Les 4 Integratie van functies van meerdere variabelen

In deze les gaan we het omgekeerde van de afgeleide, de integratie bekijken, en zien hoe we deze voor functies van meerdere variabelen definiëren en uitrekenen. De functies waar we het hierbij over hebben zijn weer functies van n variabelen die waarden in $\mathbb{R}$ hebben, dus functies $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Net zo als we met de integraal voor een gewone functie van één variabel de oppervlakte onder een grafiek berekenen, geeft de integraal voor een functie van twee variabelen het volume onder de grafiek van de functie aan. Analoog geeft voor een algemene functie van n variabelen de integraal een (veralgemeend) volume in de $n+1$-dimensionale ruimte aan.

Meerdimensionale integralen hebben veel toepassingen in de patroonverwerking, bijvoorbeeld is de intensiteit van een plaatje een functie van de $x-y$-coördinaten en is de totale intensiteit op een gebied de integraal van de intensiteit over dit gebied. Maar ook voor kansverdelingen van gecombineerde stochasten die door een dichtheidsfunctie gegeven zijn, moeten we meerdimensionale integralen berekenen om de kans op uitkomsten in een zeker interval te vinden of de verwachtingswaarde te bepalen.

We zullen in deze les vooral functies van twee of drie variabelen behandelen, omdat deze belangrijke toepassingen hebben en het schrijfwerk hierbij nog beperkt is. Het algemene geval werkt echter op een analoge manier en bevat geen verdere complicaties.

4.1 Integratie op (veralgemeende) rechthoeken

Voor een functie $f(x)$ van één variabel hebben we de integraal $\int_a^b f(x)\,dx$ gedefinieerd als limiet van de som $\sum_{i=0}^{N-1} f(a+i\Delta x)\Delta x$, waarbij $N \cdot \Delta x = b-a$, dus

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(a+i\Delta x)\cdot\Delta x, \text{ waarbij } \Delta x = \frac{b-a}{N}.$$

Het idee hierbij is, de oppervlakte onder de grafiek van $f(x)$ te benaderen door een rij van rechthoeken van breedte Δx en hoogte $f(a+i\Delta x)$.

In de wiskunde is een iets algemenere definitie gebruikelijk, waarbij men punten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} < x_N = b$ kiest en de som $\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$ bekijkt. Dit betekent gewoon dat de rechthoeken niet alle even breed hoeven te zijn. Voor de limiet is het dan wel noodzakelijk dat het maximum van de intervallen $(x_{i+1}-x_i)$ tegen 0 gaat.

Voor de functies waar we het hier over hebben is onze eenvoudigere definitie echter voldoende, de gevallen waar de definities tot verschillende resultaten leiden zijn erg pathologisch.

Dit idee kunnen we nu als volgt op functies van meerdere veranderlijke veralgemenen: Uit een interval $[a, b]$ voor de variabel x wordt bij twee variabelen x en y de combinatie van twee intervallen, één voor x en één voor y, dit geeft de rechthoek

$$R_{a,b,c,d} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d\}.$$

Analoog krijgen we voor een functie van drie variabelen een blok

$$B_{a,b,c,d,e,f} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d,\, e \leq z \leq f\}.$$

Algemeen geeft bij n variabelen $x_1, \ldots, x_n$ de combinatie van n intervallen $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ de n-dimensionale rechthoek

$$R_{a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ voor } i = 1, \ldots, n\}.$$

De integratie over een rechthoek wordt nu analoog met het geval van één variabel gedefinieerd als limiet van de som over pilaren met als grondvlak een rechthoek met zijden $\Delta x, \Delta y$ en hoogte $f(a + i\Delta x, c + j\Delta y)$. Het volume van zo'n pilaar is natuurlijk $f(a + i\Delta x, c + j\Delta y) \cdot \Delta x \Delta y$. Men definieert dus:

$$\int_{R_{a,b,c,d}} f(x, y)\, dA = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(a + i\Delta x, c + j\Delta y) \cdot \Delta x \Delta y,$$

waarbij $N = \frac{b-a}{\Delta x}$ en $M = \frac{d-c}{\Delta y}$. Hierbij schrijven we het symbool dA voor het *differentiaal* van een oppervlakte element, dus voor de limiet van de rechthoeken met zijden $\Delta x, \Delta y$.

In een algemenere definitie wordt de rechthoek $R_{a,b,c,d}$ in kleine stukken ΔA_i gesplitst, die niet noodzakelijk rechthoekig hoeven te zijn. Men kiest nu in elk stuk A_i een punt (x_i, y_i) en benadert de integraal door de som $\sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)\Delta A_i$. Voor de limiet moet de diameter van de ΔA_i tegen 0 gaan.

Ook hier geldt, dat dit voor redelijke functies geen verschil met onze eenvoudigere definitie geeft. Als redelijk beschouwen we hierbij functies, die stuksgewijs continu zijn.

In de definitie hebben we het met twee limieten tegelijkertijd te maken, met de limiet $\Delta x \to 0$ en de limiet $\Delta y \to 0$. Deze kunnen we op verschillende manieren berekenen, we kunnen of eerst de limiet over Δx en dan die over Δy uitvoeren, of andersom, of we kunnen de twee tegelijkertijd tegen 0 laten gaan. Het is niet vanzelfsprekend dat de verschillende manieren in elk geval hetzelfde resultaat geven, en bij zekere functies is dit helaas ook niet het geval. Maar we mogen hier weer ervan uitgaan, dat het voor de functies die we in de praktijk tegenkomen wel goed gaat en dat we altijd in de aangename situatie zijn die door de stelling van Fubini weergegeven wordt:

Stelling van Fubini: Als de integraal $\int_{R_{a,b,c,d}} f(x,y)\ dA$ bestaat, dan bestaan ook de functies $g(y) := \int_a^b f(x,y)\ dx$ en $h(x) := \int_c^d f(x,y)\ dy$ en er geldt

$$\begin{aligned}\int_{R_{a,b,c,d}} f(x,y)\ dA &= \int_c^d g(y)\ dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx\right) dy \\ &= \int_a^b h(x)\ dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy\right) dx.\end{aligned}$$

Merk op dat we in $g(y) := \int_a^b f(x,y)\ dx$ bij de integratie de variabel y als constante beschouwen, dit is dus een gewone integratie van één veranderlijke. Hetzelfde geldt voor de functie $h(x)$. We kunnen dus een integraal over een functie van twee variabelen uitwerken door eerst over een van de variabelen te integreren, en vervolgens over de andere, dus door *geïtereerde integraties* van een veranderlijke.

