# Les 12 Markov processen en Markov modellen

We hebben in het kader van de Lineaire Algebra in Wiskunde 1 een aantal voorbeelden van systemen gezien, die zich door overgangsmatrices laten beschrijven. Voorbeelden hiervan waren:

- Populaties die zich volgens overgangen tussen de verschillende generaties ontwikkelen.
- De verspreiding van de Euro munten over de verschillende landen.

Iets algemener gesproken hebben we het hierbij over systemen, die gekarakteriseerd zijn door: (1) mogelijke *toestanden* van het systeem; en (2) *overgangen* tussen deze toestanden.

We zullen het in deze (en de volgende) les over dit soort systemen hebben, waarbij we vooral naar het belangrijke geval kijken, dat de overgangen door kansverdelingen worden beschreven.

## 12.1 Markov processen

Als de overgangen tussen de mogelijke toestanden van een systeem door kansverdelingen gegeven zijn, spreekt men meestal van *Markov processen*.

**Definitie:** Een *Markov proces* wordt door de volgende gegevens gekarakteriseerd:

- een aantal mogelijke toestanden $S_1, S_2, \ldots, S_N$, die we *states* noemen;
- op elk tijdstip $t = 0, 1, 2, \ldots$ een state $q_t \in \{S_1, \ldots, S_N\}$, waarin het systeem zich op dit tijdstip bevindt;
- gegeven de states $q_0, q_1, \ldots, q_{t-1}$ op de tijdstippen $0, 1, \ldots, t-1$, de kansverdeling dat het systeem op tijdstip $t$ in de state $S_j$ terecht komt, d.w.z. de voorwaardelijke kansen

$$p(q_t = S_j \mid q_{t-1} = S_{i_{t-1}}, \ldots, q_1 = S_{i_1}, q_0 = S_{i_0}).$$

Het probleem om in de praktijk een proces als een Markov proces te beschrijven, zit in de exponentiële groei van het aantal mogelijke states op de tijdstippen $0, 1, \ldots, t-1$, dit zijn er namelijk $N^t$. Voor elke van deze mogelijkheden moeten we in principe een aparte kansverdeling voor de states op tijdstip $t$ aangeven, maar dat is natuurlijk voor grotere waarden van $t$ ondoenlijk.

Als we nog eens naar het voorbeeld van de taalherkenning middels letterfrequenties kijken, kunnen we dit zien als een Markov proces waarbij de states de verschillende letters zijn. In dit geval zouden voor elk beginstuk van $t$ letters een kansverdeling voor de daarop volgende letter moeten bepalen. Voor een beginstuk van 8 letters zijn dit bijvoorbeeld $27^8 = 282429536481$ verdelingen, en die kunnen we nog bepalen nog opslaan.

Maar dit voorbeeld wijst ook al een mogelijke oplossing aan: We kunnen ervan uitgaan dat de kansverdeling voor de 9-de letter niet erg verandert als

we de eerste letter $q_0$ veranderen en waarschijnlijk zal ook de letter op tijdstip $t = 1$ nog geen grote betekenis voor de kansen van de verschillende waarden van $q_8$ hebben.

Dit leidt tot het idee, de kansverdeling voor de states op tijdstip $t$ te benaderen door de kansverdeling die alleen maar met de $k$ voorafgaande states rekening houdt, d.w.z. we nemen aan dat

$$p(q_t = S_j | q_{t-1} = S_{i_{t-1}}, \ldots, q_0 = S_{i_0}) \approx p(q_t = S_j | q_{t-1} = S_{i_{t-1}}, \ldots, q_{t-k} = S_{i_{t-k}})$$

een voldoende nauwkeurige benadering geeft.

**Definitie:** Een Markov proces, waarbij de kans op de states op tijdstip $t$ alleen maar van de $k$ voorafgaande states afhangt, heet een *Markov proces van orde k*. Hierbij wordt verondersteld dat de kansen niet van het tijdstip $t$ afhangen, maar alleen maar van de rij voorafgaande states.

Voor een systeem met $N$ mogelijke states wordt een Markov proces van orde $k$ dus beschreven door de $N^k$ kansverdelingen

$$p(q_t = S_j \mid q_{t-1} = S_{i_{t-1}}, \ldots, q_{t-k} = S_{i_{t-k}})$$

waarbij $(S_{i_{t-1}}, \ldots, S_{i_{t-k}})$ over alle mogelijke combinaties van states op de tijdstippen $t-1, \ldots, t-k$ loopt (onafhankelijk van $t$).

Bij een **Markov proces van orde** 0 speelt de geschiedenis helemaal geen rol, de states worden alleen maar volgens een kansverdeling op de states voortgebracht. Zo'n Markov proces krijgen we bijvoorbeeld, als we (zo als in de laatste les) alleen maar de relatieve frequenties van de letters in een taal bepalen en vervolgens letters volgens deze kansverdeling produceren. De relatieve frequentie van de letters zal dan wel kloppen, maar bijvoorbeeld de relatieve frequenties van paren van letters niet meer. Hiervoor hebben we een Markov proces van orde 1 nodig.

