Les 5 Complexe getallen

Iedereen weet, dat kwadraten van getallen positieve getallen zijn. Dat is vaak erg praktisch, we weten bijvoorbeeld dat de functie $f(x) := x^2+1$ steeds positief is en in het bijzonder geen nulpunten heeft. Daarom is bijvoorbeeld ook de functie $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$ voor alle waarden van x gedefinieerd, omdat de noemer nooit 0 wordt.

Aan de andere kant is het feit, dat kwadraten positief zijn, ook een bron van frustratie, we kunnen namelijk vergelijkingen van de vorm $X^2 = a$ voor $a < 0$ niet oplossen.

Nu is het een typische eigenschap van wiskundigen, dat ze in een voor gewone mensen hopeloze situatie (een situatie zonder oplossing) toch vooruit gaan: ze definiëren gewoon iets, waarmee ze verder kunnen.

> Er zijn mensen die beweren dat wiskundigen mensen zijn die geen weg weten met de reële wereld en zich daarom hun eigen wereld definiëren waarin ze zich thuis voelen.

In sommige gevallen zijn de nieuw gedefinieerde objecten misschien niet zo erg nuttig, maar in het geval van de oplossingen van kwadratische vergelijkingen bleek de definitie van de *complexe getallen* een echt succesverhaal te zijn.

5.1 Constructie van de complexe getallen

Het idee achter de *complexe getallen* is dat we een oplossing van de vergelijking $X^2 = -1$ definiëren en kijken wat er gebeurt als we deze oplossing aan de reële getallen $\mathbb{R}$ toevoegen.

Definitie: We noteren de (symbolische) oplossing van de kwadratische vergelijking $X^2 = -1$ met de letter i en noemen i de *imaginaire eenheid*. Voor de imaginaire eenheid i geldt dus dat $i^2 = -1$.

Wat betekent het nu dat we i aan de reële getallen *toevoegen*? We willen zeker dat we i met een willekeurig reëel getal y kunnen vermenigvuldigen, dit geeft getallen van de vorm $i \cdot y$.

Het aardige is dat we hiermee al uit ieder reëel getal de wortel kunnen trekken, want voor $a \geq 0$ konden we dit al eerder en voor $a < 0$ is $-a > 0$, dus bestaat er een $b \in \mathbb{R}$ met $b^2 = -a$ en we hebben $(i \cdot b)^2 = i^2 \cdot b^2 = (-1) \cdot (-a) = a$.

Maar we willen getallen natuurlijk ook optellen, daardoor krijgen we alle getallen van de vorm $x + i \cdot y$ met $x, y \in \mathbb{R}$. Het leuke aan dit verhaal is, dat dit al voldoende is, d.w.z. dat we geen verdere getallen meer nodig hebben om goed met i te kunnen rekenen:

- Het *optellen* van getallen van de vorm $x + i \cdot y$ gebeurt componentsgewijs, waarbij we x en y als de componenten van het getal beschouwen, dus

$$(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2).$$

- Voor het *vermenigvuldigen* moeten we het product van twee getallen gewoon uitwerken:

$$\begin{aligned}(x_1 + i \cdot y_1)(x_2 + i \cdot y_2) &= x_1x_2 + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2) + i^2 \cdot y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

Voorbeeld: We hebben $(1 + i \cdot 2) + (3 - i) = (1 + 3) + i \cdot (2 - 1) = 4 + i$ en $(1 + i \cdot 2)(3 - i) = (3 - (-2)) + i \cdot (-1 + 6) = 5 + i \cdot 5$.

Definitie: De verzameling

$$\mathbb{C} := \{x + i \cdot y \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

met de bewerkingen

$$\begin{aligned}(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2) &= (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2) \\ (x_1 + i \cdot y_1)(x_2 + i \cdot y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2).\end{aligned}$$

heet het *lichaam* $\mathbb{C}$ *der complexe getallen.*

Notatie: Net zo goed als $1 + i \cdot 2$ kunnen we natuurlijk ook $1 + 2i$ schrijven en in feite is $x + yi$ in het algemeen de gebruikelijkere schrijfwijze dan $x + i \cdot y$.

We mogen de verzameling $\mathbb{C}$ een *lichaam* noemen, omdat optellen en vermenigvuldigen commutatief ($a + b = b + a$ en $ab = ba$) en associatief ($(a + b) + c = a + (b + c)$ en $(ab)c = a(bc)$) zijn en omdat de vermenigvuldiging distributief over het optellen is ($a(b + c) = ab + ac$ en $(a + b)c = ac + bc$). Deze eigenschappen erven de complexe getallen gewoon van de reële getallen.

