Les 6 Complexe functies

Nadat we de complexe getallen hebben leren kennen, is het een voor de hand liggende vraag of hiervoor net als voor de reële getallen ook functies bestaan. Met een functie bedoelen we hierbij een *voorschrijft* die aan elk complex getal $z \in B$ uit een deelverzameling $B \subseteq \mathbb{C}$ een eenduidige waarde $f(z) \in \mathbb{C}$ toewijst. Het gebied $B \subseteq \mathbb{C}$ het dan het *domein* van de functie $f(z)$.

Bij reële functies hebben we veel over een functie $f(x)$ kunnen zeggen, door de grafiek $(x, f(x))$ de bekijken. Dit is bij complexe functies echter moeilijk, want voor het domein $\mathbb{C}$ (waar een functie op gedefinieerd is) hebben we al een 2-dimensionaal vlak nodig, en voor de functiewaarden ook nog eens een 2-dimensionaal vlak, zo dat we voor de grafiek een 4-dimensionaal plaatje nodig hebben.

Maar we kunnen wel een redelijk indruk van een complexe functie krijgen door de volgende methoden:

(1) Bekijk de reële en imaginaire delen van de functie apart. Dit betekent dat we een complexe functie $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ opsplitsen in twee functies met reële waarden, namelijk

$$u(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \Re(f(z)) \quad \text{en} \quad v(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ z \mapsto \Im(f(z)).$$

Als we nu z schrijven als $z = x+iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$, kunnen we $u(z) = u(x, y)$ en $v(z) = v(x, y)$ opvatten als functies van de twee reële variabelen x en y met waarden in $\mathbb{R}$. Maar voor dit soort functies hebben we al eerder gezien dat we als grafiek een 3-dimensionaal plaatje krijgen, door de punten $(x, y, u(x, y))$ te bekijken.

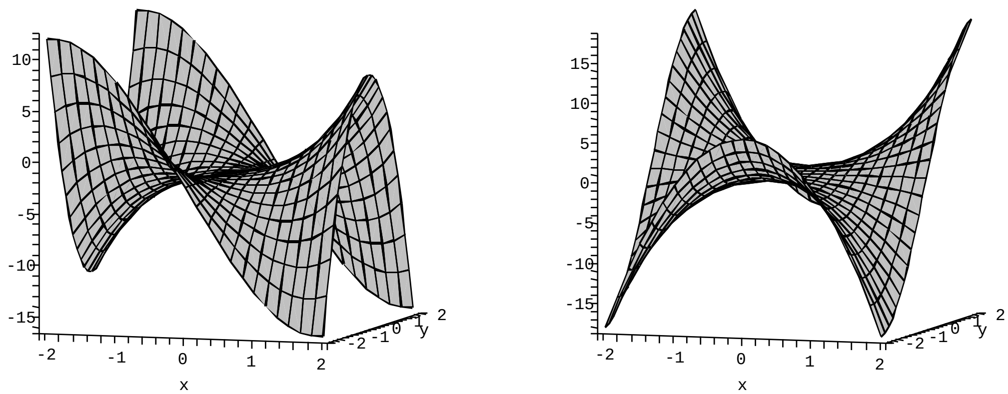
(2) We kunnen kijken hoe een functie $f(z)$ zekere lijnen afbeeldt, bijvoorbeeld de lijnen parallel met de x-as (dus de complexe getallen met hetzelfde imaginaire deel), de lijnen parallel met de y-as (de complexe getallen met hetzelfde reële deel), lijnen door de oorsprong (de complexe getallen met hetzelfde argument). We kunnen ook kijken wat met cirkels rond de oorsprong gebeurt, dus met complexe getallen met dezelfde absolute waarde.

Als voorbeeld laat Figuur I.19 de reële en imaginaire delen van de derdegraads veelterm $f(z) = z^3 + z - 2$ zien. Met $z = x + iy$ geldt $u(z) = u(x, y) = \Re(f(z)) = x^3 - 3xy^2 + x - 2$ en $v(z) = v(x, y) = \Im(f(z)) = -y^3 + 3x^2y + y$.

OPDRACHT 22 *Bepaal voor $z = x+iy$ de reële en imaginaire delen van de functie $f(z) = \frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$, d.w.z. bepaal reële functies $u(x, y)$ en $v(x, y)$ van twee variabelen zo dat $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.*

Omdat we weten hoe we complexe getallen optellen en vermenigvuldigen, hebben we met complexe functies die door een veelterm

$$f(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$$



Figuur I.19: Reëel en imaginair deel van $f(z) = z^3 + z - 2$

gegeven zijn helemaal geen moeite. Hierbij mogen de coëfficiënten natuurlijk ook zelfs complexe getallen zijn, dit geeft complexe functies zo als $f(z) := z^2 + 2iz + \sqrt{-3}$.

Maar natuurlijk kunnen we niet verwachten dat alle complexe functies veeltermfuncties zijn, de vraag is echter, hoe we aan andere complexe functies zouden kunnen komen. De oplossing hiervoor is verrassend eenvoudig. We hadden gezien dat we een reële functie $f(x)$ door Taylor polynomen kunnen benaderen en dat (in een kleine omgeving van een punt x_0) de functie gegeven is door de Taylor reeks. Dit brengt algemene functies op veeltermen en machtreeksen terug, en die kunnen we ook voor complexe getallen uitwerken.

We zullen ons dus in deze cursus beperken tot complexe functies $f(z)$ die door een machtreeks

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

gegeven zijn, waarbij we steeds veronderstellen dat de reeks voor de waarden z die we nodig hebben convergeert.

Een diepere analyse van complexe functies laat zien, dat de beperking tot complexe functies die door een machtreeks gegeven zijn helemaal geen sterke beperking is. Er laat zich namelijk aantonen dat een complexe functie die in een cirkel van straal R rond een punt z_0 *complex differentieerbaar* is (we komen hier in de Appendix voor deze les op terug) automatisch een convergente Taylor reeks rond z_0 heeft. Anders dan bij reële functies volgt namelijk uit het bestaan van de *eerste* afgeleide $f'(z)$ op een gebied B dat ook alle hogere afgeleiden $f^{(n)}(z)$ op B bestaan en continu zijn. De reden hiervoor is dat complexe differentieerbaarheid een veel sterkere eigenschap is dan reële differentieerbaarheid.

6.1 Complexe exponentiële functie

We hebben gezien dat we de (reële) exponentiële functie door de Taylor reeks $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ kunnen beschrijven, en omdat deze reeks voor alle x naar $\exp(x)$ convergeert mogen we zelfs zeggen, dat de twee gelijk zijn, dus dat

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Als we nu over een definitie voor de exponentiële functie op de complexe getallen nadenken, willen we natuurlijk dat die op de reële getallen met de reële exponentiële functie overeen komt. Het is nu een enigszins voor de hand liggende gedachte, de complexe exponentiële functie erdoor te definiëren, dat we complexe getallen in de Taylor reeks van de reële exponentiële functie invullen. Dan weten we in ieder geval dat voor reële getallen inderdaad de functiewaarden hetzelfde blijven.

