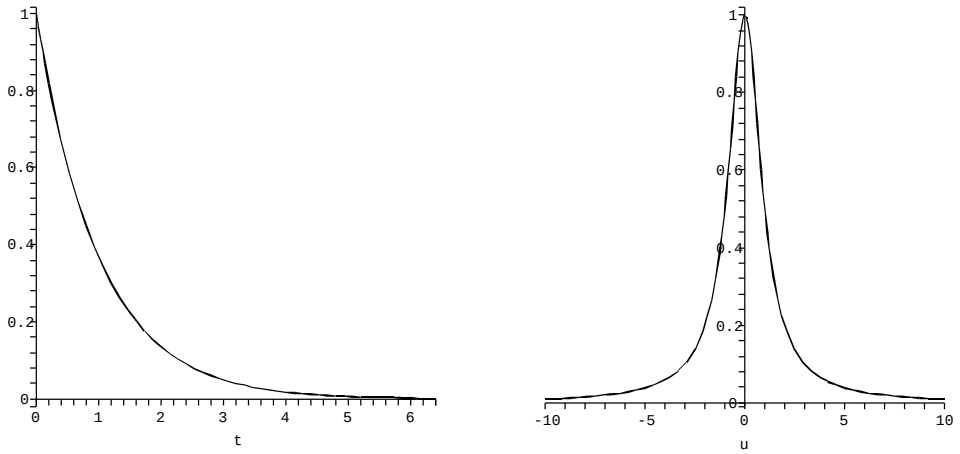
$$F_s(u) = \mathcal{F}[f_s(t)] = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-iut_k}.$$

Als we de functiewaarden van $F_s(u)$ nu voor de discrete frequenties $u = \omega_j = j \cdot \Delta\omega$ bepalen, krijgen we

$$F_s(\omega_j) = f(t_k) e^{-ij\Delta\omega t_k} = F_j$$

dus de functiewaarden van de Fourier getransformeerde van de gesampelde functie op de discrete frequenties ω_j zijn precies de coëfficiënten van de discrete Fourier transformatie. Boven hebben we al gezien hoe we de discrete functiewaarden $f(t_k)$ uit de discrete waarden $F_s(\omega_j) = F_j$ van de Fourier getransformeerde kunnen reproduceren, namelijk juist met de discrete inverse Fourier transformatie.

10.3 Voorbeeld van een discrete Fourier transformatie



Figuur II.23: Exponentiële afname $f(t) = e^{-t}$ met Fourier getransformeerde.

We gaan nu eens een voorbeeld van een discrete Fourier transformatie bekijken. Hiervoor kiezen we de functie

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t} & \text{als} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{als} \quad t < 0 \end{cases}$$

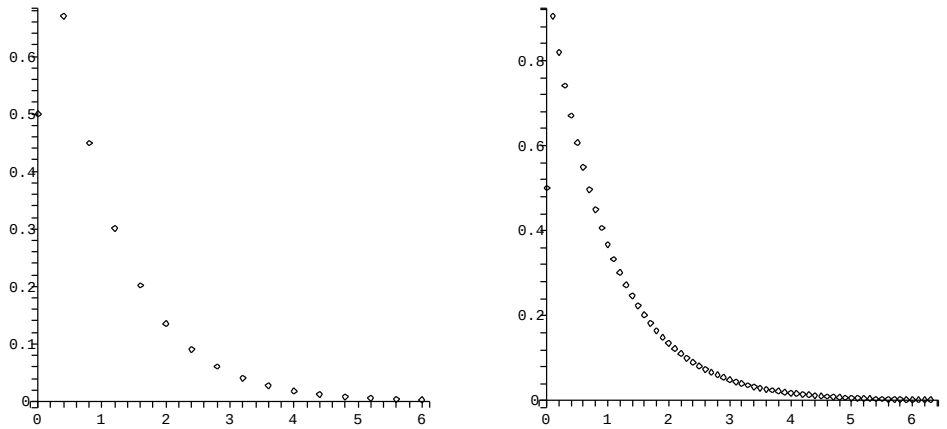
die een exponentiële afname beschrijft. De Fourier getransformeerde van $f(t)$ hebben we al eerder bepaald, er geldt

$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{1+iu} \quad \text{met} \quad \Re(F(u)) = \frac{1}{1+u^2}.$$

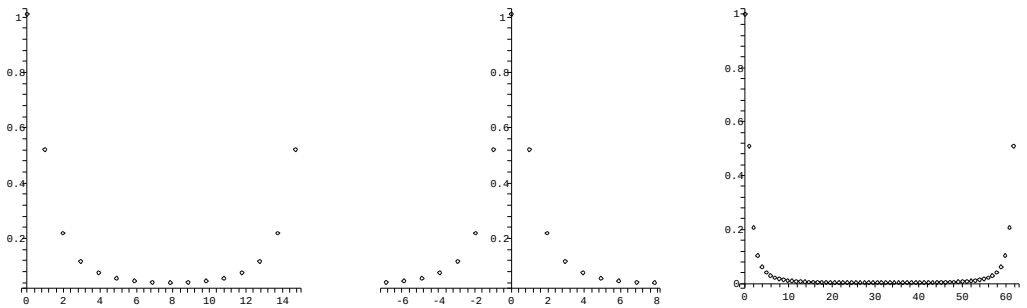
We sampeln de functie $f(t)$ op twee manieren: Een keer met $N = 16$ punten op een afstand van $\Delta t = 0.4$ en een keer met $N = 64$ punten op een afstand van $\Delta t = 0.1$. Dit is in Figuur II.24 te zien. Merk op dat de t-as net zo geschald is als bij de continue versie, dus met $k \cdot \Delta t$. In beide gevallen is $N \cdot \Delta t = 6.4$ en dus $\Delta\omega = \frac{2\pi}{6.4}$. In het eerste geval is $T = N \cdot \Delta\omega = 5\pi$, in het tweede geval is $N \cdot \Delta\omega = 20\pi$, we overdekken dus bij een sampling met vier keer zo veel punten over hetzelfde tijdsinterval $[0, T]$ een vier keer zo groot interval in het frequentie domein.