> **Let op:** In de wiskunde staat steeds het symbool i voor de imaginaire eenheid. Maar omdat in de natuurkunde en elektrotechniek traditioneel de letter I (en vroeger ook i) voor de *stroomsterkte* gebruikt wordt, wordt in deze disciplines meestal j voor de imaginaire eenheid geschreven.

Omdat we de complexe getallen verkregen hebben door i aan de reële getallen toe te voegen, zijn de reële getallen in de complexe getallen bevat, namelijk als de getallen van de vorm $x + i \cdot 0$ met $x \in \mathbb{R}$. Aan de andere kant noemt men de getallen van de vorm $i \cdot y$ met $y \in \mathbb{R}$ *zuiver imaginair.*

We hebben al gezien dat een complex getal $z \in \mathbb{C}$ eenduidig door twee reële getallen beschreven wordt, namelijk door $x, y \in \mathbb{R}$ zo dat $z = x + i \cdot y$.

De eerste component x van $z = x + i \cdot y$ heet het *reële deel* van z, genoteerd met $x = \Re(z)$ en de tweede component y heet het *imaginaire deel* van z, genoteerd met $y = \Im(z)$. Er geldt dus:

$$z = \Re(z) + i \cdot \Im(z).$$

> Het is gebruikelijk dat complexe getallen of complexe variabelen z heten, terwijl reële getallen x en y heten. Dit is natuurlijk geen garantie, maar als je de letter z in een formule tegen komt, is dit een sterk signaal dat je het misschien met complexe getallen te maken hebt.

Opdracht 19 *Schrijf de volgende complexe getallen in de standaard vorm $z = x + yi$:*

(i) $(1 + 2i) - 3(5 - 2i)$;

(ii) $(4 - 3i)(8 + i) + 5 - i$;

(iii) $(2 + i)^2$.

5.2 Oplossen van vergelijkingen

We hebben boven al gezien, dat we met behulp van de getallen $i \cdot y$ uit elk reëel getal de wortel kunnen trekken. Dit betekent, dat elke kwadratische veelterm $f(x) = ax^2 + bx + c$ een nulpunt heeft, want de *abc*-formule

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

geeft de nulpunten expliciet aan en we hoeven alleen maar de wortel uit het reële getal $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ te trekken.

Maar de situatie is nog veel beter, we kunnen namelijk zelfs uit een willekeurig *complex getal* de wortel trekken:

Gezocht is een complex getal $z = x + i \cdot y$ met $z^2 = a + i \cdot b$ voor een gegeven complex getal $a + i \cdot b$. Uit $z^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot (xy + yx) = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy$ volgt $x^2 - y^2 = a$ en $2xy = b$. Hieruit berekenen we $a^2 + b^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$, dus hebben we $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ (merk op dat $a^2 + b^2$ positief is).

Door de vergelijkingen $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $x^2 - y^2 = a$ bij elkaar op te tellen en van elkaar af te trekken krijgen we

$$x^2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{2}a \quad \text{en} \quad y^2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} - \frac{1}{2}a$$

en omdat $\sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|$ hebben deze vergelijkingen reële oplossingen x en y.

We moeten wel opletten of we voor x en y de positieve of de negatieve wortel kiezen, want er moet gelden dat $2xy = b$. Als $b \geq 0$ moeten we bij x en y hetzelfde teken kiezen (beide positief of beide negatief), als $b < 0$ moeten x en y verschillende tekens hebben. Het zal geen verrassing zijn dat we in ieder geval twee oplossingen vinden, want met $z^2 = a + bi$ geldt ook $(-z)^2 = a + bi$.

Uit de *abc*-formule volgt nu rechtstreeks dat elke kwadratische veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ ook een nulpunt in $\mathbb{C}$ heeft, of anders gezegd, dat elke kwadratische vergelijking een oplossing in $\mathbb{C}$ heeft. Maar er geldt een veel sterker resultaat, namelijk de

Hoofdstelling van de algebra (I): Elke veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ heeft een nulpunt in $\mathbb{C}$.

Als een veelterm $f(z)$ een nulpunt a_1 heeft, dan kunnen we (met behulp van een staartdeling) $f(z)$ schrijven als $f(z) = (z - a_1)g(z)$ waarbij $g(z)$ een veelterm van lagere graad is. Maar ook $g(z)$ heeft volgens de hoofdstelling van de algebra een nulpunt a_2, en dus kunnen we doorgaan en $f(z)$ schrijven als $f(z) = (z - a_1)(z - a_2)h(z)$ waarbij de graad van $h(z)$ al om 2 kleiner is dan die van $f(z)$.