Algemeen noemt men het invullen van waarden $z \in B \subseteq \mathbb{C}$ in een machtreeks van een functie $f(z)$ die op een kleiner domein $B_1 \subseteq B$ gedefinieerd is, het *voortzetten* van $f(z)$ op B. In ons geval zetten we de reële exponentiële functie van de reële lijn $\mathbb{R}$ op het hele complexe vlak voort.

We hadden gezien dat er problemen met de Taylor reeks voor de functie $\exp(-\frac{1}{x^2})$ zijn, omdat de reeks de 0-functie is en (behalve voor $x = 0$) niet tegen de goede functiewaarden convergeert. Als we deze functie op de complexe getallen voortzetten, zien we dat we in het punt $z = 0$ helemaal geen continue voortzetting meer kunnen vinden (wat voor de reële getallen wel nog het geval was). Als we namelijk met $z = ix$ langs de imaginaire as lopen, hebben we $\exp(-\frac{1}{(ix)^2}) = \exp(\frac{1}{x^2})$ en dit gaat voor $x \to 0$ naar oneindig. Het feit dat we de functie in het complexe vlak niet continu in het punt 0 kunnen voortzetten hangt nauw samen met het feit dat de Taylor reeks op de reële getallen niet tegen de goede functie convergeert.

Het voortzetten van de reële exponentiële functie op het complexe vlak geeft (als definitie!) voor de *complexe exponentiële functie*:

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \ldots$$

Om te rechtvaardigen dat deze definitie zinvol is, merken we het volgende op:

(1) Om te zien dat de reeks van $\exp(z)$ convergent is, is het voldoende dat de reeks over de absolute waarden van de termen convergent is, men zegt hiervoor dat de reeks *absoluut convergent* is. Maar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \exp(|z|),$$

dus volgt de absolute convergentie van de reeks voor $\exp(z)$ uit de convergentie van de Taylor reeks voor de reële exponentiële functie.

(2) We kunnen $\exp(z_1 + z_2)$ (in principe) uitrekenen door $z_1 + z_2$ in de reeks in te vullen, dus $\exp(z_1 + z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$. Aan de andere kant berekent men $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ door de reeksen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}$ en $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$ te vermenigvuldigen. Door de coëfficiënten van $z_1^j z_2^k$ in de uitdrukkingen voor $\exp(z_1 + z_2)$ en voor $\exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ te vergelijken, ziet men dat inderdaad

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2),$$

net als we dat van de reële exponentiële functie gewend zijn. (In feite berust het bewijs dat $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ voor $x, y \in \mathbb{R}$ precies op hetzelfde idee.)

(3) In Wiskunde 1 hadden we gezien dat de exponentiële functie gekarakteriseerd is door de eigenschappen dat

$$\exp(x)' = \exp(x) \quad \text{en} \quad \exp(0) = 1.$$

We zullen straks nader op het differentiëren van complexe functies ingaan, maar voor een functie die door een reeks gegeven is zou men hopen de afgeleide te vinden door de reeks termsgewijs af te leiden. Voor functies met een absoluut convergente reeks is dit inderdaad juist, dus hebben we voor de complexe exponentiële functie:

$$\exp(z)' = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!})' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z).$$

De complexe exponentiële functie heeft dus ook de eigenschappen die de reële exponentiële functie karakteriseren.

Met onze definitie van de complexe exponentiële functie kunnen we nu eindelijk ook de Formule van Euler

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

uit de vorige les rechtvaardigen. Hiervoor vullen we $z = i\varphi$ in de reeks voor $\exp(z)$ in, waarbij we rekening ermee houden dat $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ en $i^4 = 1$. We krijgen:

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= 1 + i \cdot \varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i \cdot \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \cdot \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i \cdot \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots \\
&= (1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots) + i \cdot (\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots) \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \right) + i \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi).
\end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we hierbij gebruik gemaakt van de (lang bekende) Taylor reeksen voor $\cos(x)$ en $\sin(x)$.

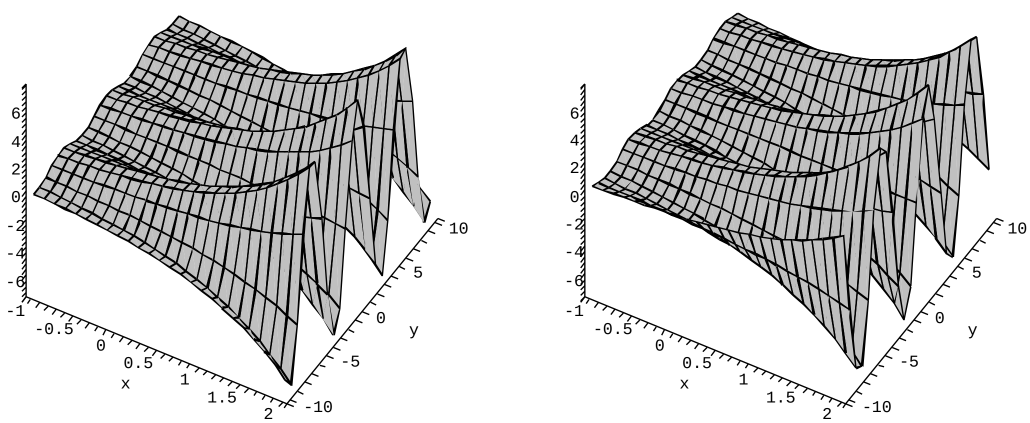
Om een beter idee van de complexe exponentiële functie te krijgen, is het verstandig naar de reële en imaginaire delen te kijken. Voor $z \in \mathbb{C}$ met $z = x + iy$, dus $x = \Re(z)$ en $y = \Im(z)$, geldt

$$\exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y))$$

waarbij we de formule van Euler $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$ hebben toegepast. Hieruit volgt:

$$\Re(\exp(x + iy)) = \exp(x)\cos(y) \quad \text{en} \quad \Im(\exp(x + iy)) = \exp(x)\sin(y).$$

In Figuur I.20 zijn de reële en imaginaire delen van de complexe exponentiële functie te zien.



Figuur I.20: Reëel en imaginair deel van $\exp(z)$

Zo zeer de complexe exponentiële functie in veel aspecten op de reële exponentiële functie lijkt, moeten we toch bij de overgang van de reële naar de complexe exponentiële functie afscheid nemen van sommige vertrouwde eigenschappen van de exponentiële functie. Een voorbeeld hiervan is dat de complexe exponentiële functie niet meer injectief is en daarom ook geen globale omkeerfunctie heeft:

Voor $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ geldt dat $e^{x_1} = e^{x_2}$ dan en slechts dan als $x_1 = x_2$, want de reële exponentiële functie is strikt stijgend en dus injectief. Er geldt namelijk: $e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}/e^{x_2} = e^{x_1 - x_2} = 1$, en dit is alleen maar het geval als $x_1 - x_2 = 0$, dus $x_1 = x_2$.