Een **Markov proces van orde** 1 is gekarakteriseerd door de overgangskansen $a_{ij} := p(q_t = S_j \mid q_{t-1} = S_i)$. Omdat we veronderstellen dat deze kansen onafhankelijk van $t$ zijn, kunnen we de kansen in een *overgangsmatrix* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invullen. Voor deze overgangsmatrix $A$ geldt dat $a_{ij} \geq 0$ en dat $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ voor alle $i = 1, \ldots, n$, omdat het systeem vanuit state $S_i$ naar een van de states $S_j$ moet overgaan.

Een handige eigenschap van de overgangsmatrix $A$ is dat we met behulp van de machten van $A$ makkelijk kunnen berekenen wat er over een aantal stappen gebeurt: Het element $(i, j)$ van $A^k$ geeft de kans aan, dat het systeem in (precies) $k$ stappen van state $S_i$ naar $S_j$ gaat.

Een Markov proces van orde 1 laat zich ook overzichtelijk door een *graaf* of *state diagram* representeren: De states zijn punten en de overgangen zijn pijltjes tussen de states, met de kans voor de overgangen als labels.

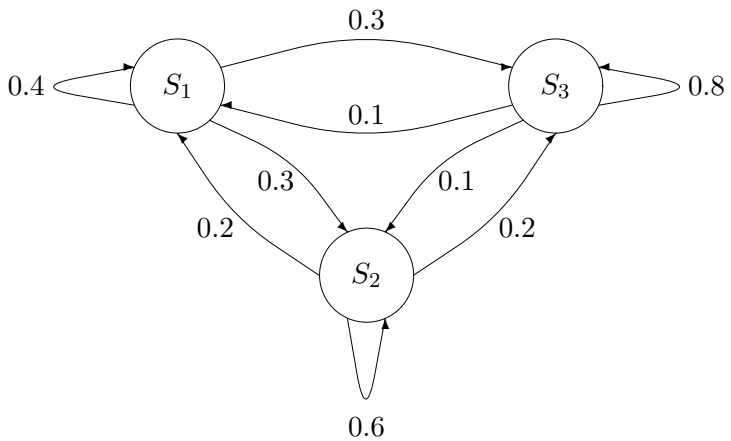
Als we bijvoorbeeld het weer als een (eenvoudige) Markov proces willen beschrijven, zouden we misschien de drie states

$$S_1 = \text{ regen}, \quad S_2 = \text{ bewolkt}, \quad S_3 = \text{ zonnig}$$

kunnen kiezen. Als overgangsmatrix veronderstellen we de (erg optimistische) matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Dan heeft deze Markov proces het state diagram uit Figuur III.3.




Figuur III.3: Markov proces van orde 1 voor het weer.

Aan de hand van de overgangskansen kunnen we een aantal vragen makkelijk beantwoorden:

(1) Wat is de kans op drie dagen zon gevolgd van een dag regen?

(2) Wat is de kans dat het weer precies $d$ dagen hetzelfde blijft?

Bij vraag (1) willen we de kans op de rij $O = S_3S_3S_3S_1$ van states weten. Maar de overgang $S_3 \to S_3$ heeft kans $a_{33} = 0.8$ en de overgang $S_3 \to S_1$ heeft kans $a_{31} = 0.1$, dus is de kans op deze rij $0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.1 = 0.064$. Hierbij veronderstellen we wel, dat de vraag op een dag gesteld wordt, waar het al zonnig is, dus waar we al in state $S_3$ zitten.

Vraag (2) gaat over een rij $O = \underbrace{S_iS_i \ldots S_i}_{d} S_j$ van states, waarbij er precies $d$ keer de state $S_i$ voorkomt en de state $S_j$ verschillend is van $S_i$. Maar de kans dat we van state $S_i$ naar een state verschillend van $S_i$ gaan is $1 - a_{ii}$, dus is de kans $p(O)$ van deze rij states $p(O) = a_{ii}^{d-1} \cdot (1 - a_{ii})$.

We kunnen nu zelfs de verwachtingswaarde voor het aantal dagen $d$ berekenen, die we in state $S_i$ blijven, er geldt:

$$E[d] = \sum_{d=1}^{\infty} d \cdot a_{ii}^{d-1} \cdot (1 - a_{ii}) = \frac{1}{1 - a_{ii}}.$$

Dit zien we als volgt in: Voor de meetkundige reeks geldt $\sum_{d=0}^{\infty} x^d = \frac{1}{1-x}$ als $|x| < 1$. Maar $\sum_{d=1}^{\infty} dx^{d-1} = (\sum_{d=0}^{\infty} x^d)'$, omdat we in dit geval termsgewijs

mogen afleiden. Aan de andere kant is $(\frac{1}{1-x})' = \frac{1}{(1-x)^2}$, en dus is

$$\sum_{d=1}^{\infty} d \cdot a_{ii}^{d-1} \cdot (1 - a_{ii}) = \frac{1}{(1 - a_{ii})^2}(1 - a_{ii}) = \frac{1}{1 - a_{ii}}.$$

In ons optimistisch model van het weer is de kans dat het blijft regenen $a_{11} = 0.4$, dus is de verwachtingswaarde voor het aantal regendagen achter elkaar gelijk aan $\frac{1}{1-0.4} = \frac{1}{0.6} \approx 1.67$. Net zo krijgen we voor het verwachte aantal bewolkte dagen achter elkaar de waarde $\frac{1}{1-0.6} = 2.5$ en voor het aantal zonnige dagen achter elkaar hebben we de verwachtingswaarde $\frac{1}{1-0.8} = 5$.