Uiteindelijk kunnen we een veelterm $f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + c_1 z + c_0$ op deze manier schrijven als $f(z) = c_n(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)$, waarbij de a_i de (niet noodzakelijk verschillende) nulpunten van $f(z)$ zijn. Omdat $z - a$ een lineaire functie is hebben we zo de volgende variatie van de hoofdstelling van de algebra ingezien:

Hoofdstelling van de algebra (II): Elke veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ laat zich (over $\mathbb{C}$) schrijven als een product van lineaire factoren.

Merk op: Over de reële getallen geldt slechts de zwakkere uitspraak: Elke veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{R}$ laat zich (over $\mathbb{R}$) schrijven als een product van lineaire en kwadratische factoren.

Opdracht 20 *Bepaal de (complexe) nulpunten van de volgende veeltermen:*

(i) $z^2 - 2z + 5$;

(ii) $z^2 + \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}$;

(iii) $z^3 + 2z^2 + 2z + 1$ *(een nulpunt is makkelijk te gokken).*

5.3 Meetkunde van de complexe getallen

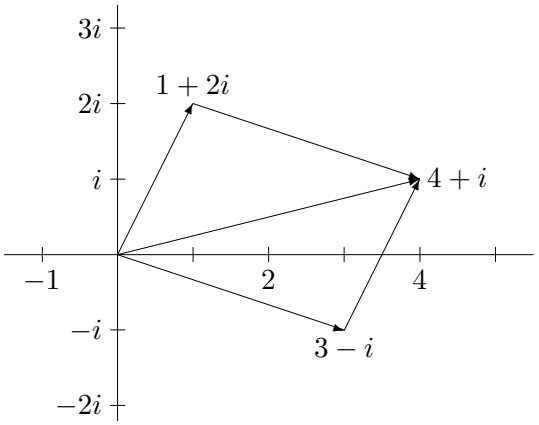
We hebben ons tot nu toe tot algebraïsche eigenschappen van de complexe getallen beperkt, maar een belangrijke rol spelen ook de meetkundige eigenschappen. We hebben gezien, dat een reëel getal via het reële en imaginaire deel met een paar van reële getallen correspondeert. Dit geeft een identificatie van de complexe getallen met het gewone 2-dimensionale vlak $\mathbb{R}^2$, het getal $z = x + i \cdot y$ correspondeert hierbij met het punt (x, y) en op grond van deze correspondentie spreekt men ook vaak van het *complexe vlak* in plaats van de complexe getallen.

We hebben al gezien dat het optellen van complexe getallen componentsgewijs voor het reële en imaginaire deel gebeurt. Maar dat is precies de manier hoe we vectoren optellen en daarom is het redelijk voor de hand liggend het getal $z = x + i \cdot y$ met de 2-dimensionale vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ te identificeren. Het voordeel ervan, bij complexe getallen aan vectoren in plaats van punten te denken, is dat we van vectoren weten hoe we ze optellen, terwijl we hiervoor bij punten toch stiekem weer vectoren zouden gebruiken.

In de taal van de lineaire algebra zeggen we, dat de complexe getallen $\mathbb{C}$ een 2-dimensionale $\mathbb{R}$-vectorruimte vormen, en de boven aangegeven correspondentie met $\mathbb{R}^2$ vinden we door de standaardbasis $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ van $\mathbb{R}^2$ met de basis $(1, i)$ van $\mathbb{C}$ te identificeren.

Het plaatje in Figuur I.16 geeft het optellen van de complexe getallen $1 + 2i$ en $3 - i$ in het complexe vlak weer.

Een voor de hand liggende vraag is nu natuurlijk, of ook de vermenigvuldiging van complexe getallen een mooie meetkundige interpretatie heeft. Dit is inderdaad het geval, maar het verhaal is iets ingewikkelder dan voor het optellen.



Figuur I.16: Optellen in het complexe vlak

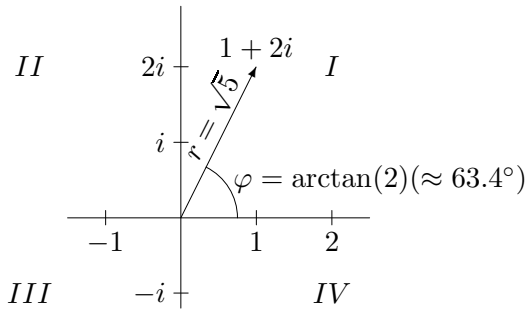
Poolcoördinaten

Om te beginnen, hebben we hiervoor en andere manier van beschrijving van punten in het 2-dimensionale vlak nodig, namelijk de *poolcoördinaten* die we ook bij de integratie van functies van meerdere veranderlijken al zijn tegengekomen.