Voorbeeld 1: Zij $f(x,y) := 2x + 3y$ en $R := [0,2] \times [3,4]$. Dan is

$$\begin{aligned}\int_R f(x,y)\ dA &= \int_0^2 \left(\int_3^4 (2x+3y)\ dy\right) dx = \int_0^2 \left((2xy + \frac{3}{2}y^2)\Big|_3^4\right) dx \\ &= \int_0^2 (8x + 24 - 6x - \frac{27}{2})\ dx = \int_0^2 (2x + \frac{21}{2})\ dx \\ &= (x^2 + \frac{21}{2}x)\Big|_0^2 = 4 + 21 = 25.\end{aligned}$$

We kunnen ook eerst over x en dan over y integreren:

$$\begin{aligned}\int_R f(x,y)\ dA &= \int_3^4 \left(\int_0^2 (2x+3y)\ dx\right) dy = \int_3^4 \left((x^2 + 3xy)\Big|_0^2\right) dy \\ &= \int_3^4 (4+6y)\ dy = (4y + 3y^2)\Big|_3^4 = 16 + 48 - 12 - 27 = 25.\end{aligned}$$

We zien dat in dit voorbeeld de tweede manier iets makkelijker is dan de eerste, maar de resultaten zijn natuurlijk hetzelfde.

Voorbeeld 2: Zij $f(x,y) := e^{x+y}$ en $R := [1,2] \times [1,2]$. Dan is

$$\begin{aligned}\int_R f(x,y)\ dA &= \int_1^2 \left(\int_1^2 e^{x+y}\ dy\right) dx = \int_1^2 \left(\int_1^2 e^x \cdot e^y\ dy\right) dx \\ &= \int_1^2 \left(\int_1^2 e^y\ dy\right) e^x\ dx = \int_1^2 \left(e^y\Big|_1^2\right) e^x\ dx \\ &= \int_1^2 (e^2 - e)e^x\ dx = (e^2 - e)\int_1^2 e^x\ dx = (e^2 - e)\cdot e^x\Big|_1^2 \\ &= (e^2 - e)(e^2 - e) = (e^2 - e)^2.\end{aligned}$$

Voor functies van drie variabelen geldt iets soortgelijks als voor functies van twee variabelen, we moeten nu over kleine volume elementen (blokken)

$\Delta x \Delta y \Delta z$ integreren, die in de limiet tot een differentiaal dV van een volume element wordt. Ook de integratie over de kleine volume elementen kunnen we weer opsplitsen in drie gewone integraties, er geldt:

$$\int_{B_{a,b,c,d,e,f}} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\ dx \right) dy \right) dz.$$

Ook hier kunnen we een andere volgorde voor de integraties kiezen, het maakt niets uit of we eerst over x, y of z integreren. Soms scheelt een geschikte keuze van de volgorde zelfs een hoop rekenwerk.

Merk op: In principe is het natuurlijk logisch, dat de eerste integraal $\int_a^b$ met grenzen a en b bij de laatste differentiaal dz hoort, de tweede integraal $\int_c^d$ bij de voorlaatste differentiaal dy enzovoorts. Maar men is vaak iets slordig met de haakjes en ook met de volgorde, en bij ingewikkelde functies wordt de notatie alsnog onoverzichtelijk. Daarom is er een vaak gebruikte conventie, de differentiaal meteen achter de bijhorende integraal te plaatsen om zo duidelijk te maken voor welke integratie variabel de grenzen van dit integraalteken gelden. In plaats van de schrijfwijze hierboven vind je dus ook vaak:

$$\int_{B_{a,b,c,d,e,f}} f(x,y,z)\ dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\ f(x,y,z).$$

Voorbeeld: Zij $f(x,y,z) := \frac{x^2 z^3}{1+y^2}$ en $R := [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Dan is

$$\begin{aligned}
\int_R f(x,y,z)\ dV &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 z^3}{1+y^2}\ dx \right) dz \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\frac{x^3 z^3}{3(1+y^2)} \Big|_0^1 \right) dz \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{z^3}{3(1+y^2)}\ dz \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{z^4}{12(1+y^2)} \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{12(1+y^2)}\ dy \\
&= \frac{1}{12} \arctan(y)\Big|_0^1 = \frac{1}{12}(\frac{\pi}{4} - 0) = \frac{\pi}{48}.
\end{aligned}$$

Opdracht 15 *Bepaal voor $f(x,y) := 2xy + 3y^2$ de integraal $\int_R f(x,y)\ dA$ voor de rechthoek $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\}$ door geïtereerde integratie over x en y. Laat zien dat het resultaat niet van de volgorde van de integraties afhangt.*

4.2 Integratie over normaalgebieden

Het lijkt natuurlijk erg beperkend als we alleen maar over rechthoek gebieden kunnen integreren. In feite is de beperking niet zo groot, want we kunnen een willekeurig gebied benaderen door een combinatie van kleine rechthoeken en als de onderverdeling voldoende fijn is, kunnen we ervan uit gaan dat de fout die we hierbij maken klein (verwaarloosbaar) is. Maar voor gebieden die alleen maar door krommen begrensd zijn (zo als een cirkel), moeten we hiervoor vaak een redelijk groot aantal rechthoeken bekijken om een redelijke benadering te krijgen, en dit is ook weer een beetje vervelend.

Er is echter een algemenere klasse van gebieden dan rechthoek gebieden, waarvoor we de integraal rechtstreeks kunnen uitrekenen, dit zijn de *normaalgebieden*. In het 2-dimensionale geval zijn dit de gebieden van de vorm

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

d.w.z. gebieden die door twee rechte lijnen $x = a$ en $x = b$ evenredig met de y-as en de twee krommen $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ begrensd zijn die elkaar niet snijden. In dit geval geldt

$$\int_B f(x, y)\, dA = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Net zo goed kan men natuurlijk ook twee lijnen evenredig met de x-as en twee krommen $\psi_1(y)$ en $\psi_2(y)$ als grenzen hebben, dit geeft ook een normaalgebied, te weten