## 12.2 Stochastische automaten

Bij de Markov processen zijn we ervan uitgegaan dat het systeem op tijdstippen $t = 0, 1, \ldots$ van een state naar een andere state overgaat. In sommige samenhangen wordt zo'n overgang veroorzaakt door een input aan het systeem. Maar dan is het plausibel dat de overgangskansen ook van de mogelijke inputs kunnen afhangen. Dit betekent, dat er bij een Markov proces van orde 1 voor elke mogelijke input een aparte overgangsmatrix is. Zo'n systeem noemt men ook een *stochastische automaat*.

We bekijken dit aan de hand van het voorbeeld van een *emotionele robot*. Stel de robot heeft drie mogelijke states, namelijk

$$S_1 = \text{ gelukkig}, \quad S_2 = \text{ bedroefd}, \quad S_3 = \text{ mal}$$

en er zijn de twee mogelijke inputs

$$X = \text{ 'hallo schat'} \quad \text{en} \quad Y = \text{ 'oude roestdoos'}$$

dan horen bij deze twee inputs misschien de overgangsmatrices

$$A_X = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad A_Y = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Een state zo als $S_3$ waaruit een systeem niet meer kan ontsnappen, heet een *absorberende* state.

Ook voor een stochastische automaat laten zich de kansen over langere perioden door producten van de overgangsmatrices berekenen, als de rij van inputs bekend is. Als de robot bijvoorbeeld op de werkdagen input $Y$ maar op het weekend input $X$ te horen krijgt, zijn de overgangskansen van maandag tot maandag gegeven door

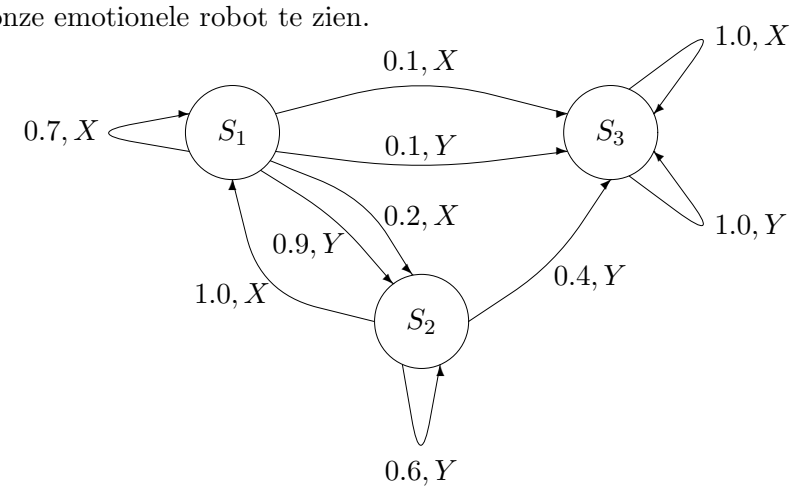
$$A_Y^5 \cdot A_X^2 = \begin{pmatrix} 0.08163 & 0.02332 & 0.8950 \\ 0.05443 & 0.01555 & 0.9300 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

dus is zelfs een gelukkige robot na afloop van een week (en na een eigenlijk opbouwend weekend) met hoge kans mal. Nog erger is het van vrijdag tot vrijdag, dit geeft de overgangskansen

$$A_X^2 \cdot A_Y^5 = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.09135 & 0.9086 \\ 0.0 & 0.09718 & 0.9028 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

en alleen maar de robots die op vrijdag middag bedroefd en nog niet mal zijn, krijgen we tot maandag weer opgeknapt.

Een stochastische automaat laat zich analoog met een Markov proces van orde 1 door een state diagram beschrijven, waarbij de labels de input en de kans voor de overgang bij deze input bevatten. In Figuur III.4 is het state diagram voor onze emotionele robot te zien.




Figuur III.4: Stochastische automaat voor een emotionele robot.

Merk op dat in een state diagram voor elke state de som van de kansen op de uitgaande pijltjes voor eenzelfde input gelijk aan 1 moet zijn.

## 12.3 Markov modellen

We hebben tot nu toe het standpunt ingenomen, dat een rij states volgens de kansverdelingen van een Markov proces voortgebracht wordt. Maar we kunnen de opzet van een Markov proces ook opvatten als een *model* voor een niet verder gespecificeerd mechanisme dat de rij van states voortbrengt. Uit deze perspectief noemt men het stelsel van states en kansverdelingen voor de overgangen tussen de states een *Markov model*. Het idee hier achter is dat een onbekend proces de states produceert, maar dat we veronderstellen dat dit proces zich gedraagt als een Markov proces en de states en overgangskansen dus een model voor het proces zijn.

Om voor een onbekend proces een Markov model te maken, moeten we uit waarnemingen van rijen van states de overgangskansen tussen de states schatten. Hoe dit in zijn werk gaat, bekijken we aan het voorbeeld van de letterfrequenties:

Markov model van **orde 0**:
We hebben alleen maar de kansverdeling van de states nodig, dus de kansverdeling van de letters, en die krijgen we als relatieve frequenties van de letters in een (grote) achtergrond tekst (training tekst).