Elk punt P in het vlak $\mathbb{R}^2$ kan behalve met zijn coördinaten (x, y) ook in de vorm (r, φ) aangegeven worden, waarbij r de afstand van het nulpunt is en φ de hoek tussen de x-as en de verbinding van het nulpunt met P (tegen de klok gemeten). Tussen de gewone *cartesische* coördinaten (x, y) en de poolcoördinaten (r, φ) bestaat het volgende verband:

$$x = r\cos(\varphi) \qquad y = r\sin(\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}.$$



Figuur I.17: Poolcoördinaten

Merk op dat de relatie $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ de hoek φ nog niet eenduidig vast legt, omdat $\tan(x)$ een periode van π en niet van 2π heeft. De omkeerfunctie $\arctan(x)$ heeft waarden tussen $-\frac{\pi}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$ en is negatief voor $x < 0$ en positief voor $x > 0$. We moeten daarom voor de vier kwadranten tussen de assen van het complexe vlak aparte definities nemen:

$I:\ x > 0, y \geq 0$: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$

$II:\ x<0, y\geq 0$: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$

$III:\ x<0, y<0$: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + \pi$

$IV:\ x>0, y<0$: $\varphi = \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi$

Voor (x, y) met $x = 0$ hebben we $\varphi = \frac{\pi}{2}$ als $y > 0$ en $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ als $y < 0$. Voor het nulpunt zelf is de hoek niet gedefinieerd.

Opdracht 21 *Bepaal de poolcoördinaten van de volgende complexe getallen:*

$$2i, \quad 1-i, \quad \sqrt{3}+i, \quad -2-\sqrt{12}\,i.$$

We hadden eerder al gezegd dat de gewone coördinaten van een punt z in het complexe vlak het reële en imaginaire deel van z heten. Maar ook de poolcoördinaten r en φ van een complex getal z hebben een speciale betekenis:

Definitie: Zij $z = x + yi$ een complex getal met poolcoördinaten (r, φ):

(i) Het getal $r = \sqrt{x^2+y^2}$ heet de *absolute waarde* of *modulus* van z en wordt genoteerd met $|z|$. Dit is de gewone (euclidische) afstand van het nulpunt in $\mathbb{R}^2$ en komt voor $z \in \mathbb{R}$ overeen met de gewone absolute waarde van een reëel getal.

(ii) Het getal φ met $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ heet het *argument* van z en wordt met $\arg(z)$ genoteerd.

Voor een complex getal z met $|z| = r$ en $\arg(z) = \varphi$ geldt dus

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)).$$

We hebben al gezien dat voor twee complexe getallen $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ en $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ het product $z_1 z_2$ gegeven is door $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i \cdot (x_1y_2 + y_1x_2)$. Als we z_1 en z_2 in poolcoördinaten schrijven, dus $z_1 = (r_1, \varphi_1)$ en $z_2 = (r_2, \varphi_2)$, geeft dit volgens de boven aangegeven transformaties:

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \cdot r_2(\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2)) \\
&= r_1 \cos(\varphi_1) r_2 \cos(\varphi_2) - r_1 \sin(\varphi_1) r_2 \sin(\varphi_2) \\
&\quad + i \cdot (r_1 \cos(\varphi_1) r_2 \sin(\varphi_2) + r_1 \sin(\varphi_1) r_2 \cos(\varphi_2)) \\
&= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) \\
&\quad + i \cdot r_1 r_2 (\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)) \\
&= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2).
\end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we een optelheorema toegepast dat we in Wiskunde 1 al een keer zijn tegengekomen. Hier is een korte herinnering: Een rotatie in het 2-dimensionale vlak om een hoek van φ beschrijven we met betrekking tot de standaardbasis $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ door de matrix $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$. Maar een rotatie om $\varphi_1 + \varphi_2$ kunnen

we ook zien als de samenstelling van eerst een rotatie om φ_1 en vervolgens een rotatie om φ_2. De matrix van de samenstelling van twee rotaties is het product van de matrices van de enkele rotaties. Dit geeft de matrix vergelijking