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

dan wordt de integraal over B berekend als

$$\int_B f(x, y)\, dA = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

Voorbeeld 1: We berekenen de integraal van de functie $f(x, y) := x^2 y$ over de halfcirkel B van straal 1 rond $(0, 0)$ die boven de x-as ligt. De halfcirkel B is begrensd door de lijnen $x = -1$ en $x = 1$ en de krommen $\varphi_1(x) = 0$ en $\varphi_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$. We hebben dus

$$\begin{aligned}
\int_B f(x, y)\, dA &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y\, dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 (1 - x^2)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - x^4)\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{1}{2} (\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{-1}{3} + \frac{-1}{5}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2: We bepalen de integraal $\int_D x^3 y + \cos(x)\, dA$ op de driehoek D met hoekpunten $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. De driehoek is begrensd door de lijnen $x = 0$ en $x = \frac{\pi}{2}$ en door de functies $\varphi_1(x) = 0$ en $\varphi_2(x) = x$. Hiermee krijgen we:

$$\begin{aligned}
\int_D x^3 y + \cos(x)\, dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x x^3 y + \cos(x)\, dy \right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} x^3 y^2 + \cos(x) y) \Big|_0^x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{2} x^5 + x \cos(x))\, dx \\
&= (\frac{1}{12} x^6 + x \sin(x) + \cos(x)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

(merk op dat met partiële integratie geldt dat $\int x \cos(x)\ \ dx = x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx = x \sin(x) + \cos(x)$).

OPDRACHT 16 *Bepaal de integraal* $\int_G f(x,y)\,dA$ *van de functie* $f(x,y) := x+y$ *op het gebied* G *gegeven door* $G := \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 1 \le y \le e^x\}$.

In drie dimensies zijn normaalgebieden begrensd door een gebied B in het $x-y$-vlak (bijvoorbeeld) en twee functies $\varphi_1(x,y)$ en $\varphi_2(x,y)$, die de variabel z inschakelen. Dan geldt

$$\int_V f(x,y,z)\,dV = \int_B \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA.$$

Na het uitwerken van de binnenste integraal over z is dit terug gebracht tot een integratie met twee variabelen op het 2-dimensionale gebied B, en het zou dus handig zijn als B ook weer een normaalgebied is.

OPDRACHT 17 *Laat zien dat het gebied* B *dat tussen de grafieken van* $y = x^2$ *en* $y = x$ *ligt een normaalgebied is en bepaal de oppervlakte van het gebied* B. *Bereken verder de integraal* $\int_B 1 + 2xy\,dA$.

4.3 Substitutie

Een belangrijke methode in de integratie van gewone functies van één variabel is de substitutie. Het idee hierbij is, de integratievariabel x door een geschikte nieuwe variabel u te vervangen zo dat de integratie makkelijker wordt. Als we in de integraal $\int f(x)\,dx$ de variabel x door een nieuwe variabel u willen vervangen, moeten we de samenhang van x en u kennen, en dit drukken we uit door x te schrijven als een functie $x = x(u)$ van u. Als we nu een functie $g(u)$ definiëren door $g(u) := f(x(u))$ dan zegt de substitutie regel dat

$$\int f(x)\,dx = \int g(u)x'(u)\,du = \int f(x(u))x'(u)\,du.$$

Als we ons nu nog eens herinneren dat de integraal gedefinieerd is als de limiet van de som $\sum f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum f(x_i)\Delta x$, kunnen we precies de reden zien, waarom de differentiaal dx door de nieuwe differentiaal $x'(u)du$ vervangen moet worden. In een kleine omgeving van u vervangen we de functie $x(u)$ door de lineaire benadering van de Taylor reeks, dus door de lineaire functie $x(u+\Delta u) \approx x(u) + x'(u)\Delta u$. Maar hieruit volgt dat

$$\Delta x = x(u+\Delta u) - x(u) = x'(u)\Delta u,$$

de afgeleide $x'(u)$ geeft dus juist aan hoe groot de stappen Δx worden waarin we x veranderen als we u in stappen van Δu veranderen.

Als we nu weer naar de limiet $\Delta x \to 0$ kijken, krijgen we de relatie

$$dx = x'(u)\,du$$

voor de differentialen.

De Jacobi matrix

Het idee van de substitutie voor gewone functies gaan we nu veralgemenen op functies van meerdere variabelen. Zij $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een functie van de n variabelen $x_1, \ldots, x_n$.

Stel we willen nu nieuwe variabelen $u_1, \ldots, u_n$ hanteren, dan hangen de x_i van de nieuwe variabelen u_j af, en we schrijven x_i als functie

$$x_i(\mathbf{u}) = x_i(u_1, \ldots, u_n).$$

Net zo als boven kunnen we nu in een kleine omgeving van $\mathbf{u}$ de functie $x_i(\mathbf{u})$ door de lineaire benadering vervangen, dit geeft

$$x_i(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = x_i(\mathbf{u}) + \nabla x_i(\mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u}.$$

Als we de componenten $x_i(\mathbf{u})$ nu in een vector schrijven, krijgen we een functie $\mathbf{x}(\mathbf{u}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeven door

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) := \begin{pmatrix} x_1(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ x_n(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

en als lineaire benadering hiervan krijgen we:

$$\mathbf{x}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} x_1(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) \\ \vdots \\ x_n(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ x_n(\mathbf{u}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla x_1(\mathbf{u})^{tr} \\ \vdots \\ \nabla x_n(\mathbf{u})^{tr} \end{pmatrix} \Delta\mathbf{u}.$$

Maar de matrix $J := \begin{pmatrix} \nabla x_1(\mathbf{u})^{tr} \\ \vdots \\ \nabla x_n(\mathbf{u})^{tr} \end{pmatrix}$ is een oude bekende, in de i-de rij staat namelijk in de j-de kolom de afgeleide van $x_i(\mathbf{u})$ naar de variabel u_j, dus de partiële afgeleide $\frac{\partial x_i}{\partial u_j}$. Dit betekent, dat J juist de *Jacobi matrix* van $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ is en we hebben gevonden dat

$$\mathbf{x}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) = \mathbf{x}(\mathbf{u}) + J \cdot \Delta\mathbf{u} \quad \text{en dus} \quad \Delta\mathbf{x} := \mathbf{x}(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) - \mathbf{x}(\mathbf{u}) = J \cdot \Delta\mathbf{u}.$$

Dit is volledig analoog met de formule voor gewone functies, de Jacobi matrix J is de veralgemening van de afgeleide $x'(u)$ die we toen hadden.