Als we het linker en het rechter plaatje in Figuur II.25 met de continue Fourier getransformeerde vergelijken, zien we dat we de discrete Fourier transformatie iets anders moeten interpreteren. Eigenlijk hoort namelijk (net zo als bij de Fourier reeks) bij elke coëfficiënt F_j met $j > 0$ ook een coëfficiënt met $j < 0$. Deze vinden we als volgt: We kunnen de definitie

$$F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega k\Delta t}$$



Figuur II.24: Discretisering van een exponentiële afname met 16 (links) en 64 punten (rechts).



Figuur II.25: Discrete Fourier transformatie van een exponentiële afname gesampeld met 16 (links en midden) en 64 punten (rechts).

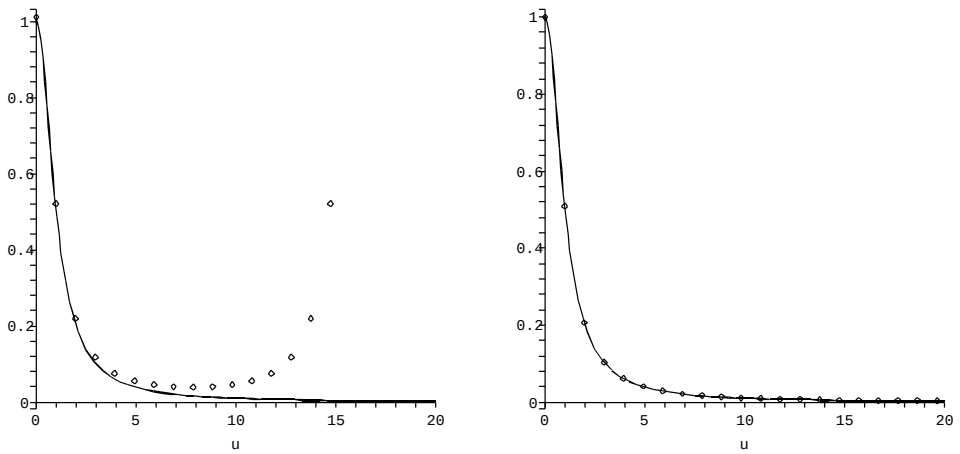
ook lezen voor j buiten het interval $[0 \dots N-1]$, en omdat $\Delta\omega\Delta t \cdot N = 2\pi$ en dus $e^{-iN\Delta\omega\Delta t} = 1$ is, geldt

$$F_{j+N} = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i(j+N)\Delta\omega k\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} = F_j.$$

In het bijzonder betekent dit dat $F_{-j} = F_{N-j}$ en we moeten de coëfficiënten $F_{\frac{N}{2}}, \dots, F_{N-1}$ dus eigenlijk lezen als de coëfficiënten $F_{-\frac{N}{2}}, \dots, F_{-1}$.

Voor het gemak laten we in de plaatjes niettemin j van 0 tot $N-1$ lopen en denken ons bij het vergelijken met de continue Fourier transformatie het plaatje van de discrete Fourier getransformeerde in het midden door geknipt en de rechter helft van het plaatje links aan de linker helft geplakt. De zo veranderde versie van de discrete Fourier transformatie met 16 punten is in het middelste plaatje van Figuur II.25 te zien.

Ten slotte vergelijken we de discrete Fourier transformatie met de continue. In Figuur II.26 zijn de waarden van de coëfficiënten F_j als punten naast de grafiek van de continue Fourier getransformeerde $F(u)$ te zien. Ook in dit geval is de u-as zo geschald, dat de coëfficiënt F_j op de frequentie $u = j \cdot \Delta\omega$ terecht komt. Het is duidelijk dat bij een sampling met te grote tijdsintervallen de discrete Fourier getransformeerde al snel (en duidelijk voor de helft van de sampling frequenties) behoorlijk van de continue Fourier getransformeerde afwijkt. Een verhoging van het aantal metingen op hetzelfde tijdsinterval lijdt echter tot een duidelijk verbeterde benadering. Merk op dat in het rechter plaatje niet eens de helft van de 64 discrete frequentie waarden afgebeeld zijn.



Figuur II.26: Vergelijk van continue en discrete Fourier transformatie van de exponentiële afname.

10.4 Eigenschappen van de discrete Fourier transformatie

In principe heeft de discrete Fourier transformatie dezelfde eigenschappen als de gewone Fourier transformatie. Om deze aan te geven, houden we de volgende notaties aan:

Zij $f(t)$ een functie, die we op N punten $t_k = k \cdot \Delta t$ met een tijdelijke afstand van Δt sampeln. We definiëren $f_k := f(t_k)$, dan zijn voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$ de coëfficiënten F_j van de discrete Fourier getransformeerde van $f(t)$ voor de frequenties $j \cdot \Delta\omega$ gegeven door $F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t}$. Hierbij geldt $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t}$ en dus $\Delta\omega\Delta t = \frac{2\pi}{N}$.

Voor verdere functies $g(t)$ en $h(t)$ nemen we aan dat deze met dezelfde N en Δt gediscretiseerd zijn en de waarden $g_k = g(t_k)$ en $h_k = h(t_k)$ hebben. De discrete Fourier getransformeerden van deze functies geven we met G_j en H_j aan.

Lineariteit

Omdat we functies puntsgewijs optellen, is de discrete Fourier getransformeerde van $f_k + g_k$ gelijk aan $F_j + G_j$.

Analoog geldt voor de vermenigvuldiging met een factor, dat $a \cdot f_k$ de discrete Fourier getransformeerde $a \cdot F_j$ heeft.