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\varphi_2) & -\sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) & \cos(\varphi_1+\varphi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2) & -\sin(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) & -\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) & -\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \end{pmatrix}$$

en een vergelijk van de matrixelementen geeft in het bijzonder:

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_1+\varphi_2) &= \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_1+\varphi_2) &= \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2). \end{aligned}$$

De gevonden relatie

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot r_1 r_2 \sin(\varphi_1+\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

betekent nu het volgende:

Voor complexe getallen z_1 met poolcoördinaten (r_1, φ_1) en z_2 met poolcoördinaten (r_2, φ_2) heeft het product $z_1 z_2$ de poolcoördinaten $(r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$, d.w.z. de absolute waarden r_1 en r_2 worden vermenigvuldigd en de argumenten φ_1 en φ_2 opgeteld.

Merk op: Twee complexe getallen worden met elkaar vermenigvuldigd door hun absolute waarden te vermenigvuldigen en hun argumenten bij elkaar op te tellen.

Meetkundig uitgedrukt vermenigvuldigen we een complex getal z_1 met een complex getal z_2 door z_1 met de lengte (absolute waarde) van z_2 te schalen en vervolgens om het argument van z_2 (tegen de klok) te draaien.

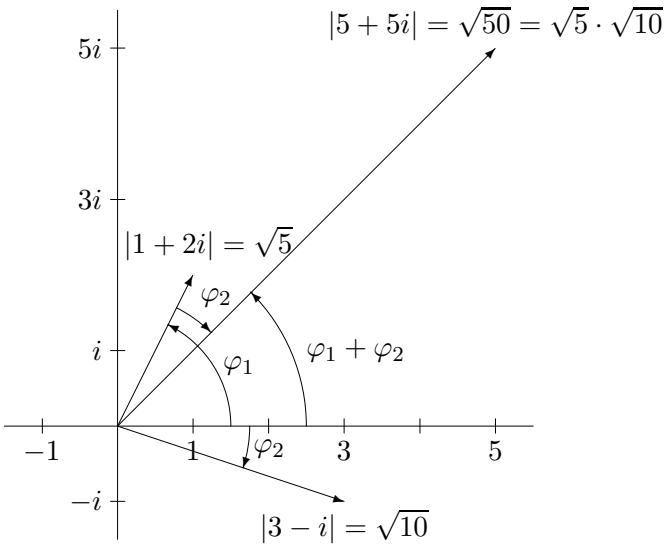
Voor het product $(1+2i)(3-i)$ geeft het plaatje in Figuur I.18 de meetkundige interpretatie van de vermenigvuldiging weer.

Worteltrekken

We komen even terug op het worteltrekken voor complexe getallen. We hadden gezien hoe we voor een gegeven complex getal $x+i\cdot y$ een complex getal $z = a+i\cdot b$ kunnen vinden met $z^2 = x + i\cdot y$. Maar met de meetkundige interpretatie van de vermenigvuldiging is dit eigenlijk veel makkelijker.

Een complex getal w met poolcoördinaten (r, φ) heeft de wortel z met poolcoördinaten $(\sqrt{r}, \frac{\varphi}{2})$. Merk op dat ook het getal met poolcoördinaten $(\sqrt{r}, \frac{\varphi}{2} + \pi)$ een wortel is, want omdat het argument steeds tussen 0 en 2π ligt, is $2\cdot(\varphi/2+\pi) = \varphi + 2\pi = \varphi$. Dit is geen verrassing, want voor een complex getal z met argument $\arg(z) = \varphi$ is $\arg(-z) = \varphi + \pi$ en natuurlijk weten we dat $z^2 = (-z)^2$, dus met z is ook $-z$ een wortel uit w.

Op dezelfde manier kunnen we ook n-de machtswortels trekken. Een complex getal w met $|w| = r$ en $\arg(w) = \varphi$ heeft als n-de machtswortel het getal



Figuur I.18: Vermenigvuldigen in het complexe vlak

$z = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi}{n}) + i\cdot\sin(\frac{\varphi}{n}))$, dus moeten we uit de absolute waarde de n-de wortel trekken en het argument door n delen. Ook hier zijn behalve van het getal z met $\arg(z) = \frac{\varphi}{n}$ de getallen met absolute waarde $\sqrt[n]{r}$ en argumenten $\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ voor $k = 1, \ldots, n-1$ n-de machtswortels uit w, want bij het vermenigvuldigen met n worden al deze hoeken gelijk aan φ.