Betekenis van de Jacobiaan

We zullen nu de rol van de Jacobi matrix voor de substitutie van functies van meerdere variabelen toelichten. Hiervoor kijken we eerst naar een functie van twee variabelen, x en y. We kiezen twee nieuwe variabelen u en v en schrijven x en y als functies van u en v, dus $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Met behulp van de Jacobi matrix J kunnen we nu de functie

$$(x(u, v), y(u, v)) : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$$

in een omgeving van (u, v) door de Taylor veelterm van graad 1 benaderen, voor het verschil van de functiewaarden geldt dan:

$$\begin{pmatrix} \Delta x(u,v) \\ \Delta y(u,v) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x(u+\Delta u, v+\Delta v) - x(u,v) \\ y(u+\Delta u, v+\Delta v) - y(u,v) \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

Bij de substitutie van functies met één variabel hebben we gezien dat we de differentiaal dx door $x'(u)\,du$ moeten vervangen. De vraag is nu, hoe in het geval van twee variabelen de differentiaal $dA = dx\,dy$ met de nieuwe differentiaal $du\,dv$ samenhangt.

Om hier uit te komen, gaan we even een stap terug en interpreteren de integraal weer als som van pilaren over kleine rechthoeken met zijden $\Delta x, \Delta y$. Zo'n rechthoek moeten we nu door de nieuwe variabelen u en v beschrijven, en bij benadering lukt dit in een punt (x, y) met behulp van de Jacobi matrix door de vergelijking

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

Omdat J en dus ook J^{-1} een lineaire afbeelding is, is het beeld van de rechthoek met zijden $\Delta x, \Delta y$ onder J^{-1} een parallellogram. De vraag is nu wat de oppervlakte van dit parallellogram is.

De oplossing van dit vraagstuk is verrassend eenvoudig, we hebben alleen maar de determinant van J nodig.

Stelling: De absolute waarde van de determinant $\det(A)$ van een $n \times n$-matrix A geeft het *volume* van het parallellepipedum aan, dat door de kolommen van de matrix A opgespannen wordt.

Met andere woorden is $|\det(A)|$ het volume van het beeld onder A van de eenheidsvierkant (eenheidskubus, eenheidshyperkubus, enz.) die door de standaardbasis opgespannen wordt.

Deze stelling kunnen we als volgt inzien:

Voor een diagonaalmatrix A is het opspansel van de kolommen van A een rechthoek, blok, enzovoorts, en het volume hiervan is het product van de absolute waarden van de elementen op de diagonaal. Maar dit is ook de absolute waarde van de determinant van de matrix A.

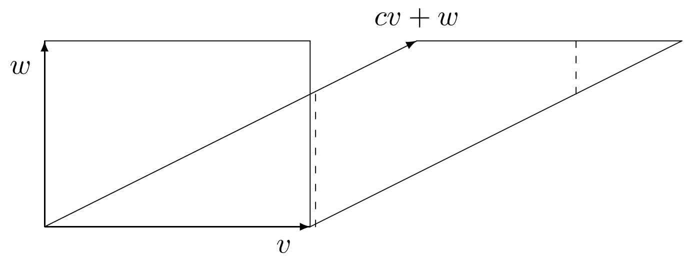
Verder weten we dat we elke matrix door elementaire transformaties op diagonaal vorm kunnen brengen, we moeten dus alleen maar kijken, wat er met het volume gebeurt als we een elementaire transformatie toepassen:

(i) Als we twee kolommen verwisselen, verandert het parallellepipedum niet, het volume blijft dus hetzelfde. De determinant wordt hierbij met -1 vermenigvuldigd, maar de absolute waarde blijft gelijk.

(ii) Als we een kolom met een factor $c \neq 0$ vermenigvuldigen, wordt ook het volume van het parallellepipedum $|c|$ keer zo groot. Maar in dit geval wordt ook de determinant met c vermenigvuldigd.

(iii) Als we een veelvoud van een vector bij een andere optellen, verandert de determinant niet, dus mag ook het volume bij deze transformatie niet veranderen. Omdat hierbij alleen maar twee vectoren een rol spelen, is het voldoende dit in het 2-dimensionale geval te bekijken. De schets hieronder licht dit toe.

De rechthoek opgespannen door de vectoren v en w en het parallellogram opgespannen door v en $cv + w$ hebben dezelfde oppervlakte, omdat de oppervlakte van een parallellogram gelijk is aan het product van de grondzijde en de hoogte.



Dat de rechthoek en het parallellogram dezelfde oppervlakte hebben, laat zich ook door knippen en plakken aantonen, als we het parallellogram langs de twee stippellijnen in stukken snijden, zien we makkelijk in dat de delen de rechthoek precies overdekken.

De stelling hierboven toegepast op de Jacobi matrix betekent dat het parallellogram met zijden $\Delta u, \Delta v$ oppervlakte $|\det(J^{-1})| \cdot \Delta x \Delta y$ heeft en hieruit volgt omgekeerd dat

$$\Delta x \Delta y = |\det(J)| \cdot \Delta u \Delta v.$$

Door nu weer de limieten $\Delta x \to 0$ en $\Delta y \to 0$ te nemen, krijgen we dat voor de differentialen geldt dat

$$dx\, dy = |\det(J)|\; du\, dv.$$

Omdat de determinant van de Jacobi matrix zo'n belangrijke rol speelt, heeft deze ook een eigen naam, ze heet *Jacobiaan.*

Het argument dat we net op twee variabelen hebben toegepast, geldt natuurlijk volledig analoog voor functies van meerdere veranderlijken. We transformeren de variabelen $x_1, \ldots, x_n$ op nieuwe variabelen $u_1, \ldots, u_n$ met $x_i = x_i(u_1, \ldots, u_n)$ en bepalen de Jacobi matrix J met $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$, dan geldt:

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_n \end{pmatrix}$$

en tussen de n-dimensionale volumes van de blok $\Delta x_1 \ldots \Delta x_n$ en het parallellepipedum $\Delta u_1 \ldots \Delta u_n$ bestaat de relatie

$$\Delta x_1 \ldots \Delta x_n = |\det(J)| \cdot \Delta u_1 \ldots \Delta u_n.$$

Voor de differentialen van de volume elementen geldt dus:

$$dx_1\, dx_2 \dots dx_n = |\det(J)|\, du_1\, du_2 \dots du_n.$$

De Jacobiaan speelt dus bij functies van meerdere veranderlijken precies de rol van de afgeleide in het geval van functies van één veranderlijke.

Substitutieregel voor functies van meerdere variabelen

We kunnen nu de substitutieregel voor functies van meerdere veranderlijken formuleren. Voor het gemak doen we dit eerst voor functies van twee veranderlijken en geven dan de algemene regel aan.