Als we hetzelfde argument op de complexe exponentiële functie toepassen, beleven we een kleine verrassing. Er geldt weer dat $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1$. Maar voor een getal $z = x + iy \in \mathbb{C}$ geldt $e^z = e^x \cdot (\cos(y) + i\sin(y))$ en $|e^z| = e^x$, dus geldt $e^z = 1 \Leftrightarrow e^x = 1, \cos(y) = 1, \sin(y) = 0$ en dit is precies het geval voor $x = 0$ en $y = 2\pi k$ met $k \in \mathbb{Z}$. Er geldt dus

$$e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2\pi i k \text{ met } k \in \mathbb{Z}.$$

Merk op: Hieruit volgt in het bijzonder dat voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt dat

$$e^z = e^{z+2\pi i} = e^{z+2\pi i \cdot k} \text{ voor alle } k \in \mathbb{Z}$$

en we zeggen daarom dat de complexe exponentiële functie $2\pi i$-*periodiek* is.

Toepassing: Gedempte trilling

De kracht F die een massa m die een spiraalveer hangt, ervaart, is proportioneel met de afwijking x van de massa tegenover de evenwichtspositie, dus $F = -kx$. Het minteken betekent dat de kracht altijd naar de evenwichtspositie terugtrekt.

Een kracht F die op m werkt leidt tot een versnelling $x''(t)$ van de massa met $F = mx''(t)$. Zonder verdere invloed van buiten zou de tijdelijke beweging $x(t)$ van de massa dus voldoen aan de differentiaalvergelijking $mx''(t) = -kx(t)$. We hadden in Wiskunde 1 al gezien, dat de oplossingen van deze vergelijking sinus- en cosinusfuncties zijn, namelijk $x(t) = \sin(\omega t)$ of $x(t) = \cos(\omega t)$ (of een lineaire combinatie hiervan) met $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. De massa zou dus in een sinustrilling bewegen.

Als we nu ook met wrijving rekening willen houden, moeten we hierover een aanname maken. Meestal wordt verondersteld dat de wrijving proportioneel met de snelheid van de massa is, dus geldt voor de wrijvingskracht F_w dat $F_w = -\gamma x'(t)$. Ook hier houdt het minteken rekening ermee dat de wrijvingskracht de massa remt. In totaal geldt nu $mx''(t) = -kx - \gamma x'(t)$ of te wel

$$x''(t) + \beta x'(t) + \omega^2 x(t) = 0 \text{ met } \beta = \frac{\gamma}{m},\ \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Om een oplossing voor deze differentiaalvergelijking te vinden, proberen we een functie $x(t)$ van de vorm $x(t) = Ce^{at}$. Als we dit invullen, krijgen we $Ce^{at}(a^2 + \beta a + \omega^2) = 0$, dus moet a een oplossing van de kwadratische vergelijking $X^2 + \beta X + \omega^2 = 0$ zijn. Met de *abc*-formule (of anders) vinden we de oplossingen

$$a_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}.$$

Als $\beta^2 > 4\omega^2$, dus $\beta > 2\omega$, zijn er twee reële oplossingen en we krijgen voor $x(t)$ een functie van de vorm

$$x(t) = C_1 e^{a_1 t} + C_2 e^{a_2 t} \text{ met } a_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}.$$

Deze beweging beschrijft een steeds langzamer wordend terugvallen in de evenwichtspositie, waarbij het mogelijk is dat de beweging een keer door de evenwichtspositie doorheen gaat.

Als $\beta^2 < 4\omega^2$, dus als de wrijving zwakker is, zijn de oplossingen complex. We definiëren

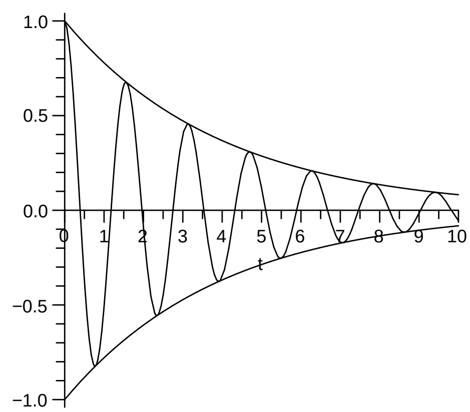
$$\overline{\omega} := \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \beta^2} = \omega\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4\omega^2}} < \omega,$$

dan zijn de oplossingen $a_{1,2} = -\frac{\beta}{2} \pm i\,\overline{\omega}$. We krijgen dus $x(t)$ van de vorm

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{\beta}{2}} e^{i\,\overline{\omega}t} + C_2 e^{-\frac{\beta}{2}} e^{-i\,\overline{\omega}t} = e^{-\frac{\beta}{2}} (c_1 \cos(\overline{\omega}t) + c_2 \sin(\overline{\omega}t)).$$

Deze functie geeft dus een sinus-vormige trilling met de frequentie $\overline{\omega} < \omega$ aan die gedempt is met de functie $e^{-\frac{\beta}{2}}$. De wrijving heeft dus naast het dempen van de trilling ook het effect dat de trilling om de factor $\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4\omega^2}}$ langzamer wordt dan in het vrije geval zonder wrijving.

In Figuur I.21 is de grafiek van een gedempte trilling $x(t) = e^{-\frac{\beta}{2}} \cos(\overline{\omega}t)$ te zien. Naast de functie $x(t)$ zijn ook de grensfuncties $\pm e^{-\frac{\beta}{2}}$ geschetst die de demping aangeven.



Figuur I.21: Gedempte trilling

6.2 Complexe sinus en cosinus functies

Nu dat we hebben gezien dat het voortzetten van de Taylor reeks van $\exp(x)$ op de complexe getallen een succes was, is het voor de hand liggend hetzelfde principe ook op de sinus en cosinus functies toe te passen. We definiëren dus de complexe sinus functie door

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7 + \ldots$$

en de complexe cosinus functie door

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{24} z^4 - \frac{1}{720} z^6 + \ldots$$

Als we nu nog een keer naar de berekening kijken waarmee we net hebben aangetoond dat $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$, zien we dat we nergens iets speciaals over φ verondersteld hebben. Als we dus precies hetzelfde opschrijven met z in plaats van φ waarbij $z \in \mathbb{C}$ een willekeurig complex getal is, vinden we de relatie

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z) \text{ voor alle } z \in \mathbb{C}.$$

Maar voor de boven aangegeven definities van $\cos(z)$ en $\sin(z)$ geldt net als op de reële getallen, dat

$$\cos(-z) = \cos(z) \quad \text{en} \quad \sin(-z) = -\sin(z)$$

want $(-z)^{2n} = (-1)^{2n} \cdot z^{2n} = z^{2n}$ en $(-z)^{2n+1} = (-z) \cdot (-z)^{2n} = (-z) \cdot z^{2n} = -z^{2n+1}$. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} e^{iz} + e^{-iz} &= \cos(z) + \cos(-z) + i \cdot (\sin(z) + \sin(-z)) = 2\cos(z) \text{ en} \\ e^{iz} - e^{-iz} &= \cos(z) - \cos(-z) + i \cdot (\sin(z) - \sin(-z)) = 2i\sin(z) \end{aligned}$$

en we zien dus dat

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{en} \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

dus precies dezelfde relaties die we voor reële waarden van z al in de vorige les hadden verkregen.