Een belangrijke toepassing van de meetkundige interpretatie van het vermenigvuldigen van complexe getallen is de *Regel van de Moivre*. Een complex getal z met absolute waarde 1 kunnen we schrijven als $z = \cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi)$, waarbij $\varphi = \arg(z)$. Maar de n-de macht z^n kunnen we nu makkelijk berekenen, de absolute waarde is nog steeds 1 en het argument is het n-voud van het argument van z, dus $\arg(z^n) = n\arg(z) = n\varphi$. Dit betekent dat $z^n = \cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi)$ en dit geeft de

Regel van de Moivre:

$$(\cos(\varphi) + i\cdot\sin(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\cdot\sin(n\varphi).$$

Als toepassing hiervan kunnen we eenvoudig formules voor de *sinus* of *cosinus* van het dubbele of drievoud van een hoek afleiden, bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \Re(\cos(2x) + i\cdot\sin(2x)) = \Re((\cos(x) + i\cdot\sin(x))^2)\\ &= \Re(\cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\cdot\cos(x)\sin(x))\\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \Im(\cos(3x) + i\cdot\sin(3x)) = \Im((\cos(x) + i\cdot\sin(x))^3)\\ &= \Im(\cos^3(x) + i\cdot\cos^2(x)\sin(x) - \cos(x)\sin^2(x) - i\cdot\sin^3(x))\\ &= \cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x).\end{aligned}$$

We hebben gezien dat we met complexe getallen net zo goed als met reële getallen kunnen reken (ook al is de vermenigvuldiging iets ingewikkelder) en dat we vergelijkingen veel beter kunnen oplossen dan in $\mathbb{R}$. Maar er is ook een belangrijk nadeel van de complexe getallen tegenover de reële getallen: We kunnen van twee reële getallen steeds zeggen dat één van de twee groter is dan de andere (als ze niet gelijk zijn). We zeggen namelijk dat $x > y$ als $x - y > 0$ en voor elk getal $x \in \mathbb{R}$ geldt $x > 0$, $x = 0$ of $-x > 0$. Verder is voor twee positieve getallen $x, y > 0$ ook de som $x + y$ en het product xy positief.

Een ordening met deze eigenschappen kunnen we op $\mathbb{C}$ niet construeren, want als er een $z \in \mathbb{C}$ is met $z > 0$, dan is $z^2 > 0$. Maar voor $z \neq 0$ is of $z > 0$ of $-z > 0$ en dus is in elk geval $z^2 > 0$. Omdat we elk complex getal a in de vorm $a = z^2$ kunnen schrijven, zijn dus alle getallen $z \in \mathbb{C}$ positief. In het bijzonder is $1 > 0$ en $-1 > 0$ en dus $0 = -1 + 1 > 0$ (omdat -1 en 1 positief zijn) en dit is onmogelijk. De enige manier om de complexe getallen zo te ordenen dat sommen en producten van positieve getallen weer positief zijn, is de triviale ordeningen, waar alle getallen even groot zijn als 0, maar daar hebben niets aan.

5.4 Complexe conjugatie

Een belangrijke operatie op de complexe getallen is de *complexe conjugatie* die van een getal $z = x + i \cdot y$ het nieuwe getal

$$\overline{z} := x - i \cdot y$$

maakt, dat de *complex geconjugeerde van* z heet. Soms wordt de complex geconjugeerde ook met z^* in plaats van $\overline{z}$ genoteerd.

Omdat bij de complexe conjugatie het reële deel van een getal hetzelfde blijft en het imaginaire deel op zijn negatieve waarde gaat, is de complexe conjugatie gewoon de spiegeling in de x-as van het complexe vlak.

Men ziet rechtstreeks in dat z en $\overline{z}$ dezelfde absolute waarde $\sqrt{a^2 + b^2}$ hebben en dat het argument van $\overline{z}$ het negatieve van het argument van z is, dus $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

Verder geldt $z \cdot \overline{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$, want $(x + i \cdot y)(x - i \cdot y) = x^2 + y^2$. Dit geeft een handige methode, om complexe getallen te inverteren:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{1}{|z|^2}\,\overline{z}$$

de inverse van z is dus de complex geconjugeerde gedeeld door het kwadraat van de absolute waarde. Dat de inverse van z een veelvoud van $\overline{z}$ moet zijn, hadden we natuurlijk ook al uit de argumenten kunnen aflezen, want uit $\arg(1) = 0$ volgt $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) = \arg(\overline{z})$.

We kunnen nu ook een willekeurige breuk van complexe getallen op standaardvorm brengen, want

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|^2}\,z_1\overline{z_2}.$$

Voorbeeld: Er geldt $\frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{2} = \frac{1}{2}(-2+2i) = -1+i$.