Markov model van **orde 1**:
We moeten de overgangskansen $a_{ij} := p(q_t = S_j \mid q_{t-1} = S_i)$ bepalen. Maar er geldt voor de voorwaardelijke kans $a_{ij}$ dat

$$p(q_t = S_j \mid q_{t-1} = S_i) = \frac{p(q_t = S_j, q_{t-1} = S_i)}{p(q_{t-1} = S_i)},$$

dus kunnen we de $a_{ij}$ op een training tekst bepalen als quotiënt van de frequentie $f_{ij}$ van letterparen met $S_i$ als eerste letter en de totale frequentie $f_i$ van de letter $S_i$. Hierbij hoeven we frequenties $f_i$ van de enkele letters niet eens expliciet te bepalen, want er geldt $f_i = \sum_j f_{ij}$ omdat we elk voorkomen van $S_i$ hebben geteld als we alle paren met $S_i$ in de eerste plaats hebben geteld. (Voor de letter op de laatste plaats in de training tekst klopt dit natuurlijk niet, maar deze fout kunnen we verwaarlozen). We krijgen dus de overgangskansen $a_{ij}$ heel makkelijk als

$$a_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_i}.$$

Markov model van **orde k** $\geq 2$:
In principe passen we hier hetzelfde idee toe als bij een Markov model van orde 1 en berekenen de voorwaardelijke kansen $p(q_t = S_j \mid q_{t-1} = S_{i_k}, \ldots, q_{t-k} = S_{i_1})$ door

$$p(q_t = S_j \mid q_{t-1} = S_{i_k}, \ldots, q_{t-k} = S_{i_1}) = \frac{p(q_t = S_j, q_{t-1} = S_{i_k}, \ldots, q_{t-k} = S_{i_1})}{p(q_{t-1} = S_{i_k}, \ldots, q_{t-k} = S_{i_1})}.$$

De kans in de teller vinden we hierbij als relatieve frequentie van de rij van states $(S_{i_1}, \ldots, S_{i_k}, S_j)$ in alle rijen van $k+1$ states en de kans in de noemer als relatieve frequentie van de rij $(S_{i_1}, \ldots, S_{i_k})$ in alle rijen van $k$ states.

In de aanpak met de relatieve frequenties bestaat er een klein probleem met de zogeheten *zeldzame gebeurtenissen*. Voor een rij van states met een lage kans kan het gebeuren dat deze rij in het training materiaal helemaal niet voorkomt. Maar in het algemeen is het niet verstandig om aan een overgang in het model de kans 0 toe te kennen, omdat dit betekent dat het model deze overgang nooit zou produceren en aan een rij states waarin deze overgang wel voorkomt de kans 0 geeft. De enige uitzondering zijn *verboden overgangen*, d.w.z. overgangen die uit inhoudelijke redenen inderdaad uitgesloten kunnen worden (bijvoorbeeld in een populatie kippen de overgang van een overleden kip tot een vruchtbaar kip).

Een simpele (maar vaak voldoende) oplossing van het probleem van de zeldzame gebeurtenissen is, de teller voor de frequenties van de rijen niet met 0 maar met 1 te initialiseren, dus te veronderstellen dat elk gebeurtenis wel een keer is gezien (zo iets als éénmaal is geen maal). Maar

er zijn ook ingewikkeldere, theoretisch beter onderbouwde oplossingen voor dit probleem bedacht, dit valt onder het begrip van *smoothing* (gladmaken) van kansverdelingen.

We hebben gezien dat Markov processen en Markov modellen in principe twee zijden van eenzelfde munt zijn: Uit waarnemingen van een onbekend proces maken we een Markov model, en we zeggen dat het Markov model het proces goed beschrijft als de Markov proces die bij het Markov model hoort een rij gebeurtenissen produceert dat goed met de waarnemingen overeen komt.

## 12.4 Toepassingen van Markov modellen

De twee perspectieven om naar Markov modellen te kijken geven ook de meest belangrijke typen van toepassingen: Simulatie met behulp van Markov processen en classificatie (of toetsing) met behulp van Markov modellen.

### Simulatie

Hierbij gebruiken we een Markov model om een rij gebeurtenissen voort te brengen, waarop bijvoorbeeld andere modellen getoetst kunnen worden.

Als we bijvoorbeeld voor de rijen van letters in verschillende talen een Markov model van orde 1 bouwen, kunnen we (onzinnige) teksten produceren, die niettemin typische elementen van de taal laten zien.

Voor de talen Nederlands (NL), Engels (EN), Duits (DU) en Fins (FI) krijgen we zo bijvoorbeeld *teksten* als de volgende (met 160 letters):

```
NL EVEFOOE OVORER KET DESTS NDEFT MELL CEN HEN ET MEDE ENIJFEBE
   HEPGE G IN JEN VOONDEDE HE ESTETETE DE HE DER COROPEETLL
   NFFTE LENG MHT VOT HET EUDE DERANLODENGEMH

EN S COTHENN CHENCTHER BEN THXS INTHABJ IT EUPAUS ISTHANTEN
   CIOPE WAGESON IN M CONA ATHEDEDED AN JON DERENN T RTH THEPLE
   UES PTAD TIONTHAT ERO OR FFION TTUNEROCTHE

DU RELEMM FT DELLATIT APTZERKO TUN ASER WOPF KPEH RARINTOKEN IG
   W MT BURER MENGS URHEM ZICHAAT KAHED URIIENSP ENTEN ERT
   ZUNAUN SIONG D SE VERZUR HUMAN TSER DIE ASC

FI VA EN MMA LLLEN LILIOD TOS IHTORON ATUN MISA VUN KA
   OROLUSAMUJA POKUNITUSIM M DOSTOTA HAITTANEMINTISISON URECD
   KOMI HTI KUOHOONTOULI T OUUUSKARIS OP SSEHJOITAVU
```

Deze teksten laten verschillende elementen zien, die typisch voor de talen zijn, zo als de dubbele `OO` en de `IJ` in het Nederlands of de `TH` in het Engels.