Verschuiving

Als de sampling waarden g_k van $g(t)$ om l posities tegenover de sampling waarden van $f(t)$ verschoven zijn, dus als $g_k = f_{k-l}$ is, dan geldt

$$G_j = F_j\, e^{-ijl\Delta\omega\Delta t} = F_j\, e^{-i\frac{2\pi}{N}jl},$$

waarbij we met F_j en G_j de discrete Fourier getransformeerden van f_k en g_k noteren. Dit gaat men als volgt na:

$$\begin{aligned} G_j &= \sum_{k=0}^{N-1} f_{k-l}\, e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} = \sum_{k=l}^{l+N-1} f_{k-l}\, e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-ij\Delta\omega(k+l)\Delta t} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-ij\Delta\omega k\Delta t}\right) e^{-ij\Delta\omega l\Delta t} = F_j\, e^{-ijl\Delta\omega\Delta t}. \end{aligned}$$

Op een soortgelijke manier laat zich aantonen (zie opgaven), dat voor een verschoven functie $G_j = F_{j-l}$ in het frequentiedomein geldt, dat de discrete inverse Fourier getransformeerde g_k van G_j uit de getransformeerde f_k van F_j wordt verkregen door

$$g_k = f_k\, e^{ikl\Delta\omega\Delta t} = f_k\, e^{i\frac{2\pi}{N}kl}.$$

Convolutie

Het convolutieproduct $h_k = f_k * g_k$ van twee gediscretiseerde functies f_k en g_k is juist zo gedefinieerd als of f_k en g_k de coëfficiënten van de term x^k in twee veeltermen zijn en h_k de coëfficiënt van de term x^k in het product van deze veeltermen is. Dit geeft voor het convolutieproduct de definitie

$$h_k := \sum_{l=0}^{N-1} f_l\, g_{k-l} =: f_k * g_k.$$

In deze formule moeten we voor de coëfficiënten g_{k-l} met index $k - l < 0$ de coëfficiënt g_{k-l} met g_{N+k-l} identificeren, dus we moeten N bij de index optellen. We waren namelijk bij de definitie van de discrete Fourier transformatie ervan uit gegaan dat de gediscretiseerde functie periodiek met periode $T = N \cdot \Delta t$ is.

De belangrijke eigenschap van het convolutieproduct is nu net als in het continue geval, dat de discrete Fourier getransformeerde H_j van het convolutieproduct $h_k = f_k * g_k$ gelijk is aan het gewone product $F_j \cdot G_j$ van de discrete Fourier getransformeerden van f_k en g_k, dus dat

$$H_j := \sum_{k=0}^{N-1} h_k\, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f_l\, g_{k-l}\right) e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} = F_j \cdot G_j$$

voor $F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t}$ en $G_j = \sum_{k=0}^{N-1} g_k\, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t}$. Dit ziet men als volgt in:

$$\begin{aligned}
H_j &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k\, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} f_l\, g_{k-l}\, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} f_l\, e^{-ijl\Delta\omega\Delta t}(\sum_{k=0}^{N-1} g_{k-l}\, e^{-ij(k-l)\Delta\omega\Delta t}) \\
&=_{k'=k-l} (\sum_{l=0}^{N-1} f_l\, e^{-ijl\Delta\omega\Delta t})(\sum_{k'=0}^{N-1} g_{k'}\, e^{-ijk'\Delta\omega\Delta t}) \\
&= F_j \cdot G_j.
\end{aligned}$$

In de voorlaatste stap maken we hierbij gebruik ervan dat de gesampelde waarden periodiek met periode N zijn, dus dat $g_k = g_{k+N}$ is. Hiermee volgt dat met k ook $k-l$ over alle waarden van 0 t/m $N-1$ loopt.

Op een soortegelijke manier (zie opgaven) laat zich aantonen dat het gewone product in het tijdsdomein met het convolutieproduct in het frequentiedomein correspondeert, hierbij komt echter nog een factor N te voorschijn. Voor gediscretiseerde functies f_k en g_k met discrete Fourier transformaties F_j en G_j geldt dat het gewone product $h_k := f_k \cdot g_k$ de getransformeerde $H_j = \frac{1}{N} F_j * G_j$ heeft, dus dat

$$H_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_k\, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} = \frac{1}{N} F_j * G_j = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} F_l\, G_{j-l}.$$

10.5 Snelle (discrete) Fourier transformatie (FFT)

Om bij een gesampelde functie $(f_0, \ldots, f_{N-1})$ de coëfficiënten F_j van de discrete Fourier transformatie te berekenen, zijn er voor elke coëfficiënt N vermenigvuldigingen nodig, voor alle coëfficiënten dus N^2 vermenigvuldigingen. Bij een typische waarde van bijvoorbeeld $N = 1024$ is dit al behoorlijk veel rekenwerk, omdat bij veranderlijke signalen vaak opnieuw gesampeld moet worden.

Een nauwkeurige analyse van het rekenwerk laat immers zien, dat men door een slimme opzet het rekenwerk behoorlijk kan reduceren, namelijk tot $N \cdot {}^2\log(N)$ in plaats van N^2 vermenigvuldigingen. Deze manier om de discrete Fourier transformatie uit te rekenen noemt men *snelle Fourier transformatie*, afgekort met *FFT* voor *fast Fourier transformation*. Bij $N = 1024$ scheelt de FFT bijvoorbeeld een factor van $\frac{N}{{}^2\log(N)} = \frac{1024}{10} \approx 100$ in het rekenwerk.

We gaan vanaf nu ervan uit dat N even is (meestal is zelfs $N = 2^m$ een macht van 2) en definiëren

$$z := e^{-i\Delta\omega\Delta t} = e^{-i\frac{2\pi}{N}}.$$

Merk op: Wegens $z^N = e^{-2\pi i} = 1$ geldt dat $z^{jk} = z^{j(k+N)}$.