> In de zuivere wiskunde wordt eigenlijk alleen maar de complexe exponentiële functie $\exp(z)$ door een reeks gedefinieerd, $\cos(z)$ en $\sin(z)$ worden vervolgens door de relaties $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ en $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ *gedefinieerd*. Maar voor de toepassingen is uiteindelijk alleen maar de samenhang tussen deze functies belangrijk.

Voor de complexe cosinus en sinus is het uitwerken van de reële en imaginaire delen met iets meer rekenwerk verbonden. We zullen hierbij de hyperbolische functies $\sinh(x)$ en $\cosh(x)$ tegen komen, die we in Wiskunde 1 hebben leren kennen. Voor deze functies geldt:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{en} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

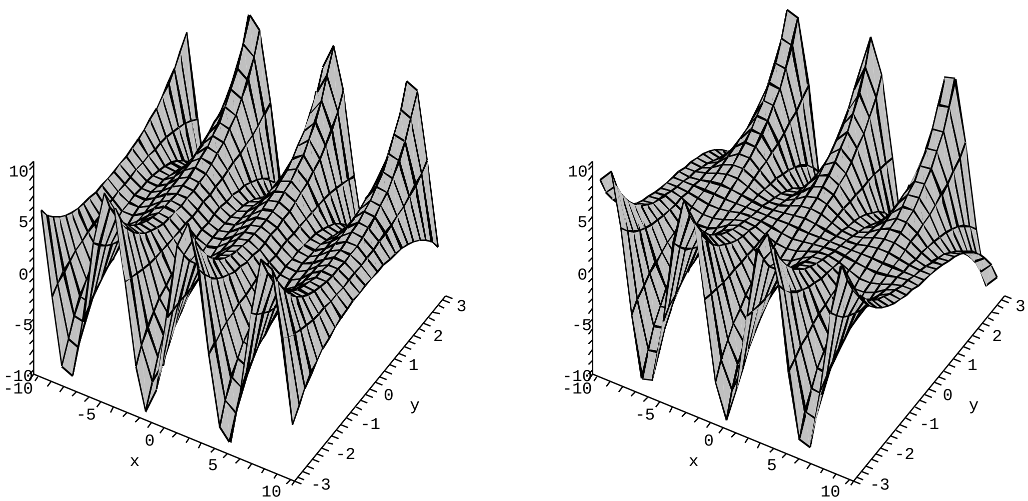
We hebben nu:

$$\begin{aligned} \sin(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix} \cdot e^{-y} - e^{-ix} \cdot e^{y}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i}(\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} - \frac{1}{2i}(\cos(-x) + i\sin(-x))e^{y} \\ &= \frac{1}{2}(-i\cos(x) + \sin(x))e^{-y} - \frac{1}{2}(-i\cos(-x) + \sin(-x))e^{y} \\ &= \frac{1}{2}(-i\cos(x) + \sin(x))e^{-y} + \frac{1}{2}(i\cos(x) + \sin(x))e^{y} \\ &= \sin(x)\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) + i\cos(x)\frac{1}{2}(-e^{-y} + e^{y}) \\ &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y). \end{aligned}$$

Er geldt dus:

$$\Re(\sin(x+iy)) = \sin(x)\cosh(y) \quad \text{en} \quad \Im(\sin(x+iy)) = \cos(x)\sinh(y).$$

In Figuur I.22 zijn de reële en imaginaire delen van de complexe sinus functie te zien.



Figuur I.22: Reëel en imaginair deel van $\sin(z)$

Een soortgelijke berekening voor $\cos(z)$ levert het volgende op:

$$\begin{aligned}
\cos(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \frac{e^{ix}\cdot e^{-y} + e^{-ix}\cdot e^{y}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} + \frac{1}{2}(\cos(-x) + i\sin(-x))e^{y} \\
&= \frac{1}{2}(\cos(x) + i\sin(x))e^{-y} + \frac{1}{2}(\cos(x) - i\sin(x))e^{y} \\
&= \cos(x)\frac{1}{2}(e^{-y} + e^{y}) + i\sin(x)\frac{1}{2}(e^{-y} - e^{y}) \\
&= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y).
\end{aligned}$$

Er geldt dus:

$$\Re(\cos(x+iy)) = \cos(x)\cosh(y) \quad \text{en} \quad \Im(\cos(x+iy)) = \sin(x)\sinh(y).$$

Let op: We zijn gewend dat de reële sinus en cosinus *begrensde* functies zijn, de waarden liggen gewoon tussen -1 en 1. Voor de complexe versies van deze functies geldt dit echter niet meer: Als we in $\cos(z)$ met z langs de imaginaire as lopen, d.w.z. $z = ix$ invullen, hebben we $\cos(ix) = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh(x)$ en dit is een onbegrensde functie.

De reden voor dit ongemaak is dat $\sin(z)$ en $\cos(z)$ zich langs de imaginaire as zo gedragen als de exponentiële functie langs de reële as en andersom.

Voor het gemak vatten we de formules voor reëel en imaginair deel van $\exp(z)$, $\cos(z)$ en $\sin(z)$ nog eens samen:

$$\begin{aligned}\exp(x+iy) &= \exp(x)\cos(y) + i\exp(x)\sin(y);\\ \sin(x+iy) &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y);\\ \cos(x+iy) &= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y).\end{aligned}$$

Voor de volledigheid vermerken we nog, dat ook de hyperbolische functies een voortzetting naar de complexe getallen hebben. Dit gebeurt heel makkelijk door de relaties $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ en $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ van reële x naar complexe z uit te breiden, we definiëren dus:

$$\cosh(z) := \frac{e^z+e^{-z}}{2} \quad \text{en} \quad \sinh(z) := \frac{e^z-e^{-z}}{2}.$$

Ook voor deze functies kunnen we uit de Taylor reeks voor de exponentiële functie machtreeksen afleiden die overeen komen met de reële Taylor reeksen van $\cosh(x)$ en $\sinh(x)$, er geldt:

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} + \dots$$

$$\sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^7}{5040} + \dots$$

Opdracht 23 *Laat zien dat* $\cosh(iz) = \cos(z)$ *en* $\sinh(iz) = i\sin(z)$.

6.3 Complexe logaritme

Als we een complexe logaritme willen definiëren hebben we (minstens) twee mogelijkheden om hieraan te beginnen. Aan de ene kant hebben we de Taylor reeks voor de reële logaritme en na onze goede ervaringen met deze aanpak zou het gek zijn als we deze reeks niet naar de complexe getallen zouden kunnen voortzetten. De Taylor reeks voor de reële logaritme is $\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$, dus kunnen we de complexe logaritme definiëren door

$$\log(z+1) := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

Het probleem is dat deze reeks niet voor alle waarden van z convergent is, maar alleen maar voor z met $|z| < 1$. We kunnen dus met deze machtreeks de waarden van de complexe logaritme alleen maar in een cirkel van straal 1 rond $z_0 = 1$ uitrekenen.