Substitutieregel voor twee variabelen: Voor een coördinatentransformatie naar nieuwe variabelen u en v met $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ en Jacobi matrix $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ wordt een functie $f(x, y)$ met betrekking tot de nieuwe coördinaten geschreven als $g(u, v)$ met $g(u, v) := f(x(u, v), y(u, v))$.

Voor de integraal van $f(x, y)$ over een gebied $B \subseteq \mathbb{R}^2$ geldt dan in de nieuwe coördinaten:

$$\int_B f(x, y)\; dx\, dy = \int_{B'} g(u, v)\; |\det(J)|\; du\, dv.$$

Hierbij moet het gebied B' in het $u{-}v$-vlak zo gekozen worden, dat (x, y) over B loopt als (u, v) over B' loopt, waarbij elke punt in B precies een keer voorkomt. Dit betekent dat de afbeelding $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \end{pmatrix}$ een bijectieve (omkeerbare) afbeelding van B' naar B is.

> In de praktijk spelen vooral speciale coördinatentransformaties een rol die we hieronder gaan bespreken. Bij deze transformaties laat zich de vraag of de afbeelding omkeerbaar is eenvoudig beantwoorden.
>
> Algemeen is de omkeerbaarheid een lastige vraag. Als de Jacobi matrix in een punt een inverteerbare matrix is, is de functie in een kleine omgeving van dit punt omkeerbaar (men noemt de functie dan lokaal inverteerbaar in dit punt). Maar hieruit volgt helaas niet dat de functie globaal omkeerbaar op een gebied B is, er bestaan zelfs functies die in iedere punt van een gebied B lokaal inverteerbaar zijn, maar niet omkeerbaar op B.

Voorbeeld: We bepalen de integraal van $f(x, y) := e^{\frac{y}{x+y}}$ op de driehoek gegeven door $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 - x\}$. De driehoek is een normaalgebied en in principe kunnen we de integratie opsplitsen in twee in elkaar geschakelde gewone integraties, namelijk

$$\int_B f(x, y)\; dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\; dy\, dx.$$

Het probleem is, dat deze integraal niet zo eenvoudig op te lossen is.

Een slimme transformatie van de variabelen is

$$x + y = u, \quad y = uv, \qquad \text{dus } x = u - uv, \quad y = uv.$$

Merk op dat de transformatie juist zo gekozen is dat $e^{\frac{y}{x+y}} = e^{\frac{uv}{u}} = e^v$ wordt.

We gaan na dat (x, y) over B loopt als (u, v) over de eenheidsvierkant $B' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le u \le 1,\, 0 \le v \le 1\}$ loopt: Ten eerste is duidelijk dat $x \ge 0$ en $y \ge 0$ voor $(u, v) \in B'$. Verder is $x = u(1 - v) \le 1$, omdat $u \le 1$ en $1 - v \le 1$ zijn. Net zo is $y = uv \le 1$. Ten slotte is $y \le 1 - x \Leftrightarrow uv \le 1 - u + uv \Leftrightarrow u \le 1$, dus geldt ook $y \le 1 - x$.

Omgekeerd moeten we nagaan dat alle punten van B echt doorlopen worden. Maar we kunnen de transformatie expliciet inverteren, er geldt

$$u = x + y \quad \text{en} \quad v = \frac{y}{x + y}$$

en omdat $x + y \le 1$ en $\frac{y}{x+y} \le 1$ voor $x, y \ge 0$ kunnen we voor iedere punt (x, y) een punt (u, v) aangeven, die door de transformatie op (x, y) wordt afgebeeld.

De Jacobi matrix en de Jacobiaan van de transformatie zijn

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \det(J) = (1 - v)u - (-uv) = u.$$

Met de transformatie op de nieuwe variabelen u en v krijgen we dus:

$$\int_B f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^1 e^v \cdot u\, du\, dv = \int_0^1 e^v \int_0^1 u\, du\, dv = \int_0^1 e^v \frac{1}{2}\, dv = \frac{1}{2}(e - 1).$$

Algemene substitutieregel voor meerdere veranderlijken: We vervangen de coördinaten $x_1, \ldots, x_n$ door nieuwe coördinaten $u_1, \ldots, u_n$ zo dat $x_i = x_i(u_1, \ldots, u_n)$ een functie van de nieuwe coördinaten wordt en noteren met J de Jacobi matrix van de coördinatentransformatie, d.w.z. $J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}$.

Herschrijven van een functie $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ in de nieuwe coördinaten geeft een nieuwe functie

$$g(\mathbf{u}) = g(u_1, \ldots, u_n) := f(x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)).$$

Voor de integraal van $f(\mathbf{x})$ over een gebied $B \subseteq \mathbb{R}^n$ geldt dan met betrekking tot de nieuwe coördinaten:

$$\int_B f(\mathbf{x})\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{B'} g(\mathbf{u})\, |\det(J)|\, du_1 \ldots du_n.$$

4.4 Poolcoördinaten, cilindercoördinaten, sferische coördinaten

De belangrijkste toepassingen van substitutie bij functies van meerdere variabelen zijn transformaties tussen verschillende standaard stelsels van coördinaten.

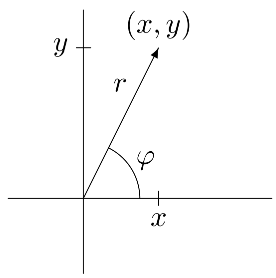
Als functies in het 2-dimensionale vlak alleen maar van de afstand van de oorsprong afhangen, is het vaak handig het probleem op *poolcoördinaten* te transformeren. Hierbij wordt een punt (x, y) door zijn afstand van de oorsprong en door een hoek beschreven.

Ook in de 3-dimensionale ruimte zijn er naast de gewone cartesische coördinaten nog twee andere stelsels coördinaten, die geschikt zijn voor zekere situaties, namelijk de *cilindercoördinaten* en de *sferische coördinaten* (ook *kogelcoördinaten* genoemd).

Poolcoördinaten

Bij functies van twee variabelen zijn vaak *poolcoördinaten* handig, in het bijzonder als het over integratie van functies op ronde gebieden gaat.