Met deze notatie ziet de discrete Fourier transformatie er zo uit:

$$F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^{jk}$$

en dit laat zich ook met een matrix schrijven, namelijk als

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^{N-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z^{N-1} & z^{2(N-1)} & \dots & z^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Een coëfficiënt F_{2j} met even index schrijven we nu iets anders, want voor $k' \geq \frac{N}{2}$ kunnen we k' schrijven als $k' = k + \frac{N}{2}$, dan is

$$f_{k'} z^{2jk'} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2j(k+\frac{N}{2})} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2jk} z^{jN} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2jk}.$$

Hieruit volgt voor coëfficiënten met even index:

$$F_{2j} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^{2jk} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_k + f_{k+\frac{N}{2}}) z^{2jk}.$$

Op een soortgelijke manier behandelen we ook de coëfficiënten F_{2j+1} met oneven index. Voor $k' \geq \frac{N}{2}$ schrijven we weer $k' = k + \frac{N}{2}$, dan is

$$f_{k'} z^{(2j+1)k'} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{(2j+1)(k+\frac{N}{2})} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2jk} z^k z^{jN} z^{\frac{N}{2}} = -f_{k+\frac{N}{2}} z^k z^{2jk},$$

want $z^{\frac{N}{2}} = e^{-\pi i} = -1$. Hieruit volgt voor coëfficiënten met oneven index:

$$F_{2j+1} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^{(2j+1)k} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_k - f_{k+\frac{N}{2}}) z^k z^{2jk}$$

Met behulp van deze formules kunnen we de coëfficiënten met even en oneven indices apart door matrices beschrijven, het aardige daarbij is dat de matrices nu alleen maar nog half zo groot zijn, dus $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ in plaats van $N \times N$:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & \dots & (z^2)^{\frac{N}{2}-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z^{N-2} & z^{2(N-2)} & \dots & (z^2)^{(\frac{N}{2}-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 + f_{\frac{N}{2}} \\ f_1 + f_{1+\frac{N}{2}} \\ \vdots \\ f_{\frac{N}{2}-1} + f_{N-1} \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & \dots & (z^2)^{\frac{N}{2}-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z^{N-2} & z^{2(N-2)} & \dots & (z^2)^{(\frac{N}{2}-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 - f_{\frac{N}{2}} \\ z(f_1 - f_{1+\frac{N}{2}}) \\ \vdots \\ z^{\frac{N}{2}-1}(f_{\frac{N}{2}-1} + f_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Om deze reductie herhaald toe te kunnen passen is het wenselijk dat N een macht van 2 is, dus van de vorm $N = 2^m$. Dit bereikt men meestal door N gewoon zo te kiezen, maar soms ook door aanvullen van de waarden met nullen. Er zijn ook versies van de FFT ontwikkeld, waarbij dit niet nodig is.

Om de methode beter toe te lichten gaan we eens een voorbeeld met $N = 8$ expliciet uitwerken. De berekening die we eigenlijk moeten uitvoeren is

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 & z^5 & z^6 & z^7 \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 & z^8 & z^{10} & z^{12} & z^{14} \\ 1 & z^3 & z^6 & z^9 & z^{12} & z^{15} & z^{18} & z^{21} \\ 1 & z^4 & z^8 & z^{12} & z^{16} & z^{20} & z^{24} & z^{28} \\ 1 & z^5 & z^{10} & z^{15} & z^{20} & z^{25} & z^{30} & z^{35} \\ 1 & z^6 & z^{12} & z^{18} & z^{24} & z^{30} & z^{36} & z^{42} \\ 1 & z^7 & z^{14} & z^{21} & z^{28} & z^{35} & z^{42} & z^{49} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

In de eerste reductiestap gaat dit over in de twee vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 \\ 1 & z^4 & z^8 & z^{12} \\ 1 & z^6 & z^{12} & z^{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 + f_4 \\ f_1 + f_5 \\ f_2 + f_6 \\ f_3 + f_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_5 \\ F_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 \\ 1 & z^4 & z^8 & z^{12} \\ 1 & z^6 & z^{12} & z^{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 - f_4 \\ z(f_1 - f_5) \\ z^2(f_2 - f_6) \\ z^3(f_3 - f_7) \end{pmatrix}$$

en in de tweede stap krijgen we de vier vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 + f_4) + (f_2 + f_6) \\ (f_1 + f_5) + (f_3 + f_7) \end{pmatrix}$$

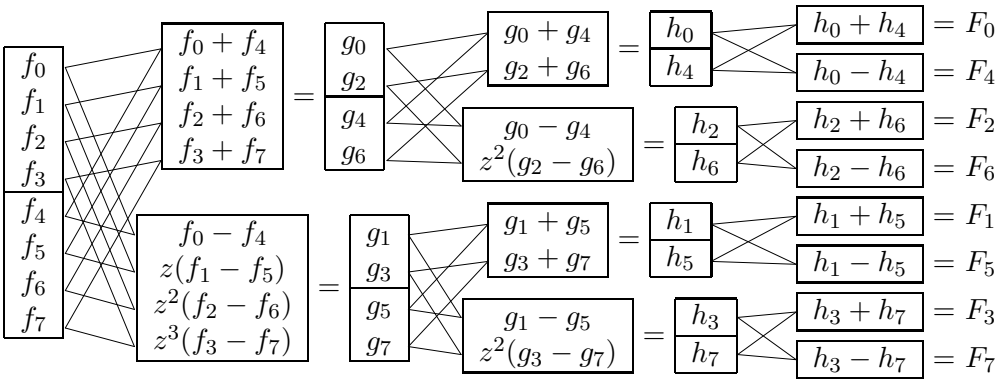
$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 + f_4) - (f_2 + f_6) \\ z^2((f_1 + f_5) - (f_3 + f_7)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 - f_4) + z^2(f_2 - f_6) \\ z(f_1 - f_5) + z^3(f_3 - f_7) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 - f_4) - z^2(f_2 - f_6) \\ z^2(z((f_1 - f_5) - (f_3 - f_7))) \end{pmatrix}$$

De grap is nu dat we dit iets anders uitrekenen, namelijk beginnend met de vector $(f_0, \ldots, f_7)$ de stappen op één vector toepassen, die uiteindelijk (tot op volgorde na) de vector $(F_0, \ldots, F_7)$ wordt. We vermijden zo, dat we uitdrukkingen zo als $(f_0 + f_4)$ of $z(f_1 - f_5)$ die herhaald voorkomen meerdere keren berekenen. Dit gebeurt volgens het schema in Figuur II.27. In de laatste stap maken we hierbij gebruik ervan dat $z^{\frac{N}{2}} = z^4 = -1$.