Aan de andere kant willen natuurlijk dat de complexe logaritme de omkeerfunctie van de complexe exponentiële functie is, dus dat $\log(e^z) = z$ en $e^{\log(z)} = z$. Beide mogelijkheden leiden uiteindelijk tot hetzelfde resultaat dat we nu vanuit het perspectief van de logaritme als omkeerfunctie van $\exp(z)$ gaan bekijken.

Voor een complex getal $z = re^{i\varphi}$ volgt uit de eis $e^{\log(z)} = z$ dat we $\log(z)$ noodzakelijk moeten definiëren door

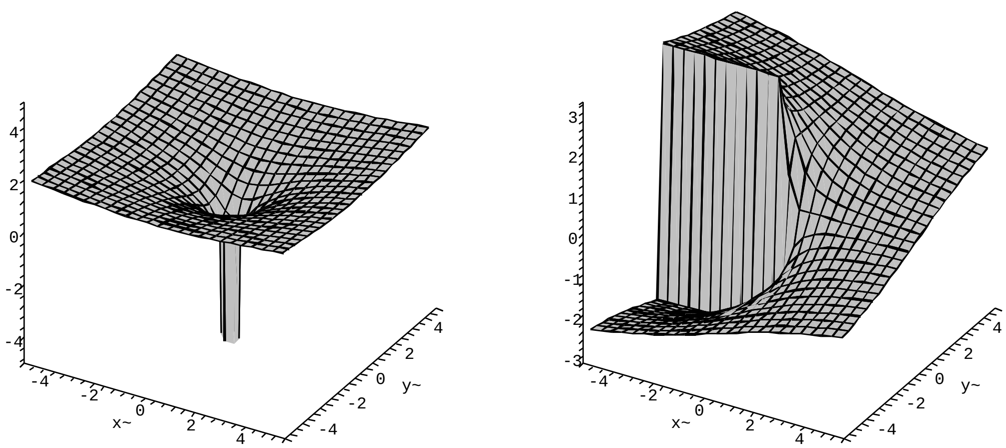
$$\log(re^{i\varphi}) := \log(r) + i\varphi$$

want $\log(z) = x + iy$ moet voldoen aan $re^{i\varphi} = z = e^{\log(z)} = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$, dus hebben we nodig dat $e^x = r$ en $e^{iy} = e^{i\varphi}$ en dus $x = \log(r)$ en $y = \varphi$.

Er is wel een kleine complicatie bij deze definitie: Omdat de complexe exponentiële functie $2\pi i$-periodiek is, geldt ook voor $w = \log(z) + 2\pi i$ dat $e^w = z$, het imaginaire deel van $\log(z)$ is dus alleen maar tot op veelvouden van 2π na bepaald. De exponentiële functie beeld namelijk elke streep $S_a = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \in (a, a+2\pi]\}$ op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ af en in principe is elke streep even goed. De conventie is echter, dat het imaginaire deel van $\log(z)$ in het interval $(-\pi, \pi]$ ligt. We hebben dus

$$\log(z) = \begin{cases} \log(|z|) + i\arg(z) & \text{als } \arg(z) \in [0, \pi] \\ \log(|z|) + i(\arg(z) - 2\pi) & \text{als } \arg(z) \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

In Figuur I.23 zien we de reële en imaginaire delen van de complexe logaritme. Het is duidelijk dat het imaginaire deel op de negatieve reële as niet continu is, maar een sprong om 2π heeft.



Figuur I.23: Reëel en imaginair deel van $\log(z)$

Omdat we voor de complexe logaritme een keuze moeten maken in welke streep van breedte 2π het imaginaire deel van $\log(z)$ ligt, krijgen we een probleem dat we bij de reële logaritme niet kennen. Kijken we bijvoorbeeld naar $z_1 = z_2 = e^{i\frac{2}{3}\pi}$, dan is duidelijk $\log(z_1) = \log(z_2) = i\frac{2}{3}\pi$ en dus $\log(z_1) + \log(z_2) = i\frac{4}{3}\pi$. Maar $z_1 \cdot z_2 = e^{i(\frac{2}{3}+\frac{2}{3})\pi} = e^{i\frac{4}{3}\pi} = e^{i(-\frac{2}{3})\pi}$ en daarom is $\log(z_1 \cdot z_2) = -\frac{2}{3}\pi$. De relatie $\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$ geldt dus niet meer in elk geval, want de imaginaire delen aan de rechter en linker kant kunnen om veelvouden van 2π verschillen. We zeggen daarom, dat

$$\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \text{ modulo veelvouden van } 2\pi i.$$

Omdat n-de machten slechts een speciaal geval van producten zijn, geldt ook de regel $\log(z^n) = n \log(z)$ alleen maar modulo veelvouden van $2\pi i$.

Het voordeel van onze keuze van de streep $\Im(z) \in (-\pi, \pi)$ van breedte 2π is, dat de relatie

$$\log(\frac{1}{z}) = -\log(z)$$

wel nog altijd geldt, want deze streep wordt onder de afbeelding $z \to -z$ op zich zelf afgebeeld.

OPDRACHT 24 *Schrijf* $\log(1+i)$, $\log(-i)$ *en* $\log(\frac{2+i}{2-i})$ *in de vorm* $x + iy$*.*

6.4 Differentiëren via Taylor reeksen

We zullen in de Appendix voor deze les de vraag nagaan, wanneer een functie complex differentieerbaar is. Voor het moment nemen we genoegen ermee dat we zeggen, dat een complexe functie $f(z)$ in het punt z_0 complex differentieerbaar is als de limiet

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

bestaat en onafhankelijk van het traject waarop z tegen z_0 aan loopt dezelfde waarde heeft. We zullen zien dat complexe differentieerbaarheid een veel sterkere eigenschap is dan de gewone differentieerbaarheid bij reële functies.

Definitie: Een functie $f(z)$ die in elk punt $z \in B$ van zijn domein complex differentieerbaar is, heet een (op B) *holomorfe* functie.

De *ontwikkelingsstelling van Cauchy-Taylor* zegt nu dat we een holomorfe functie altijd als een absoluut convergente Taylor reeks kunnen schrijven, dus dat

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ waarbij } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \text{ convergent is.}$$

Omgekeerd geeft een absoluut convergente Taylor reeks steeds een holomorfe functie aan.

In de wereld van complex differentieerbare functies gaat eigenlijk alles goed, wat we zo maar zouden kunnen hopen, daarom is er ook een stelling die zegt dat we de afgeleide van een holomorfe functie krijgen door de (absoluut convergente) Taylor reeks van de functie termsgewijs af te leiden.