Als men hier in plaats van een Markov model van orde 1 een Markov model van orde 2 toepast, dus de relatieve frequenties van tripels van letters telt, worden de verschillen nog veel duidelijker. Merk op dat er $27^3 = 19683$ verschillende tripels van letters zijn, om hiervoor een redelijke kansverdeling te krijgen, zou men een training tekst van een paar miljoen letters nodig hebben (voor de

$27^2 = 729$ paren van letters zijn training teksten van slechts ongeveer 50000 letters gebruikt). Maar natuurlijk zijn zo grote teksten voor alle soorten van talen beschikbaar, en als een Markov model van orde 2 een tekst als

```
IBUS CENT IPITIA IPSE CUM VIVIVS SE ACETITI DEDENTUR
```

produceert, zouden we er snel achter komen, dat het model op Latijnse teksten getraind is.

### Classificatie/Toetsing

We veronderstellen dat we bij een classificatie taak in de patroonherkenning voor elke klasse van patronen een Markov model gebouwd hebben dat de elementen van de klasse goed beschrijft.

**Classificatie principe:** Voor een gegeven rij waarnemingen wordt voor iedere klasse van patronen berekend met welke kans de waarneming door het Markov model van deze klasse voortgebracht wordt. Het patroon wordt aan de klasse toegewezen, waarvoor deze kans maximaal is.

Dit principe laat zich als volgt onderbouwen:

Bij een Markov proces van orde 0 met $N$ mogelijke uitkomsten $S_1, \ldots, S_N$ kunnen we de kans op de rij $x_1 x_2 \ldots x_n$ van uitkomsten eenvoudig berekenen door

$$p(x_1 x_2 \ldots x_n) = p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot \ldots \cdot p(x_n).$$

We bekijken nu de stochast $X$ van een Markov proces met *echte* kansen $p_i = p(X = S_i)$ en beschrijven deze door een Markov model met (geschatte) kansen $q_i = p'(q_t = S_i)$.

Als $n$ groot is, is het aantal van uitkomsten $x_i$ in de rij ongeveer gelijk aan $n \cdot p_i$. Dan krijgen we

$$p(x_1 x_2 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{N} p(X = S_i)^{n \cdot p_i} = \prod_{i=1}^{N} p_i^{n \cdot p_i}$$

voor de juiste kansen en

$$p'(x_1 x_2 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{N} p'(q_t = S_i)^{n \cdot p_i} = \prod_{i=1}^{N} q_i^{n \cdot p_i}$$

voor de kansen volgens het model.

Om rijen van verschillende lengtes te kunnen vergelijken moeten we hieruit nog de $n$-de machtswortel trekken, dit geeft

$$p(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{N} p_i^{p_i} \quad \text{tegenover} \quad p'(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} = \prod_{i=1}^{N} q_i^{p_i}.$$

Als we van deze vergelijkingen de logaritme (met basis 2) nemen, krijgen we een verband met een oude bekende uit de laatste les, namelijk de entropie:

$$\begin{aligned} H(X) &= -\sum_{i=1}^{N} p_i \ {}^2\log(p_i) = -\frac{1}{n} \ {}^2\log(p(x_1x_2\ldots x_n)) \\ &\leq -\sum_{i=1}^{N} p_i \ {}^2\log(q_i) = -\frac{1}{n} \ {}^2\log(p'(x_1x_2\ldots x_n)) =: H. \end{aligned}$$

In de limiet $n \to \infty$ geeft dus $H := -\frac{1}{n} \ {}^2\log(p'(x_1x_2\ldots x_n))$ een schatting voor de entropie $H(X)$ van de kansverdeling van de stochast $X$ en deze schatting is beter naarmate $H$ een lagere waarde heeft, want we weten dat het minimum bereikt wordt als $Q$ de juiste kansverdeling van $X$ is.

Wat we net hebben gezien, laat zich op algemene Markov processen veralgemenen, voor de entropie van een stochast $X$ geldt:

$$H(X) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \ {}^2\log(p(x_1x_2\ldots x_n))$$

waarbij $p(x_1x_2\ldots x_n)$ de juiste kansverdeling voor de stochast $X$ aangeeft. Als we nu dezelfde kans met de kansen uit een Markov model berekenen, wordt deze kans hoger als het Markov model de stochast beter beschrijft, want voor een hogere kans $p'(x_1x_2\ldots x_n)$ is $-\frac{1}{n} \ {}^2\log(p'(x_1x_2\ldots x_n))$ kleiner en ligt dus dichter bij $H(X)$.