Het idee bij de poolcoördinaten is, een punt (x, y) door zijn afstand r van de oorsprong en door de hoek tussen de lijn door de oorsprong en (x, y) en de positieve x-as te beschrijven, zo als in de schets hieronder te zien:



Figuur I.13: Poolcoördinaten

Tussen de gewone coördinaten x, y en de poolcoördinaten r, φ bestaat het volgende verband:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi), & y &= r\sin(\varphi) \\ r &= x^2 + y^2, & \tan(\varphi) &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

In het bijzonder wordt een cirkelschijf $B(0, R) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ in poolcoördinaten een rechthoek, namelijk $[0, R] \times [0, 2\pi]$.

Voor de partiële afgeleiden van de transformatie $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ geldt:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\varphi), \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos(\varphi).$$

Hieruit volgt dat de Jacobi matrix J gelijk is aan

$$J = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

en de Jacobiaan $\det(J)$ is dus

$$\det(J) = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r.$$

Voor een functie $f(x, y)$ en $g(r, \varphi) := f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ geldt dus de substitutieregel

$$\int f(x, y)\, dx\, dy = \int g(r, \varphi)\, r\ dr\, d\varphi.$$

Een eerste toepassing van de poolcoördinaten is natuurlijk het berekenen van de oppervlakte van een cirkel met straal R. Dit kunnen we berekenen door de constante functie $f(x,y) = 1$ over het gebied $B := B(0,R) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$ te integreren. Maar in poolcoördinaten wordt B de rechthoek $B' = [0,R] \times [0,2\pi]$, want als (r,φ) over B' loopt, loopt (x,y) precies een keer over B. We hebben dus

$$\int_B 1\,dx\,dy = \int_{B'} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r\,dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R \right) d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} R^2\,d\varphi = \frac{1}{2} R^2 \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2.$$

OPDRACHT 18 *Bepaal de integraal* $\int_B (x^2 + 2xy)\,dA$ *op de halfcirkel* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0$. *Transformeer de functie (en het gebied) hiervoor op poolcoördinaten. (Herinnering: Met partiële integratie volgt* $\int \cos^2(x) = \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x) = \sin(x)\cos(x) + \int (1 - \cos^2(x)) = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x)$.*)*

Toepassing: Normaalverdeling

Een iets verrassendere toepassing van poolcoördinaten is dat we nu de integraal over de Gauss-functie e^{-x^2} kunnen berekenen die we in de normaalverdeling tegenkomen en waarvan we tot nu toe de integraal niet analytisch konden bepalen.

Hiervoor bekijken we de analoge functie in twee variabelen, namelijk de functie $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)}$ en integreren deze functie één keer over een cirkel van straal R en één keer over een vierkant met lengte $2a$.

Zij eerst $B := B(0,R) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$, dan is

$$\int_B e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) e^{-r^2} r\,dr = 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r\,dr$$
$$= 2\pi(-\frac{1}{2} e^{-r^2})\Big|_0^R = -\pi(e^{-R^2} - 1) = \pi(1 - e^{-R^2})$$

Zij nu $B' := V(-a,a) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \le a, |y| \le a\}$ de vierkant met lengte $2a$ rond 0, dan is

$$\int_{B'} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-(x^2+y^2)} dx \right) dy = \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2}\,dy$$
$$= (\int_{-a}^a e^{-x^2}\,dx)(\int_{-a}^a e^{-y^2}\,dy) = (\int_{-a}^a e^{-x^2}\,dx)^2$$

Maar de cirkel $B(0,a)$ van straal a ligt volledig in het vierkant $V(-a,a)$ en dit ligt wederom volledig in de cirkel $B(0, \sqrt{2}\,a)$ met straal $\sqrt{2}\,a$. Omdat de functie $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ is, volgt hieruit

$$\pi(1 - e^{-a^2}) \le (\int_{-a}^a e^{-x^2}\,dx)^2 \le \pi(1 - e^{-2a^2}).$$

Als we nu de limiet $a \to \infty$ laten lopen, wordt de rechter en de linker zijde van deze ongelijkheden gelijk aan π, en dus hebben we bewezen dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Cilindercoördinaten

In de 3-dimensionale ruimte komt het vaak voor dat een probleem symmetrisch ten opzichte van een rotatie as is. Dit is bijvoorbeeld het geval voor het elektrische veld rond een rechte geleider. Bij dit soort problemen zijn *cilindercoördinaten* heel praktisch, die veronderstellen dat de rotatie-as de z-as is. Het idee van de cilindercoördinaten is, een punt (x, y, z) te beschrijven door poolcoördinaten voor het $x - y$-vlak en de gewone z-coördinaat.

Dit geeft:

$$x = r\cos(\varphi), \qquad y = r\sin(\varphi), \qquad z = z,$$

waarbij $r > 0$ en $\varphi \in [0, 2\pi)$. De Jacobi matrix J hiervan is

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en de Jacobiaan is

$$\det(J) = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) = r.$$

Hieruit volgt voor een functie $f(x, y, z)$ en $g(r, \varphi, z) := f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$:

$$\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int g(r, \varphi, z)\, r\ dr\, d\varphi\, dz.$$

Sferische coördinaten

Bij functies op de 3-dimensionale ruimte die eigenlijk alleen maar van de afstand van een punt afhangen (zo als de gravitatie kracht of de intensiteit van een geïdealiseerde bron van licht) worden vaak *sferische coördinaten* toegepast. Het idee is, een punt door zijn afstand en twee ruimtelijke hoeken aan te geven.

Men splitst de vector van de oorsprong naar het punt (x, y, z) in zijn projecties in het $x - y$-vlak en op de z-as. De projectie in het $x - y$-vlak wordt door poolcoördinaten r en φ aangegeven en de projectie op de z-as met behulp van de hoek θ tussen (x, y, z) en de z-as (zie de schets in Figuur I.14).