Stelling: Voor de holomorfe functie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ is de afgeleide $f'(z)$ gegeven door

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

We weten dus dat een complexe functie $f(z)$ die door een absoluut convergente Taylor reeks gegeven is, complex differentieerbaar is en dat we de afgeleide $f'(z)$ vinden door de Taylor reeks termsgewijs af te leiden. Maar om een term in een Taylor reeks af te leiden, hebben we alleen maar de afgeleide van z^n nodig, en we zullen in de Appendix laten zien dat net als bij reële functies geldt dat

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

Met behulp hiervan kunnen we nu de complexe functies afleiden die we tot nu toe hebben gezien:

(1) $$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \exp'(z) = 1 + 2 \cdot \frac{z}{2!} + 3 \cdot \frac{z^2}{3!} + 4 \cdot \frac{z^3}{4!} + \ldots = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

(2) $$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \sin'(z) = 1 - 3 \cdot \frac{z^2}{3!} + 5 \cdot \frac{z^4}{5!} - 7 \cdot \frac{z^6}{7!} + \ldots = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos(z).$$

(3) $$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$

$$\Rightarrow \cos'(z) = -2 \cdot \frac{z}{2!} + 4 \cdot \frac{z^3}{4!} - 6 \cdot \frac{z^5}{6!} + \ldots = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z).$$

(4) $$\log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

$$\Rightarrow \log'(z+1) = 1 - 2 \cdot \frac{z}{2} + 3 \cdot \frac{z^2}{3} - 4 \cdot \frac{z^3}{4} + \ldots = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \text{ (meetkundige reeks).}$$

De meetkundige reeks $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ is convergent als $|x| < 1$ en heeft in dit geval de waarde $\frac{1}{1-x}$. Dit ziet men in door uit te werken dat $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$. Voor $|x| < 1$ gaat x^{n+1} voor $n \to \infty$ naar 0, dus is $(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x) = 1$.

We zien dus dat de afgeleiden precies zo zijn als we dat volgens ons kennis van de reëele functies zouden verwachten.

6.5 Appendix: Complexe differentieerbaarheid

Bij reëele functies hadden we de afgeleide $f'(x_0)$ in een punt x_0 gedefinieerd als de stijging van de raaklijn in het punt x_0 aan de grafiek van $f(x)$. Voor een complexe functie hebben we al gezien, dat we de reëele en imaginaire delen van de functie apart als driedimensionale landschappen (grafieken) kunnen representeren. In een punt van zo'n landschap kunnen we wel een raak*vlak* definiëren, maar het is onduidelijk hoe we uit de raakvlakken voor reëel en imaginair deel van de functie een complex getal zullen maken die we als afgeleide van de functie in dit punt definiëren.

Maar de eigenschap dat de afgeleide de stijging van de raaklijn aangeeft kunnen we ook nog iets anders formuleren: De functie $f(x)$ wordt in een kleine omgeving van een punt goed door de raaklijn benaderd, we noemen daarom de afgeleide ook de *linearisering* van de functie. Dit volgt uit de definitie dat

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ als deze limiet bestaat.}$$

Als we namelijk de definitie van de afgeleide voor kleine waarden van $\Delta x = h$ (en zonder limiet) bekijken, hebben we

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ en dus } f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

In een kleine omgeving van x wordt de functie dus goed beschreven door een vermenigvuldiging met $f'(x)$. Preciezer gezegd beeld de functie het punt x naar $f(x)$ af en een afwijking Δx van x wordt door de functie met $f'(x)$ vermenigvuldigd en op $f(x)$ opgeteld.

Deze interpretatie nemen we nu over als definitie van de complexe afgeleide: De afgeleide $f'(z)$ geeft aan, dat we in een (kleine) omgeving van z de functiewaarden van $f(z)$ kunnen benaderen door een afwijking Δz van z met $f'(z)$ te vermenigvuldigen en bij $f(z)$ op te tellen:

$$f(z + \Delta z) \approx f(z) + f'(z)\Delta z.$$

Dit kunnen we ook zuiver meetkundig interpreteren, want we weten wat vermenigvuldiging met een complex getal $f'(z) = re^{i\varphi}$ betekent, namelijk een schaling met een factor r en een draaiing om φ. In een omgeving van z wordt een complex differentieerbare functie $f(z)$ dus beschreven door een schaling gecombineerd met een draaiing.

De interpretatie van de complexe afgeleide als linearisering van $f(z)$ in een kleine omgeving maakt het noodzakelijk dat we de definitie van de reëele afgeleide via de limiet $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ letterlijk overnemen voor complexe functies, waarbij we (volgens de conventies) de reëele variabel x door een complexe variabel z vervangen. We krijgen dus de volgende definitie:

Definitie: Een complexe functie $f(z)$ heet in het punt z_0 (complex) *differentieerbaar*, als de limiet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

bestaat. In dit geval noteren we de afgeleide in het punt z_0 door $f'(z_0)$. Een functie $f(z)$ die in elk punt van zijn domein differentieerbaar is, heet ook een *holomorfe functie* of een *analytische functie.*

Het cruciale punt bij deze definitie is het *bestaan* van de limiet. Voor reële functies kan h alleen maar van links of van rechts naar 0 toe lopen. Dan is het voldoende als de limiet van links en van rechts bestaat en deze twee limieten hetzelfde zijn. Zo zien we bijvoorbeeld dat de functie $f(x) = |x|$ in het punt 0 niet differentieerbaar is omdat de limiet van $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ voor $h > 0$ (dus van rechts) gelijk is aan 1 terwijl de limiet voor $h < 0$ (dus van links) gelijk is aan -1. Maar we hoeven inderdaad niet meer te doen dan van links en van rechts te kijken.

Voor complexe functies is dit een heel ander verhaal, want h kan van rechts of links op de reële as naar 0 lopen, maar ook van boven of beneden op de imaginaire as of langs een willekeurige lijn met $\Im(z) = a \cdot \Re(z)$. En h mag zelfs langs een heel kromme lijn lopen, bijvoorbeeld langs een spiraal die zich om het nulpunt wikkelt. En voor elk van de mogelijke trajecten van h moet de limiet bestaan en steeds dezelfde waarde hebben. Het feit dat h op een willekeurig traject naar 0 toe mag lopen maakt van de complexe differentieerbaarheid een heel sterke eigenschap die vergaande consequenties heeft.

De complexe differentieerbaarheid heeft een aantal indrukwekkende consequenties. Bijvoorbeeld volgt uit de samenhang tussen holomorfe functies en hun Taylor reeksen de *Stelling van Liouville* die zegt dat een op $\mathbb{C}$ differentieerbare functie alleen maar begrensd kan zijn als hij constant is. We hadden al gezien dat de complexe sinus en cosinus functies langs de imaginaire as tegen oneindig gaan. De stelling van Liouville zegt nu dat globaal begrensde functies zo als de reële sinus of cosinus functies op het complexe vlak niet kunnen bestaan.