Met behulp van de complex geconjugeerde kunnen we ook reëel en imaginair deel van een getal z makkelijk uitdrukken:

$$\Re(z) = \frac{1}{2}(z+\overline{z}) \quad \text{en} \quad \Im(z) = \frac{1}{2i}(z-\overline{z}).$$

In het bijzonder is een getal $z \in \mathbb{C}$ een reëel getal, dan en slechts dan als $\overline{z} = z$.

Met behulp van de complexe conjugatie vinden we ook een belangrijke eigenschap van de complexe nulpunten van veeltermen met reële coëfficiënten. Stel $f(z) = c_n z^n + \ldots + c_1 z + c_0$ is een veelterm met $c_i \in \mathbb{R}$ en stel dat $a \in \mathbb{C}$ met $f(a) = 0$. Dan is natuurlijk ook $\overline{f(a)} = 0$, dus $\overline{c_n a^n} + \ldots + \overline{c_1 a} + \overline{c_0} = c_n \overline{a}^n + \ldots + c_1 \overline{a} + c_0 = 0$ en dus is ook $\overline{a}$ een nulpunt van $f(z)$. De niet-reële nulpunten van $f(z)$ komen dus in paren van complex geconjugeerden.

5.5 Machtsverheffen

We hebben inmiddels alle bewerkingen en operaties op de reële getallen kunnen uitbreiden tot de complexe getallen, met uitzondering van het machtsverheffen met complexe exponenten.

Om te beginnen moeten we zeker iets kunnen zeggen over $e^{i \cdot y}$ waarbij $y \in \mathbb{R}$. Als dit lukt, kunnen we ook voor $z = x + i \cdot y$ de e-macht definiëren, namelijk door $e^z = e^{x+i \cdot y} = e^x \cdot e^{i \cdot y}$. Uiteindelijk zullen we dan (net als voor de reële getallen) a^z definiëren door $a^z = e^{\log(a) z}$, maar zo ver zijn we nog niet.

In de volgende les zullen we de complexe exponentiële functie en logaritme nader bekijken die een zuivere motivatie voor de volgende definitie van $e^{i\varphi}$ geven, die bekend staat als

Formule van Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi).$$

Volgens deze formule is het getal $e^{i\varphi}$ juist het complexe getal met absolute waarde 1 en argument φ. Als φ van 0 tot 2π loopt, loopt $e^{i\varphi}$ één keer rond de eenheidscirkel.

Zonder de complexe exponentiële functie kunnen we alvast twee redenen aangeven, die de Formule van Euler plausibel maken. Als we i (net als $\sqrt{2}$ of π) als een constante beschouwen, is de functie $f(\varphi) := e^{i\varphi}$ een functie van een reële veranderlijke die we kunnen afleiden, en dit geeft

$$\begin{aligned} f'(\varphi) &= (e^{i\varphi})' = (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))' \\ &= -\sin(\varphi) + i \cdot \cos(\varphi) = i \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = i \cdot e^{i\varphi} = i \cdot f(\varphi). \end{aligned}$$

Maar dit is precies wat we volgens de kettingregel van de exponentiële functie zouden verwachten.

Verder geldt volgens onze definitie dat

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

omdat we getallen op de eenheidscirkel vermenigvuldigen door hun argumenten op te tellen, dus lijkt onze definitie ook met deze eigenschappen van de reële exponentiële functie overeen te komen.

Met behulp van de relatie $e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ en de symmetrieeigenschappen $\cos(-x) = \cos(x)$ en $\sin(-x) = -\sin(x)$ kunnen we nu $\sin(x)$ en $\cos(x)$ alleen maar met de exponentiële functie uitdrukken, want er geldt:
$e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) + \cos(-\varphi) + i \cdot (\sin(\varphi) + \sin(-\varphi)) = 2\cos(\varphi)$,
$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = \cos(\varphi) - \cos(-\varphi) + i \cdot (\sin(\varphi) - \sin(-\varphi)) = 2i\sin(\varphi)$, en dus

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \text{ en } \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

We komen nu nog een keer op de regel van de Moivre terug, met onze nieuwe definitie ziet die er namelijk heel eenvoudig uit:

$$(e^{i\varphi})^n = e^{i(n\varphi)}.$$

Ook de optelthеorema's $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$ en $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2)$ kunnen we meteen uit de reële en imaginaire delen van $e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}$ aflezen.