Merk op dat we de indices van de g_i en h_i zo hebben aangepast dat deze met de goede index van F_i corresponderen. Dit is in de praktijk niet nodig, want de



Figuur II.27: Schema van FFT voor $N = 8$ punten

volgorde van de F_i kunnen we makkelijk achterhalen, als we de indices binair schrijven. De goede volgorde van de F_i krijgen we, door de binaire schrijfwijzen voor de getallen $0, \ldots, N-1$ te spiegelen (d.w.z. van rechts naar links te lezen). Hierbij schrijven we een getal n binair als een keten $n = a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0$ met $a_i \in \{0, 1\}$ zo dat $n = a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$. Bijvoorbeeld schrijven we het getal 42 binair als 101010. Om duidelijk te maken dat een getal een binaire schrijfwijze is, voegt men soms een index 2 aan het getal toe, bijvoorbeeld $42 = 101010_2$.

In het voorbeeld met $N = 8$ krijgen we op deze manier de volgorde van de F_i als volgt:

$$\text{indices} \quad \begin{array}{l} 0 = 000_2 \\ 1 = 001_2 \\ 2 = 010_2 \\ 3 = 011_2 \\ 4 = 100_2 \\ 5 = 101_2 \\ 6 = 110_2 \\ 7 = 111_2 \end{array} \quad \text{van } f_i \text{ worden gespiegeld} \quad \begin{array}{l} 000_2 = 0 \\ 100_2 = 4 \\ 010_2 = 2 \\ 110_2 = 6 \\ 001_2 = 1 \\ 101_2 = 5 \\ 011_2 = 3 \\ 111_2 = 7 \end{array} \quad \text{de indices van } F_i$$

In de praktijk zijn er verschillende manieren om de FFT te implementeren, de meest bekende zijn de *Cooley-Tukey* en de *Sande-Tukey* methode.

In principe heeft pas de ontwikkeling van de FFT de doorbraak van de Fourier transformatie in de signaalverwerking veroorzaakt, want eerder was het berekenen van de Fourier getransformeerde voor interessante toepassingen gewoon ondoenlijk. Inmiddels heeft men overigens achterhaald dat het idee van de FFT al door Gauss werd toegepast.

10.6 Shannon's aftast-theorema

Een belangrijke vraag die we ons bij het sampling van een signaal moeten stellen, is, hoe veel informatie we door het sampling eigenlijk verliezen. In de signaalverwerking komen we dit probleem bijvoorbeeld bij de digitalisering van

analoge signalen tegen, zo als bij een CD-opname van een concert. De vraag is of we het oorspronkelijke signaal uit de digitale informatie, die in de discrete samples zit, kunnen reconstrueren.

In het algemeen is dit natuurlijk onmogelijk, als we maar een keer per seconde een sample hebben kunnen we bijna niets erover zeggen, wat tussendoor gebeurd is. Maar als we met een hogere frequentie sampeln, kunnen we wel verwachten dat we meer informatie terug kunnen vinden.

Intuïtief kunnen we verwachten dat het resultaat ermee te maken heeft, welke frequenties in het signaal voorkomen. Om hoge frequenties te kunnen reconstrueren, moeten we zeker ook met een hogere frequentie sampeln. Hoe het hiermee precies zit, zegt het *aftast-theorema* dat door Claude E. Shannon 1949 werd bewezen. Hierbij gaat het om signalen met een begrensde *bandbreedte*, d.w.z. om signalen waarin alleen frequenties uit een begrensd interval een rol spelen. In de taal van de Fourier transformatie kunnen we dit zo uitdrukken, dat de Fourier getransformeerde van het signaal alleen maar op een begrensd interval ongelijk aan 0 is.

Het concept van begrensde bandbreedte is iets redelijk gewoons, het meest belangrijke voorbeeld is het menselijke oor, dat bij kinderen frequenties tot hooguit 25000 Hz kan verwerken en bij oudere mensen al bij frequenties van 12000 - 15000 Hz ophoudt. Om deze reden zijn ook de meeste HiFi-toestellen zo gebouwd, dat ze alleen maar frequenties tussen 20 Hz en 25 kHz verwerken. Nog beperkter is de bandbreedte van de telefoon, hier worden alleen maar frequenties tussen 300 Hz en 3500 Hz over gebracht.

Het *aftast-theorema* van Shannon beweert nu dat we een signaal minstens met de dubbele frequentie moeten sampeln die in het signaal een rol speelt:

Shannon's aftast-theorema (sampling/scanning theorem):
Zij $f(t)$ een signaal met Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ waarvoor geldt dat $F(u) = 0$ voor alle u met $|u| > u_m = 2\pi f_m$.

Als voor het aftast-interval Δt en de aftast-frequentie $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$ geldt dat

$$\omega \geq 2u_m \text{ en dus } \Delta t \leq \frac{1}{2f_m},$$

dan laat zich het signaal $f(t)$ volledig uit de discrete samples $f_k := f(k \cdot \Delta t)$ met $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ reconstrueren.

De minimale frequentie $2f_m$ heet ook de *Nyquist-frequentie*, het interval $\Delta t = \frac{1}{2f_m}$ het *Nyquist-interval*. Let op dat er in de literatuur verschillende definities voor de Nyquist-frequentie en het Nyquist-interval gegeven worden, die soms om de factor 2 van elkaar afwijken.

Voor een CD-opname met een bandbreedte van 22 kHz hebben we dus een sampling frequentie van minstens 44 kHz nodig, terwijl voor een telefoon gesprek een sampling frequentie van 8 kHz voldoende is.