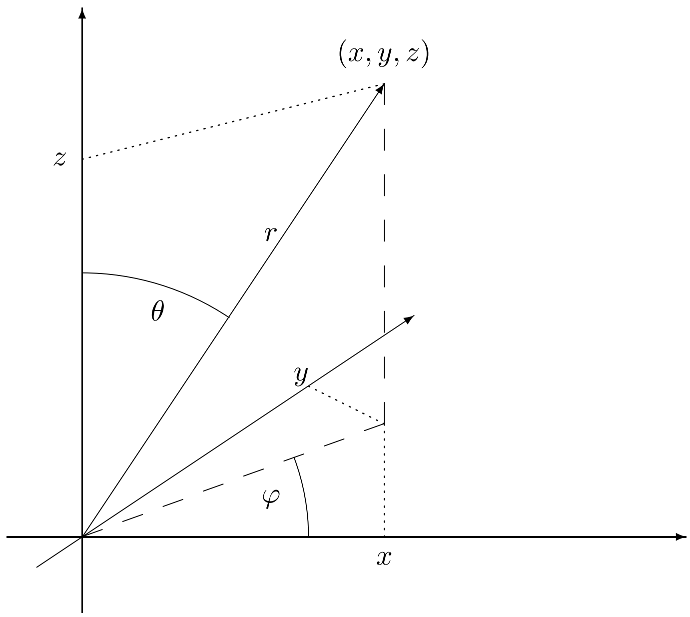
De coördinatentransformatie luidt:

$$x = r\cos(\varphi)\sin(\theta), \qquad y = r\sin(\varphi)\sin(\theta), \qquad z = r\cos(\theta)$$

waarbij $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [0, \pi]$.

De Jacobi matrix J hiervan is

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\theta) & -r\sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & r\cos(\varphi)\sin(\theta) & r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$



Figuur I.14: Sferische coördinaten

en voor de Jacobiaan $\det(J)$ krijgt men in dit geval

$$\begin{aligned}\det(J) &= -\,r^2\cos^2(\varphi)\sin^3(\theta) - r^2\sin^2(\varphi)\cos^2(\theta)\sin(\theta)\\ &\quad -r^2\cos^2(\varphi)\cos^2(\theta)\sin(\theta) - r^2\sin^2(\varphi)\sin^3(\theta)\\ &= -\,r^2\sin^3(\theta) - r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\\ &= -\,r^2\sin(\theta).\end{aligned}$$

Omdat $\sin(\theta) > 0$ is $|\det(J)| = r^2\sin(\theta)$ en dus

$$\int f(x, y, z)\; dx\, dy\, dz = \int g(r, \varphi, \theta)\, r^2 \sin(\theta)\; dr\, d\varphi\, d\theta,$$

waarbij $g(r, \varphi, \theta) := f(r\cos(\varphi)\sin(\theta), r\sin(\varphi)\sin(\theta), r\cos(\theta))$.

Een alternatieve versie van de sferische coördinaten gebruikt voor de hoek θ in plaats van de hoek tussen (x, y, z) en de z-as de hoek tussen (x, y, z) en het $x - y$-vlak. Dit geeft

$$x = r\cos(\varphi)\cos(\theta), \quad y = r\sin(\varphi)\cos(\theta), \quad z = r\sin(\theta),$$

waarbij $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
In dit geval wordt $dx\, dy\, dz = r^2\cos(\theta)\; dr\, d\varphi\, d\theta$.

De eenvoudigste toepassing van sferische coördinaten is het bepalen van het volume V van een kogel $B := B(0, R)$ van straal R. De functie $f(x, y, z)$ is in dit geval $f(x, y, z) = 1$, dus hebben we

$$\begin{aligned} V &= \int_B 1 \; dx\, dy\, dz = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} r^2 \sin(\theta) \; dr\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} R^3 \sin(\theta) \; d\varphi\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{2\pi}{3} R^3 \sin(\theta) \; d\theta = \frac{2\pi}{3} R^3 (-\cos(\theta))\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{4\pi}{3} R^3. \end{aligned}$$

4.5 Toepassingen

Oppervlaktes, volumes

Een belangrijke toepassing voor integralen over functies van meerdere variabelen is het bepalen van oppervlaktes en volumes. Voorbeelden hiervan hebben we al gezien, namelijk de oppervlakte van een cirkel en het volume van een kogel. De manier van aanpak is steeds dezelfde: Men integreert de constante functie die overal de waarde 1 heeft over het gebied waarvan men de oppervlakte of het volume wil bepalen. De kunst ligt hierbij meestal niet zo zeer in de integratie, maar in het beschrijven van het gebied. Soms is het mogelijk een gebied in meerdere delen te splitsen die als normaalgebieden te beschrijven zijn en vaak helpt een geschikte keuze van nieuwe coördinaten.

Vaak is het ook handig één van de standaard coördinatentransformaties te combineren met een verdere substitutie. Een voorbeeld hiervoor is het berekenen van de oppervlakte van een ellips.

Zij E een ellips rond het nulpunt $(0, 0)$ met hoofdassen van lengte a en b in de richtingen van de x-as en de y-as, dan wordt E beschreven door:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

Door de transformatie op nieuwe coördinaten u, v met $x = au$ en $y = bv$ wordt E op de eenheidscirkel $B(0, 1)$ getransformeerd, want $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(au)^2}{a^2} + \frac{(bv)^2}{b^2} = u^2 + v^2 \leq 1$. De Jacobi matrix voor deze substitutie is heel eenvoudig, we hebben $J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ en dus $\det(J) = ab$. Hieruit volgt dat

$$\int_E 1 \; dx\, dy = \int_{B(0,1)} ab \; du\, dv = ab \int_{B(0,1)} 1 \; du\, dv = \pi ab.$$

Zwaartepunten

Een verdere toepassing van meervoudige integralen is het berekenen van zwaartepunten van objecten. Het zwaartepunt is een soort gemiddelde van het object en in drie dimensies kunnen de coördinaten (x_s, y_s, z_s) van het zwaartepunt van een object B met volume V berekenen als $x_s = \frac{1}{V} \int_B x \;\; dx\, dy\, dz$ $y_s = \frac{1}{V} \int_B y \;\; dx\, dy\, dz$ $z_s = \frac{1}{V} \int_B z \;\; dx\, dy\, dz$ waarbij we veronderstellen dat de dichtheid van het object overal hetzelfde is.

Maar we kunnen het zwaartepunt ook berekenen als de dichtheid niet constant is, maar een functie $\rho(x, y, z)$. De massa van B berekenen we door $M = \int_B \rho(x, y, z)\ dx\,dy\,dz$, dus geeft de functie $\frac{1}{M}\int_B \rho(x, y, z)\ dx\,dy\,dz$ de verdeling van de massa over B aan. Deze verdelingsfunctie moeten we nu gewoon in de integralen invullen en krijgen zo $x_s = \frac{1}{M}\int_B x\rho(x, y, z)\ dx\,dy\,dz$ $y_s = \frac{1}{M}\int_B y\rho(x, y, z)\ dx\,dy\,dz$ $z_s = \frac{1}{M}\int_B z\rho(x, y, z)\ dx\,dy\,dz$ Het speciaal geval voor constante dichtheid $\rho(x, y, z) = \rho$ volgt hieruit met $V = \int_B dx\,dy\,dz$, omdat dat $M = \int_B \rho\ dx\,dy\,dz = \rho \cdot V$, dus $\frac{\rho}{M} = \frac{1}{V}$.