Er is echter nog een veel sterker resultaat: De complexe exponentiële functie heeft alle complexe getallen als waarden behalve van 0. Dit is inderdaad voor alle holomorfe functies zo, want een van de stellingen van Picard (Charles Emile Picard, niet Jean-Luc) zegt dat een holomorfe functie die twee complexe getallen niet als waarde heeft noodzakelijk een constante functie $f(z) = c$ is.

Het voordeel ervan, de afgeleide van een complexe functie net zo te definiëren als voor reële functies, is dat de *rekenregels* voor de afgeleide hetzelfde blijven.

Als $f(z)$ en $g(z)$ complex differentieerbare functies zijn, geldt dus:

$$\begin{aligned}
&(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z) \\
&(f\cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \text{ (productregel)} \\
&\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} \text{ (quotiëntregel)} \\
&(f\circ g)'(z) = f(g(z))' = f'(g(z))g'(z) \text{ (kettingregel)}
\end{aligned}$$

Tot nu toe hebben we nog geen enkele complex differentieerbare functie gezien. Maar we hebben wel al een gok op de afgeleide van $f(z) = z^n$ gedaan, namelijk dat hiervoor $f'(z) = nz^{n-1}$ is, net als we dat van de reële functies gewend zijn. Voor de reële functies hebben we dit in Wiskunde 1 met behulp van de productregel per volledige inductie bewezen. Dit is wel elegant, maar een rechtstreekse berekening doet ook geen kwaad. Hierbij hebben we de binomische formule voor $(z+h)^n$ nodig, te weten

$$(z+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k}h^k = z^n + nz^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}h^2 + \ldots + nzh^{n-1} + h^n.$$

Voor $f(z) = z^n$ geldt dus

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \\
&= \frac{1}{h}(z^n + nz^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}h^2 + \ldots + nzh^{n-1} + h^n - z^n) \\
&= nz^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}h + \ldots + nzh^{n-2} + h^{n-1}.
\end{aligned}$$

In de laatste som bevat elke term vanaf de tweede een macht van h, en als we de limiet $h \to 0$ bekijken gaat dus ieder van deze termen naar 0. Merk op dat dit onafhankelijk van het traject is waarop h naar 0 loopt. Daarom bestaat de limiet $\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ en we hebben:

$$\text{Voor } f(z) = z^n \text{ is } f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = nz^{n-1}.$$

Contrastvoorbeeld

Dat er bij complexe functies snel iets mis kan gaan zien we bij een heel eenvoudige, onschuldige functie, de complexe conjugatie

$$f(z) := \overline{z}.$$

We laten h eerst langs de reële as lopen, het maakt niet uit of van rechts of links. Voor $h \in \mathbb{R}$ geldt $\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{z}+h-\overline{z}}{h} = \frac{h}{h} = 1$, dus is ook de limiet $h \to 0$ gelijk aan 1 als we langs de reële as lopen. Dit is natuurlijk geen verrassing, want op de reële as doet complexe conjugatie niets, en moet dus dezelfde afgeleide hebben als de reële functie $f(x) = x$.

Nu laten we h langs de imaginaire as lopen, hiervoor nemen we $h = i\varepsilon$ met $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Er geldt $\frac{\overline{z+i\varepsilon}-\overline{z}}{i\varepsilon} = \frac{\overline{z}-i\varepsilon-\overline{z}}{i\varepsilon} = \frac{-i\varepsilon}{i\varepsilon} = -1$, dus is de limiet gelijk aan -1 als we langs de imaginaire as lopen.

We kunnen zelfs een willekeurig complex getal op de eenheidscirkel als limiet produceren. Als we langs de lijn vanuit het getal $e^{i\varphi}$ naar 0 lopen, hebben we $h = e^{i\varphi} \cdot \varepsilon$ met $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\frac{\overline{z+h}-\overline{z}}{h} = \frac{\overline{z+e^{i\varphi}\varepsilon}-\overline{z}}{e^{i\varphi}\varepsilon} = \frac{\overline{z}+e^{-i\varphi}\varepsilon-\overline{z}}{e^{i\varphi}\varepsilon} = \frac{e^{-i\varphi}\varepsilon}{e^{i\varphi}\varepsilon} = e^{-2i\varphi},$$

dus is de limiet op dit traject gelijk aan $e^{-2i\varphi}$. Maar we kunnen elk getal op de eenheidscirkel als $e^{-2i\varphi}$ schrijven, want als φ van 0 naar $-\pi$ loopt, loopt $e^{-2i\varphi}$ een keer langs de eenheidscirkel.

Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen

Het voorbeeld van de complexe conjugatie is een beetje verontrustend, want het is toch heel omslachtig om steeds te testen of de limiet voor alle mogelijke trajecten waarop h naar 0 gaat hetzelfde is. Gelukkig is dit echter niet nodig, er is een stelling die zegt dat het voldoende is om langs de reële en langs de imaginaire as te kijken. Deze stelling gaan we hier niet bewijzen, maar we kunnen wel een motivatie geven.

We hebben al eerder gezien dat het handig is om apart naar de reële en imaginaire delen van een complexe functie te kijken, want hiervoor kunnen we 3-dimensionale plaatjes maken. Als we een complex getal $z \in \mathbb{C}$ in de vorm $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$ schrijven, kunnen we een complexe functie $f(z)$ zien als een functie van twee reële variabelen, namelijk van $\Re(z)$ en $\Im(z)$. We kunnen dus een complexe functie $f(z)$ beschrijven door twee reële functies van de twee reële variabelen $x = \Re(z)$ en $y = \Im(z)$, namelijk

$$f(z) = \Re(f(z)) + i \cdot \Im(f(z)) = u(x, y) + i \cdot v(x, y).$$

Als we nu ervan uitgaan dat $f(z)$ een complex differentieerbare functie met afgeleide $f'(z)$ is, kunnen we kijken wat dit voor de (reële) functies $u(x, y)$ en $v(x, y)$ betekent. In het bijzonder gaan we bekijken wat er gebeurt als we langs de reële as en langs de imaginaire as naar 0 lopen. Eerst lopen we langs de reële as met $h \to 0$ voor $h \in \mathbb{R}$, dan is

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(u(x+h,y)+i\cdot v(x+h,y)) - (u(x,y)+i\cdot v(x,y))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y)-u(x,y)}{h} + i \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h,y)-v(x,y)}{h} \\
&= \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Het afleiden langs de reële as komt dus overeen met de partiële afgeleide naar het reële deel x van z, waarbij we y als een constante beschouwen.

Nu lopen we langs de imaginaire as met $ih \to 0$ voor $h \in \mathbb{R}$, dan geldt

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} = (-i)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih)-f(z)}{h} \\
&= (-i)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{(u(x,y+h)+i\cdot v(x,y+h)) - (u(x,y)+i\cdot v(x,y))}{h} \\
&= (-i)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h} + (-i)\cdot i \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x,y+h)-v(x,y)}{h} \\
&= -i\cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Maar als $f(z)$ differentieerbaar is weten we dat de twee limieten gelijk moeten zijn, daarom hebben we de noodzakelijke voorwaarde dat de reële en imaginaire delen van de limieten hetzelfde zijn, dus

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Deze twee noodzakelijke voorwaarden heten de *Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen.*

Het belangrijke (en misschien iets verrassende) punt is nu dat deze voorwaarde ook voldoende is, d.w.z. een complexe functie waarvoor de reële en imaginaire delen aan de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen voldoen is complex differentieerbaar.