Een andere manier om tot dezelfde conclusie te komen berust op de interpretatie van $2^{H(X)}$ als het gemiddelde aantal alternatieven dat men voor de stochast $X$ verwacht:

Uit de vorige les weten we dat een stochast $X$ met entropie $H(X)$ net zo moeilijk is als een uniforme verdeling met $2^{H(X)}$ alternatieven. Maar we weten dat voor $H = -\frac{1}{n} \ {}^2\log(p'(x_1x_2\ldots x_n))$ steeds geldt dat $H \geq H(X)$ en dus ook $2^H \geq 2^{H(X)}$. We kunnen dus zeggen, dat de beschrijving van de stochast $X$ door het Markov model met kansverdeling $Q$ net zo moeilijk is als een uniforme verdeling met $2^H$ alternatieven, en natuurlijk is degene beschrijving het beste waarvoor $2^H$ minimaal is.

We passen dit idee nu op korte testteksten toe, waarvoor we de taal willen bepalen. We nemen aan dat we een Markov model van orde 1 hebben met overgangskansen $a_{ij}$ van state $S_i$ naar state $S_j$ en met kans $b_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$ voor state $S_i$. Met zo'n model berekenen we de kans van een rij $x_1x_2\ldots x_n$ van letters door

$$\begin{aligned} &p(x_1x_2\ldots x_n) \\ &\qquad = p(q_1 = S_{i_1}) \cdot p(q_2 = S_{i_2} \mid q_1 = S_{i_1}) \cdot \ldots \cdot p(q_n = S_{i_n} \mid q_{n-1} = S_{i_{n-1}}) \\ &\qquad = b_{i_1} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} a_{i_j i_{j+1}} \end{aligned}$$

waarbij $S_{i_j}$ de state van de letter $x_j$ is.

**Voorbeeld:** We onderzoeken verschillende stukken tekst in de talen Nederlands (NL), Engels (EN), Duits (DU) en Fins (FI) met Markov modellen voor deze talen en berekenen voor elke combinatie van tekst en Markov model de waarde

$$2^H \text{ voor } H = -\frac{1}{n}\ {}^2\log(p(x_1x_2\ldots x_n))$$

waarbij de kansen zo als net aangegeven berekend worden.

De testteksten zijn:

$T_1$ : `SINTERKLAAS KOMT NAAR ONS HUIS`

$T_2$ : `SANTA CLAUS COMES TO OUR HOUSE`

$T_3$ : `NIKOLAUS KOMMT IN UNSER HAUS`

$T_4$ : `HANNU MANNINEN`

Als resultaat krijgen we de volgende tabel met de waarden van $2^H$:

| | NL | EN | DU | FI |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | 14.1 | 28.3 | 16.2 | 19.0 |
| $T_2$ | 18.2 | 12.4 | 28.9 | 18.0 |
| $T_3$ | 14.4 | 23.5 | 9.8 | 16.5 |
| $T_4$ | 19.2 | 25.0 | 16.8 | 14.0 |

Het is duidelijk dat we in elk geval de juiste taal kunnen achterhalen. Hoe typisch de testteksten voor de enkele talen zijn, kunnen we zien als we de boven gevonden waarden met de waarden op de teksten vergelijken waarop de Markov modellen getraind zijn, dus met de entropieën van de Markov modellen zelfs. De waarden van $2^{H(X)}$ voor de verschillende talen zijn:

NL: 9.2 EN: 9.6 DU: 9.3 FI: 9.7.

De classificatie met behulp van Markov modellen voor letter strings in de verschillende talen is de manier hoe in tekstverwerkingsprogramma's als Word (Office) automatisch de spellchecker naar een andere taal omgeschakeld wordt, als er bijvoorbeeld in een Nederlandstalige tekst een citaat in het Engels ingebouwd wordt.

## 12.5 Markov modellen met verborgen states

Tot nu toe hebben we steeds naar systemen gekeken, waarvoor we de states direct konden waarnemen. We hebben daarom ook geen onderscheiding gemaakt tussen states, uitkomsten en waarnemingen. We krijgen echter een grotere vrijheid in de Markov modellen, als we de states los van de gebeurtenissen en waarnemingen bekijken. Het idee is, dat de states de mogelijke uitkomsten wel veroorzaken, maar dat verschillende states dezelfde uitkomst kunnen produceren en dat niet (noodzakelijk) bekend is, welke state een bepaalde uitkomst heeft veroorzaakt. Om deze reden noemen we de states ook *verborgen* en een

Markov model met verborgen states heet een *Hidden Markov model*, of in het kort een *HMM*.

We geven twee opzetten die het idee van de Hidden Markov modellen illustreren:

- **Het munt model**

  Achter een gordijn zit iemand die met een aantal mogelijk geladen (dus niet noodzakelijk eerlijke) munten een muntworp experiment uitvoert, maar alleen maar de rij uitkomsten (kop/munt) aan de waarnemer doorgeeft. De keuze van de munten voor de enkele worpen volgt een stochastisch proces die door overgangskansen tussen de munten bepaald wordt.

- **Het vaas model**

  Er zijn $N$ vazen met telkens ballen van $M$ verschillende kleuren, waarbij de aantallen van ballen met een zekere kleur per vaas mogen verschillen en ook het totale aantal ballen per vaas niet hetzelfde hoeft te zijn. Iemand trekt (met terugleggen) een bal uit een van de vazen en geeft de kleur van de bal aan de waarnemer door. Vervolgens wordt volgens een toevalskeuze, die afhankelijk van de laatst gekozen vaas is, een nieuwe vaas gekozen.