Reconstructie van een signaal van uit gesampelde waarden

De interessante vraag is nu, hoe we een continu signaal $f(t)$ uit de discrete waarden f_k kunnen reconstrueren. De oplossing hiervoor is heel simpel, we maken gewoon een interpolatie van continue functies van een bepaalde vorm, te weten functies van de vorm $\frac{\sin(x)}{x}$, die we als Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls al eerder zijn tegengekomen.

Er laat zich aantonen dat men onder de voorwaarde van Shannon's aftasttheorema het oorspronkelijke signaal $f(t)$ terug vindt met behulp van de formule

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t)\frac{\sin(\frac{\omega}{2}(t-k\Delta t))}{\frac{\omega}{2}(t-k\Delta t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\,\frac{\sin(\frac{t}{\Delta t}\pi - k\pi)}{\frac{t}{\Delta t}\pi - k\pi}.$$

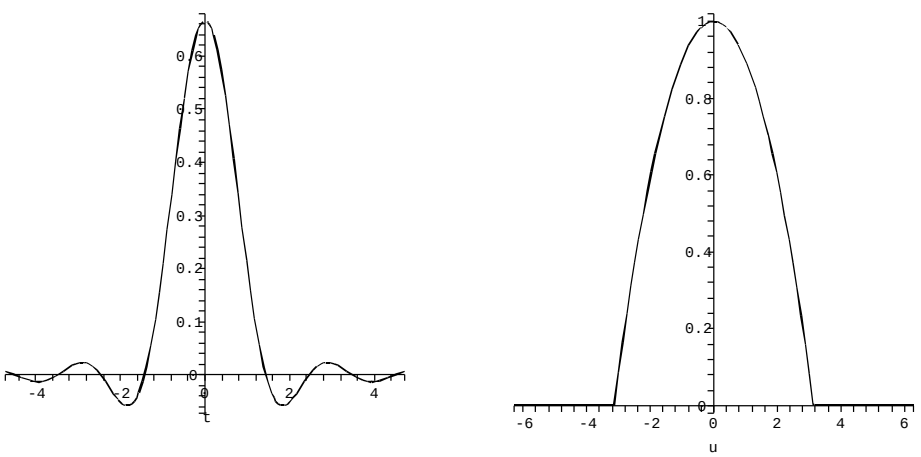
We gaan het proces van sampling en interpolatie aan een voorbeeld bekijken. Als functie nemen we

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi t) - 2\pi t\cos(\pi t)}{\pi^3 t^3}$$

dan heeft $f(t)$ de Fourier getransformeerde

$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \begin{cases} 1-(\frac{u}{\pi})^2 & \text{als} \quad |u| \le \pi \\ 0 & \text{als} \quad |u| > \pi. \end{cases}$$

De functie $f(t)$ is natuurlijk verkregen als inverse Fourier transformatie van een functie die alleen maar op een eindig interval ongelijk aan 0 is. In Figuur II.28 zijn de grafieken van $f(t)$ en $\mathcal{F}[f(t)]$ te zien.



Figuur II.28: Functie met Fourier getransformeerde van begrensde bandbreedte.

Als we $f(t)$ met tijdelijke afstanden van Δt sampeln, krijgen we de discrete waarden $f_k = f(k \cdot \Delta t) = f(t_k)$. De discrete functiewaarden f_k beschrijven we nu door de *sampling functie* van $f(t)$, namelijk

$$f_s(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k\,\delta(t-t_k)$$

die op de tijdstippen t_k Dirac δ-functies met intensiteit $f_k = f(t_k)$ heeft.

We berekenen nu eerst de Fourier getransformeerde van de speciale functie $\text{Ш}(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k)$: De functie $\text{Ш}(t)$ is periodiek met periode Δt en heeft dus een Fourier reeks van de vorm

$$\text{Ш}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \text{ waarbij } \omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \text{ is.}$$

Voor de coëfficiënten c_k geldt

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \text{Ш}(t) e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t) e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{1}{\Delta t}.$$

Hieruit volgt dat

$$\text{Ш}(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega t}.$$

Uit de vorige les weten we dat de functie $e^{ik\omega t}$ de Fourier getransformeerde $2\pi\delta(u - k\omega)$ heeft, bij elkaar genomen volgt hieruit (met nog steeds $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$):

$$\mathcal{F}[\text{Ш}(t)] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(u - k\omega) = \omega \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega).$$

Omdat $f_s(t) = \text{Ш}(t) \cdot f(t)$ is, kunnen we de Fourier getransformeerde $F_s(u)$ van de gesampelde functie $f_s(t)$ nu met behulp van een convolutieproduct berekenen, waarbij we met $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ de Fourier getransformeerde van $f(t)$ noteren:

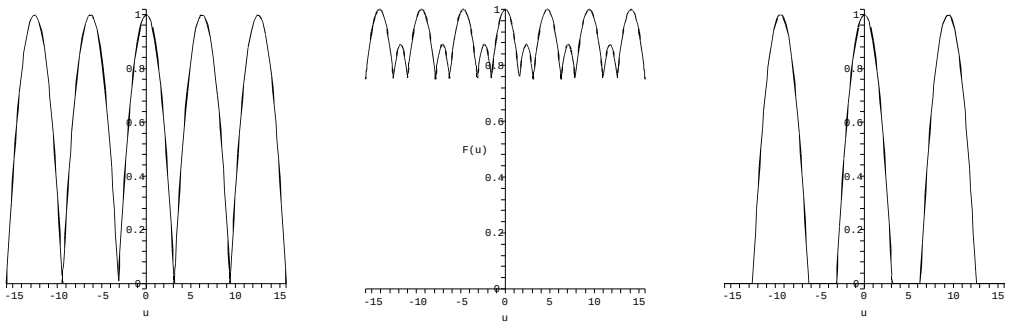
$$\begin{aligned} F_s(u) := \mathcal{F}[f_s(t)] &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\text{Ш}(t)] * \mathcal{F}[f(t)] = \left(\frac{\omega}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega) \right) * F(u) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega) * F(u) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(u - k\omega) \end{aligned}$$

omdat $\delta(u - k\omega) * F(u) = F(u - k\omega)$.