In het kader van de kansrekening is het taalgebruik is anders en het zwaartepunt is een oude bekende. Als $f(x, y)$ of $f(x, y, z)$ de dichtheidsfunctie van een meerdimensionale kansverdeling is, heet het zwaartepunt namelijk de *verwachtingswaarde* van de kansverdeling. De dichtheidsfunctie speelt precies de rol van de functie $\frac{1}{M}\rho(x, y, z)$ voor de verdeling van de massa, want de integraal over het hele gebied is gelijk aan 1.

Als voorbeeld berekenen we het zwaartepunt van een halfkogel H met straal R rond het nulpunt $(0, 0, 0)$ die boven het $x-y$-vlak ligt. We gaan van constante dichtheid uit. Een halfkogel beschrijven we het makkelijkste met sferische coördinaten, we moeten alleen maar over de hoek θ tussen (x, y, z) en de z-as nadenken. Bij een volle kogel loopt die van 0 tot π en voor punten in het $x - y$-vlak is $\theta = \frac{\pi}{2}$, dus loopt θ nu van 0 tot $\frac{\pi}{2}$. Uit symmetrie redenen is het duidelijk dat het zwaartepunt op de z-as moet liggen, daarom hoeven we alleen maar de z-coördinaat uit te rekenen. Omdat een volle kogel van straal R het volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ heeft, heeft H het volume $V = \frac{2}{3}\pi R^3$. Er geldt:

$$\begin{aligned}
z_s &= \frac{1}{V}\int_H z\ dx\,dy\,dz = \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\theta)\, r^2 \sin(\theta)\ d\theta\, d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 (\frac{1}{2}\sin^2(\theta)\big|_0^{\frac{\pi}{2}})\ d\varphi\, dr = \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^3\ d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \pi r^3\ dr = \frac{1}{V}\frac{1}{4}\pi r^4\big|_0^R = \frac{\pi}{4V}R^4 = \frac{\pi}{4\frac{2}{3}\pi R^3}R^4 = \frac{3}{8}R.
\end{aligned}$$

Hetzelfde voorbeeld kunnen we ook in cilindercoördinaten uitwerken. In het $x - y$-vlak loopt de straal r dan van 0 tot R, de hoek φ van 0 tot 2π en de z-variabel loopt van 0 tot $\sqrt{R^2 - r^2}$. Hiermee krijgen we:

$$\begin{aligned}
z_s &= \frac{1}{V}\int_H z\ dx\,dy\,dz = \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} z\, r\ dz\, d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2}z^2\big|_0^{\sqrt{R^2-r^2}})\, r\ d\varphi\, dr = \frac{1}{V}\int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(R^2 - r^2) r\ d\varphi\, dr \\
&= \frac{1}{V}\int_0^R \pi(R^2 - r^2) r\ dr = \frac{\pi}{V}\int_0^R (rR^2 - r^3)\ dr = \frac{\pi}{V}(\frac{1}{2}r^2R^2 - \frac{1}{4}r^4)\big|_0^R \\
&= \frac{\pi}{V}\frac{1}{4}R^4 = \frac{3}{8}R.
\end{aligned}$$

Belangrijke begrippen in deze les

- integratie van functies van meerdere variabelen
- geïtereerde integratie
- integratie over rechthoek gebieden
- integratie over normaalgebieden
- Jacobi matrix, Jacobiaan
- substitutie voor functies van meerdere variabelen
- coördinatentransformatie
- poolcoördinaten
- cilindercoördinaten, sferische coördinaten

Opgaven

33. Bereken de volgende 2-dimensionale integralen:

    (i) $\int_B (xy + y^2)\, dA$ met $B = [0, 1] \times [0, 1]$,

    (ii) $\int_B \sin(x + y)\, dA$ met $B = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$,

    (iii) $\int_B (x + y^2)\, dA$, waarbij B de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$ en $(0, 1)$ is.

    (iv) $\int_B (x^2 + y^2)\, dA$, waarbij B de driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$ en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ is.

34. Zij B het gebied tussen de grafieken van $\varphi_1(x) := x^3$ en $\varphi_2(x) := x^2$. Bereken de integralen $\int_B x\, dA$ en $\int_B y\, dA$.

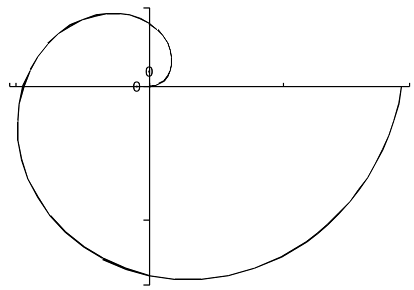
35. Bereken de integraal $\int_B \frac{\sin(x)}{x}\, dA$ voor de driehoek B met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 0)$ en $(1, 1)$. Let op dat hierbij de volgorde van de integraties een rol speelt, want de integraal $\int \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ laat zich niet zonder integraal teken schrijven.

36. Beschrijf het gebied $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3y \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$. en bereken de integraal $\int_B e^{x^2}\, dA$. Dit lukt helaas alleen maar voor een van de twee mogelijke volgordes van integratie.

37. Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de archimedische spiraal (zie Figuur I.15) gegeven door $r = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ en de x-as. Merk op dat de spiraal in poolcoördinaten aangegeven is.

38. Bereken op het gebied $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$ de integraal $\int_B (x^2 + y)\, dx\, dy$.

39. Bepaal de integraal $\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^2\, dA$ met behulp van een transformatie op poolcoördinaten.



Figuur I.15: Archimedische spiraal

40. Bereken het volume van de (onregelmatige) tetraëder die begrensd is door de drie coördinaatvlakken $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$ en het vlak met $z = 2 - 2x - y$.

41. Een cirkelvormige boor van straal R snijdt uit een kogel van straal $2R$ een cilinder langs de z-as uit. Wat is het volume van de cilinder?

42. Een halfkogel H van straal R die op het $x - y$-vlak ligt heeft een niet constante dichtheidsfunctie, de dichtheid hangt namelijk af van de afstand van het grondvlak: $\rho(x, y, z) = az$ voor een $a > 0$. Bereken het zwaartepunt van de halfkogel.