De algemene ingrediënten van een HMM (van orde 1) zijn als volgt:

(1) Mogelijke uitkomsten $x_1, \ldots, x_M$. De waargenomen uitkomst op tijdstip $t$ word met $o_t$ aangegeven (de letter $o$ staat voor het Engelse *observation*).

(2) Een aantal states $S_1, \ldots, S_N$, waarbij de state op tijdstip $t$ met $q_t$ aangegeven wordt.

(3) De overgangskansen $a_{ij} := p(q_t = S_j \mid q_{t-1} = S_i)$ voor de overgang van state $S_i$ naar state $S_j$.

(3) Voor elke state $S_i$ een kansverdeling $b_i$ voor de *emissiekansen*, d.w.z. $b_i(x_k) = p(o_t = x_k \mid q_t = S_i)$ is de kans dat in state $S_i$ de uitkomst $x_k$ geproduceerd wordt. Er wordt veronderstelt dat deze kansen onafhankelijk van het tijdstip $t$ zijn.

(4) Een beginverdeling $\pi$ die de kansen $\pi(i) := p(q_0 = S_i)$ aangeeft dat het systeem op tijdstip $t = 0$ in state $S_i$ is.

Ook een gewoon Markov model laat zich (op een iets kunstmatige manier) als HMM opvatten: Hiervoor worden de states $S_i$ identiek met de uitkomsten $x_i$ gekozen en de emissiekansen $b_i$ worden gedefinieerd door

$$b_i(x_i) = 1 \text{ en } b_i(x_k) = 0 \text{ voor } k \neq i.$$

### Voorbeeld van een HMM

We bekijken een munt model met drie munten als states, waarvan de eerste eerlijk is, dus kansen $\frac{1}{2}$ voor *kop* en *munt* heeft, de tweede oneerlijk met kans $\frac{3}{4}$ op

*kop* en de derde oneerlijk met kans $\frac{1}{4}$ op *kop*. Als we K voor de uitkomst *kop* en M voor de uitkomst *munt* schrijven, hebben we de emissiekansen $b_1(\mathtt{K}) = b_1(\mathtt{M}) = \frac{1}{2}$, $b_2(\mathtt{K}) = b_3(\mathtt{M}) = \frac{3}{4}$, $b_3(\mathtt{K}) = b_2(\mathtt{M}) = \frac{1}{4}$, die door de volgend tabel weergegeven worden:

| | $b_i(\mathtt{K})$ | $b_i(\mathtt{M})$ |
|---|---|---|
| $S_1$ | 0.5 | 0.5 |
| $S_2$ | 0.75 | 0.25 |
| $S_3$ | 0.25 | 0.75 |

We veronderstellen verder dat de beginverdeling uniform is, d.w.z. de kans dat het systeem in het begin in state $S_i$ is, is voor elke state $\pi(i) = \frac{1}{3}$.

Stel we nemen de rij $O = \mathtt{KMKMK}$ waar.

In een eerste opzet nemen we aan dat alle overgangskansen hetzelfde zijn, dus alle $a_{ij} = \frac{1}{3}$.

Omdat de hoogste kans op de uitkomst K in state $S_2$ zit, de hoogste kans op de uitkomst M in $S_3$ en de overgangskansen alle hetzelfde zijn, kunnen we makkelijk zien dat de rij $q = S_2S_3S_2S_3S_2$ de rij van states is, waarvoor de kans op de waarneming $O$ maximaal is. In dit geval is deze kans namelijk $p(O, q) = (\frac{1}{3})^5 \cdot (\frac{3}{4})^5 = (\frac{1}{4})^5 \approx 9.77 \cdot 10^{-4}$.

In tegenstelling hiermee is de kans dat deze waarneming door de rij $q' = S_1S_1S_1S_1S_1$ voortgebracht is, slechts $p(O, q') = (\frac{1}{3})^5 \cdot (\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{6})^5 \approx 1.29 \cdot 10^{-4}$. Deze kans is om een factor $(\frac{3}{2})^5 \approx 7.6$ kleiner dan voor de eerdere rij $q$ van states.

Het probleem wordt iets ingewikkelder als de overgangskansen niet meer alle hetzelfde zijn. Stel we hebben de volgende matrix $A = (a_{ij})$ van overgangskansen $a_{ij}$ tussen de states:

$$A = (a_{ij}) := \begin{pmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.45 & 0.1 & 0.45 \\ 0.45 & 0.45 & 0.1 \end{pmatrix}$$

dan is de kans $p(O, q \mid A)$ (we geven hier voor de duidelijkheid de matrix van overgangskansen mee aan) voor dezelfde rijen $q$ en $q'$ van states als boven gegeven door

$$p(O, q \mid A) = \frac{1}{3} \cdot 0.45^4 \cdot (\frac{3}{4})^5 \approx 3.24 \cdot 10^{-3},$$
$$p(O, q' \mid A) = \frac{1}{3} \cdot 0.9^4 \cdot (\frac{1}{2})^5 \approx 6.83 \cdot 10^{-3},$$

dus is deze keer $p(O, q' \mid A)$ om een factor $2^4(\frac{2}{3})^5 \approx 2.1$ *groter* dan $p(O, q \mid A)$.

We zien dus dat in het tweede geval de hypothese dat het systeem door de rij $q'$ van states gelopen is, een hogere kans voor de waarneming geeft dan de rij $q$ van states.