Als toegift een beroemde formule, die de meest belangrijke constanten 0, 1, i, e en π in een relatie brengt:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

5.6 Toepassingen van de complexe getallen

Op grond van de samenhang $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ zijn complexe getallen in alle toepassingen belangrijk die met golven te maken hebben. Voorbeelden hiervoor zijn:

- Het berekenen van het overlappen van twee of meer golven (bijvoorbeeld watergolven, maar ook elektromagnetische golven).
- Kwantummechanica: een deeltje wordt door een golf-functie beschreven, waarvan de absolute waarde de kans aangeeft, het deeltje in een zeker gebied te vinden.
- Spraakherkenning: een spraaksignaal wordt beschreven door een som van *sinus*-functies voor verschillende frequenties, waarbij het patroon van frequenties (formanten) karakteristiek voor de klinkers is. Het bepalen van dit patroon uit een signaal wordt met behulp van de Fourieranalyse bepaald, die we later gaan behandelen.

- Beeldherkenning: een plaatje wordt gezien als een bron van lichtgolven, waarbij verschillende kleuren met verschillende frequenties corresponderen en de intensiteit met de amplitude van de golven.

Belangrijke begrippen in deze les

- complexe getallen
- reëel deel, imaginair deel
- poolcoördinaten, absolute waarde, argument
- complexe conjugatie
- relatie $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$

Opgaven

43. Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $a + i \cdot b$ en in poolcoördinaten:

$$\text{(i) } (1 - i\sqrt{3})^2 \qquad \text{(ii) } \frac{1+i}{i-1} \qquad \text{(iii) } \frac{3+4i}{2-i}$$

Hoe kan men absolute waarde en argument van deze getallen bepalen, zonder de getallen eerst in de vorm $a + i \cdot b$ te brengen?

44. Teken een punt $z \in \mathbb{C}$ op de eenheidscirkel (d.w.z. met $|z| = 1$). Construeer de punten z^2, z^3, z^{-1}, $-z$, $\overline{z}$, $i \cdot z$, $-i \cdot z$. Ga in de figuur na dat $z + z^{-1}$ reëel is.

45. Bereken de (complexe) oplossingen van de vergelijking $z^2 + 3z + 4 = 0$.

46. Vind de oplossingen $z \in \mathbb{C}$ voor de volgende vergelijkingen:

(i) $z^3 = i$, (ii) $z^2 - 2z + 2 = 0$, (iii) $z^4 = -1$, (iv) $(3+4i)z^2 + 5z + (2-4i) = 0$.

Teken de wortels in het complexe vlak.

47. Beschrijf de volgende verzamelingen van complexe getallen in het complexe vlak:

(i) $z \in \mathbb{C}$ met $\Re(z^2) > 0$;

(ii) $z \in \mathbb{C}$ met $\Re\left(\dfrac{z+i}{z-2i}\right) = 1$.

48. Druk met behulp van de regel van de Moivre:

(i) $\cos(4\varphi)$ uit in $\cos(\varphi)$ en $\sin(\varphi)$,

(ii) $\sin(3\varphi)$ uit in $\sin(\varphi)$ (zonder $\cos(\varphi)$).

49. Maak een schets van de verzamelingen van complexe getallen z die aan de aangegeven voorwaarden voldoen:

(i) $|z| \leq 2$;

(ii) $|z - 2i| \leq 3$;

(iii) $|z - 3 + 4i| \leq 5$;

(iv) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$;

(v) $\pi \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4}$.

50. Zij $L_1 \subset \mathbb{C}$ de lijn met $\Re(z) = \Im(z)$ en $L_2 \subset \mathbb{C}$ de lijn met $\Im(z) = 1$. Wat zijn de beelden van deze lijnen onder de afbeelding $z \mapsto z^{-1}$ (d.w.z. de verzamelingen $\{z^{-1} \mid z \in L_1(L_2)\}$?

51. Welke baan doorloopt $w := \dfrac{z^2 - z + 1}{2z}$ als z de eenheidscirkel doorloopt (d.w.z. $z = e^{ix}$ met $x \in [0, 2\pi]$)?

52. Welke baan doorloopt $z := \dfrac{x - i}{x + i}$ als x langs de reële as loopt (in positieve richting)?

53. Beschrijf de baan die

$$z := 149597887\, e^{2\pi i \frac{t}{365.257}} + 384403\, e^{2\pi i \frac{t}{27.321}}$$

doorloopt, als t langs de positieve reële as loopt. Welk hemelsfenomeen wordt hierdoor weergegeven?

Hoe zou de baan veranderen, als de constante 384403 door 38440300 vervangen wordt?