Dit betekent dat zich bij $F_s(u)$ de functie $F(u)$ (geschaald met een factor $\frac{1}{\Delta t}$) periodiek met periode ω herhaald.

Als we nu $F(u)$ uit $F_s(u)$ zouden kunnen reconstrueren, dan kunnen we met behulp van de inverse Fourier transformatie ook $f(t)$ weer reconstrueren. Hier is het punt waar de Nyquist-frequentie in het spel komt: Als de periodieke herhalingen van $F(u)$ niet overlappen, dan kunnen we $F(u)$ door vermenigvuldiging met een rechthoek-filter functie terug vinden. Hiervoor hebben we nodig, dat $\omega \geq 2u_m$, want dit is de lengte van het interval waarop $F(u) \neq 0$ is, en dit is precies de voorwaarde die in Shannon's aftast-theorema gegeven wordt.

De plaatjes in Figuur II.29 laten de effecten van verschillende aftast frequenties op de Fourier getransformeerde $F_s(u)$ zien. In het linker plaatje wordt



Figuur II.29: Effect van verschillende aftast frequenties op de Fourier getransformeerde: aftasten met Nyquist-frequentie (links), undersampling (midden) en oversampling (rechts).

precies met de Nyquist-frequentie gesampeld, hier laat zich de oorspronkelijke Fourier getransformeerde terug vinden, door met een rechthoek functie te vermenigvuldigen. Hetzelfde geldt voor het rechter plaatje, waar met een frequentie hoger dan de Nyquist-frequentie gesampeld wordt, dit noemt men *oversampling*. In het middelste plaatje is daarentegen het geval van *undersampling* te zien, de verschillende kopieën van $F(u)$ overlappen en worden gedeeltelijk bij elkaar opgeteld. De oorspronkelijke Fourier getransformeerde $F(u)$ is uit deze functie niet meer terug te vinden.

In het geval dat met een voldoende hoge frequentie gesampeld is, dus met $\omega \geq 2u_m$, vermenigvuldigen we $F_s(u)$ met de rechthoek-filter functie

$$r(u) := \begin{cases} 1 & \text{als} \quad |u| \leq \frac{\omega}{2} \\ 0 & \text{als} \quad |u| > \frac{\omega}{2} \end{cases}$$

Dan is $F(u) = \Delta t \cdot F_s(u) \cdot r(u)$ en dus

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \mathcal{F}^{-1}[\Delta t \cdot F_s(u)] * \mathcal{F}^{-1}[r(u)].$$

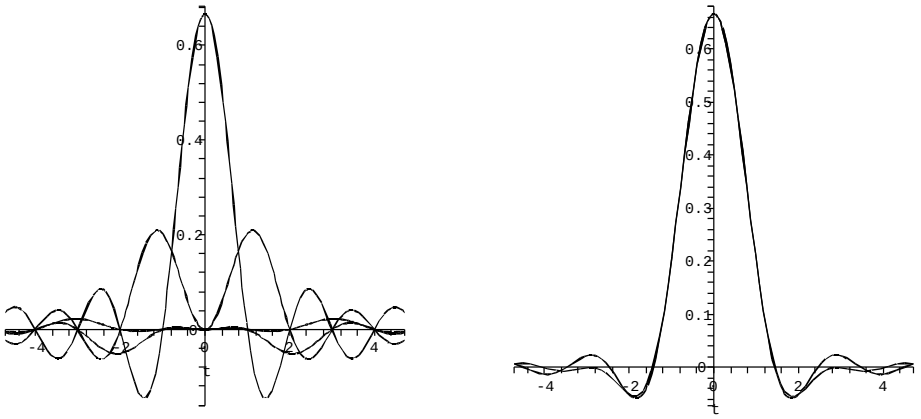
We hebben $F_s(u)$ zo gedefinieerd dat $\mathcal{F}^{-1}[F_s(u)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\delta(t-t_k)$. Maar met de relatie $\mathcal{F}^{-1}[f(u)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f(-u)]$ tussen inverse Fourier transformatie en Fourier transformatie kunnen we ook de inverse Fourier transformatie van $r(u)$ makkelijk berekenen, dit hebben we in feite eerder al gedaan, het gaat om de Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls van breedte $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$:

$$\mathcal{F}^{-1}[r(u)] = \frac{2}{2\pi}\frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{t} = \frac{\frac{\omega}{2}}{\pi}\frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t}.$$

Hieruit krijgen we de interpolatie formule

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\left(\delta(t-t_k) * \frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{\sin(\frac{\omega}{2}(t-t_k))}{\frac{\omega}{2}(t-t_k)}.$$

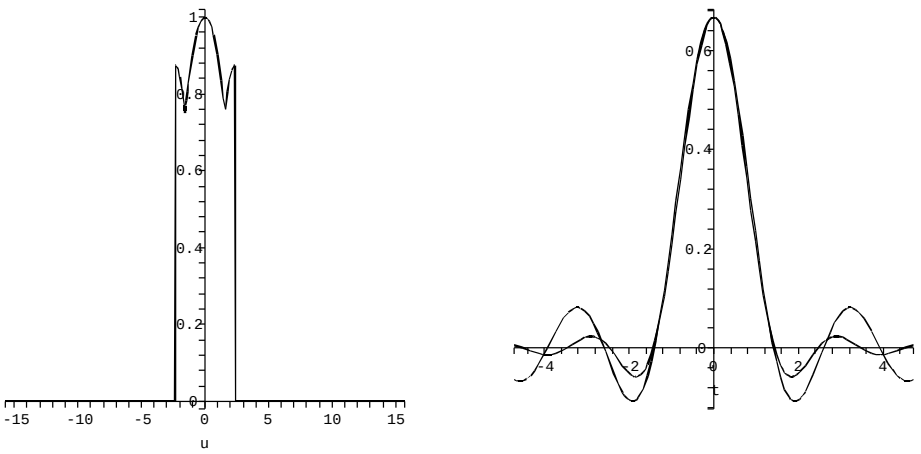
In Figuur II.30 zijn de interpolerende functies $f(t_k)\frac{\sin(\frac{\omega}{2}(t-t_k))}{\frac{\omega}{2}(t-t_k)}$ voor $k = -3, \ldots, 3$ te zien, waarbij de functies voor k en $-k$ bij elkaar opgeteld zijn