Het is nu natuurlijk een voor de hand liggende vraag, of er een verdere rij $q''$ van states is, die een nog hogere kans voor de rij $O$ van waarnemingen oplevert.

Voor korte rijen kunnen we dit met brute kracht nog wel achterhalen (voor het voorbeeld met 5 waarnemingen en 3 states zijn er $3^5 = 243$ mogelijkheden voor de rij $q$ van states), maar voor langere rijen is dit ondoenlijk.

In het speciaal geval van het voorbeeld is de rij $q'$ inderdaad optimaal, omdat de overgangskans $a_{11} = 0.9$ minstens twee keer groter is dan alle andere overgangskansen en de emissiekansen $b_1(\mathtt{K}) = b_1(\mathtt{M}) = \frac{1}{2}$ zijn. Maar zo'n soort redenering zal in de praktijk natuurlijk nooit werken, omdat de modellen veel ingewikkelder en onoverzichtelijker zijn.

We zitten dus met de vraag hoe we bij een rij waarnemingen de rij states vinden, die de hoogste kans aan de waarnemingen geeft. Dit is één van drie fundamentele problemen in het kader van Hidden Markov modellen die we in de volgende les gaan bespreken.

### Belangrijke begrippen in deze les

- Markov processen
- overgangsmatrix
- state diagram
- stochastische automaat
- Markov model
- Hidden Markov model (HMM)

### Opgaven

94. In een communicatie systeem worden bits als 0 of 1 over een aantal stappen doorgegeven, waarbij in iedere stap een bit met kans 0.8 correct blijft.

    (i) Beschrijf het communicatie systeem als een Markov proces en geef het state diagram van het proces aan.

    (ii) Bepaal de kans dat een bit met de waarde 0 na vier stappen als 0 ontvangen wordt.

95. De oogst van appels in Tasmanië wordt als *geweldig*, *middelmatig* of *slecht* geclassificeerd. Na een geweldig jaar zijn de kansen voor het volgende jaar 0.5, 0.3, 0.2 voor een geweldige, middelmatige of slechte oogst. Na een middelmatig jaar zijn de kansen voor het volgende jaar 0.2, 0.5, 0.3 en na een slecht jaar zijn de kansen 0.2, 0.2, 0.6 voor een geweldige, middelmatige of slechte oogst.

    (i) Beschrijf de ontwikkeling van de appel oogst door een Markov proces en geef het state diagram van het proces aan.

    (ii) Stel de kansen om met een geweldig, middelmatig of slecht jaar te beginnen zijn 0.2, 0.5 en 0.3. Wat zijn de kansverdelingen voor de kwaliteit van de oogst na 1 jaar, 3 jaren en 5 jaren?

(iii) Kan je de kansverdeling voor de kwaliteit van de oogst bepalen, die op lange termijn bereikt wordt?

96. Een Markov proces heet *irreducibel* als elke state in eindig veel stappen vanuit elke andere state bereikbaar is. Laat zien dat de Markov processen met overgangsmatrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

irreducibel zijn.

97. We bekijken de emotionele robot uit sectie 12.2 en bepalen de kansverdeling voor zijn toestand na twee inputs.

(i) Veronderstel dat de robot in het begin gelukkig is en bereken de kansverderdeling voor elk van de vier mogelijke inputs $XX$, $XY$, $YX$ en $YY$.

(ii) Bereken de kansverdelingen voor de verschillende inputs ook voor de gevallen dat de robot in het begin bedroefd of mal was.

98. De states $S_1, S_2, S_3$ van een Hidden Markov model zijn (net als in het voorbeeld) drie munten die de emissiekansen $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}$ op kop (`K`) en de emissiekansen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ op munt (`M`) hebben. De beginverdeling van de states is uniform, dus $\pi(1) = \pi(2) = \pi(3) = \frac{1}{3}$. We bekijken de drie rijen waarnemingen $O_1 = \texttt{KKKK}$, $O_2 = \texttt{KKKM}$, $O_3 = \texttt{KKMM}$.

(i) Veronderstel dat alle overgangskansen hetzelfde zijn, dus gelijk aan $\frac{1}{3}$. Bepaal de rijen $q_1, q_2, q_3$ van states, waarvoor de kans dat zij de waarnemingen $O_1, O_2, O_3$ geproduceerd hebben maximaal is. Bereken voor de gevonden rijen van states de kansen $p(O_1, q_1)$, $p(O_2, q_2)$, $p(O_3, q_3)$.

(ii) Vergelijk de kansen uit (i) met de kansen $p(O_i, q)$ die men krijgt, als men aanneemt dat altijd de eerlijke munt geworpen wordt, dus als $q = S_1S_1S_1S_1$ is.

(iii) Veronderstel nu dat de overgangskansen niet uniform zijn, maar gegeven door de matrix

$$A = (a_{ij}) := \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Bereken de kansen $p(O_i, q_i \mid A)$ voor de rijen van states uit deel (i) en de kansen $p(O_i, q \mid A)$ voor de rij $q$ van states uit deel (ii) met betrekking tot deze overgangskansen.

(iv) Probeer in deel (iii) de rijen $q'_1, q'_2, q'_3$ van states te vinden, zo dat $p(O_i, q'_i \mid A)$ maximaal wordt.