Figuur II.30: Interpolerende functies en reconstructie door som van interpolerende functies.

om symmetrische functies te krijgen. Het rechter plaatje laat de reconstructie van de originele functie $f(t)$ door de som van de interpolerende functies voor $k = -2, \ldots, 2$ zien. Een vergelijk met het linkerplaatje in Figuur II.28 maakt duidelijk dat dit al een erg goede benadering oplevert.

Wat gebeurt er nu als we een signaal met een te lage aftast-frequentie sampeln, dus bij undersampling? De bijdragen van de frequenties boven $\frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{\Delta t}$ worden afgebeeld op lagere frequenties en dit resulteert in een verandering van de functie $F_s(u)$ en dus ook van het gereconstrueerde signaal. Dit effect noemt men *aliasing*. Om zo'n effect te vermijden, wordt een signaal voor het aftasten meestal door een low pass filter gestuurd die de te hoge frequenties wegsnijdt.



Figuur II.31: Aliasing in het frequentie domein en reconstructie bij undersampling.

In Figuur II.31 is de functie $f(t)$ uit het voorbeeld met de te lage frequentie $\frac{3}{2}u_m$ in plaats van de Nyquist frequentie $2u_m$ gesampeld. Dit heeft tot gevolg dat de functie $F_s(u)$ zo als in het middelste plaatje van Figuur II.29 verandert, en het vermenigvuldigen met de rechthoek-filter lijdt tot een functie $\Delta t F_s(u) r(u)$ met te hoge waarden voor de lage frequenties, omdat hogere frequenties op deze lage frequenties afgebeeld worden. Als effect hiervan levert de reconstructie van de oorspronkelijke functie middels inverse Fourier transformatie een functie die niet snel genoeg afneemt, wat we duidelijk aan het te grote tweede maximum van de gereconstrueerde functie in het rechter plaatje van Figuur II.31 kunnen zien.

Belangrijke begrippen in deze les

- sampling, discretisering
- discrete Fourier transformatie
- trigonometrische interpolatie
- FFT: snelle Fourier transformatie
- Shannon's aftast-theorema
- Nyquist frequentie, undersampling, oversampling

Opgaven

78. Bereken de coëfficiënten F_j van de discrete Fourier getransformeerde voor de volgende gesampelde waarden van de functie $f(t)$. In elk geval is $\Delta t = 1$.

(i)

k	0	1	2	3
$f(t_k)$	1	2	3	4

(ii)

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t_k)$	1	2	3	4	0	0	0	0

79. Een sampling van de functie $f(t)$ met $N = 8$ en $\Delta t = 1$ geeft de volgende waarden:

$$f_k = f(t_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0, 4 \\ 1 & k = 1, 2, 3 \\ 0 & k = 5, 6, 7 \end{cases}$$

(i) Bepaal de coëfficiënten F_j van de discrete Fourier getransformeerde van $f(t)$.

(ii) Stel dat $f(t)$ periodiek met periode 8 is en dat de functie $g(t)$ gegeven is door $g(t) := f(t-3)$. Wat zijn de sampling waarden $g_k = g(t_k)$ van $g(t)$ voor $k = 0, 1, \ldots, 7$?

Bepaal de coëfficiënten G_j van de discrete Fourier getransformeerde van $g(t)$.

80. Zij $\{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ een gesampelde functie en zij $\{F_0, \ldots, F_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerde hiervan.

(i) Laat zien dat de (in $t = 0$) gespiegelde functie $\{f_{N-0}, \ldots, f_{N-(N-1)}\}$ de (in $\omega = 0$) gespiegelde Fourier getransformeerde $\{F_{N-0}, \ldots, F_{N-(N-1)}\}$ heeft.

(ii) Laat zien dat de complex geconjugeerde functie $\{\overline{f_0}, \ldots, \overline{f_{N-1}}\}$ de complex geconjugeerde en gespiegelde Fourier getransformeerde $\{\overline{F_{N-0}}, \ldots, \overline{F_{N-(N-1)}}\}$ heeft.

81. Zij $\{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ een gesampelde functie met *reële* waarden en zij $\{F_0, \ldots, F_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerde hiervan. Laat zien dat voor de discrete Fourier transformatie de volgende versie van de *Parseval identiteit* geldt:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |F_j|^2.$$

82. Zij $\{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ een gesampelde functie en zij $\{F_0, \ldots, F_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerde hiervan. We verschuiven F_j in het frequentiedomein om l posities, dit geeft de functie $G_j := F_{j-l}$. Laat zien dat $\{G_0, \ldots, G_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerde van de functie $\{g_0, \ldots, g_{N-1}\}$ is met

$$g_k = f_k \, e^{ikl\Delta\omega\Delta t} = f_k \, e^{i\frac{2\pi}{N}kl}.$$

83. Laten de gesampelde functies $\{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ en $\{g_0, \ldots, g_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerden $\{F_0, \ldots, F_{N-1}\}$ en $\{G_0, \ldots, G_{N-1}\}$ hebben. Laat zien dat het convolutieproduct

$$H_j := F_j * G_j = \sum_{l=0}^{N-1} F_l \, G_{j-l}$$

de discrete Fourier getransformeerde van de functie $h_k := N \cdot f_k \, g_k$ is.