Stelling: Een complexe functie $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ is complex differentieerbaar dan en slechts dan als $u(x,y)$ en $v(x,y)$ continu differentieerbaar zijn en voldoen aan de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \text{ en } \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Omdat we de limiet van $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ langs de reële as en langs de imaginaire as al in de partiële afgeleiden van $u(x,y)$ en $v(x,y)$ hebben uitgedrukt, kunnen we de waarde van de afgeleide $f'(z)$ expliciet aangeven, namelijk door

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\cdot \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\cdot \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}.$$

Voorbeeld: We passen het criterium van de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen op de complexe exponentiële functie toe. We hebben gezien dat voor $z = x + iy$ geldt dat

$$\exp(z) = \exp(x)\cos(y) + i\cdot \exp(x)\sin(y),$$

dus hebben we:

$$\exp(x+iy) = u(x,y) + i\cdot v(x,y) \text{ met}$$
$$u(x,y) = \exp(x)\cos(y) \quad \text{en} \quad v(x,y) = \exp(x)\sin(y).$$

Om de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen te testen moeten we nu de partiële afgeleiden van $u(x, y)$ en $v(x, y)$ berekenen. Er geldt:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \exp(x)\cos(y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\exp(x)\sin(y),$$
$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \exp(x)\sin(y), \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \exp(x)\cos(y)$$

en we zien dat inderdaad $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ en $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$. We concluderen dat de complexe exponentiële functie complex differentieerbaar is met afgeleide $\exp'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \exp(x)\cos(y) + i \cdot \exp(x)\sin(y) = \exp(z)$.

OPDRACHT 25 *Ga na dat* $\sin(z)$ *en* $\cos(z)$ *aan de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen voldoen en dus complex differentieerbaar zijn. (Hint: De reële en imaginaire delen van de complexe sinus en cosinus functies hebben we bepaald, voor de afgeleiden van de reële hyperbolische functies geldt* $\cosh'(x) = \sinh(x)$ *en* $\sinh'(x) = \cosh(x)$*.)*

Merk op: Met onze kennis over functies van meerdere veranderlijken kunnen we de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen ook op een iets andere manier afleiden: Als we het complexe getal $z = x + iy$ als 2-dimensionale vector $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ schrijven, wordt de vermenigvuldiging van z met een complex getal $a + ib$ beschreven door de 2×2-matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, want $(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$ en er geldt

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix}.$$

Vermenigvuldiging met een complex getal wordt dus beschreven door de speciale 2×2-matrices van de vorm $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

We kunnen nu een complexe functie $f(z)$ opvatten als functie van de twee reële variabelen x en y met $z = x + iy$, die gegeven is door de twee componenten $u(x, y) = \Re(f(z))$ en $v(x, y) = \Im(f(z))$, dus als functie van de vorm

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Maar voor zo'n functie hadden we gezien, dat de afgeleide van $f(x, y)$ een lineaire afbeelding $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeven door een 2×2-matrix is, namelijk door de Jacobi matrix J met de partiële afgeleiden:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

In het algemeen is J een willekeurige lineaire afbeelding $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, en alleen maar in het geval dat J van de vorm $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ is, is de afgeleide de vermenigvuldiging met een complex getal en dit is juist het geval als $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ en $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, dus als $u(x, y)$ en $v(x, y)$ aan de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen voldoen.

Niet elke functie $u(x,y)$ kan reëel of imaginair deel van een holomorfe functie $f(z)$ zijn. Door toepassen van de Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen op $u(x,y) = \Re(f(z))$ vinden we namelijk: $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}$. Volgens de stelling van Schwarz mogen we partiële afgeleiden verruilen, dus is $\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$. We hebben dus $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$. Met een analoge berekening vinden dezelfde relatie ook voor $v(x,y) = \Im(f(z))$, dus $\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0$.

Algemeen heten functies met de eigenschap $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ *harmonische functies* of, gemotiveerd door de natuurkunde, *potentieelfuncties*. We hebben dus gezien dat alleen maar harmonische functies reëel of imaginair deel van een holomorfe functie $f(z)$ kunnen zijn.

Opdracht 26

(i) In welke punten $z \in \mathbb{C}$ is $f(z) := \Re(z)^2 + i \cdot \Im(z)^2$ complex differentieerbaar? Bepaal in deze punten $f'(z)$.

(ii) In welke punten $z \in \mathbb{C}$ is $f(z) := \overline{z}(3z^2 + \overline{z}^2)$ complex differentieerbaar? Bepaal in deze punten $f'(z)$.

Belangrijke begrippen in deze les

- complexe exponentiële functie $\exp(z)$
- $2\pi i$-periodiciteit van de complexe exponentiële functie
- complexe sinus en cosinus functies $\sin(z)$ en $\cos(z)$
- reële en imaginaire delen van $\exp(z)$, $\sin(z)$, $\cos(z)$
- complexe logaritme $\log(z)$
- termsgewijs afleiden van Taylor reeksen
- complexe differentieerbaarheid
- holomorfe functies
- Cauchy-Riemann differentiaalvergelijkingen

Opgaven

54. Bepaal voor de afbeelding $f(z) := z^2$ de beelden van de lijnen

(i) $L_1 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x = 2y\}$,

(ii) $L_2 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x = 2\}$,

(iii) $L_3 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y = -1\}$.

Teken de beelden van de lijnen in het complexe vlak.

55. Bepaal het beeld van de rechthoek $R = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [-1, 1], y \in [\frac{1}{2}, 1]\}$ onder de complexe exponentiële functie. Maak een schets. Kan je algemeen aangeven wat het beeld van een rechthoek $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) \in [a, b], \Im(z) \in [c, d]\}$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ is?

56. Laat zien dat de nulpunten van $\sin(z)$ alle reëel zijn, d.w.z. dat $\sin(z) \neq 0$ als $\Im(z) \neq 0$. Ga na dat hetzelfde ook voor $\cos(z)$ geldt.

57. Laat zien dat voor $z = x+iy$ geldt dat $\Re(\cosh(z)) = \cosh(x)\cos(y)$ en $\Im(\cosh(z)) = \sinh(x)\sin(y)$.

    Bepaal ook $\Re(\sinh(z))$ en $\Im(\sinh(z))$.

58. Vind de oplossingen in $\mathbb{C}$ voor de volgende vergelijkingen:

$$\text{(i) } e^z = i, \qquad \text{(ii) } e^z = 1 + i \qquad \text{(iii) } \cos(z) = -3.$$

59. We bekijken de afbeelding $f(z) := e^{iz}$.

    (i) Bepaal voor een vaste $w \in \mathbb{C}$ de waarden van z met $f(z) = w$.

    (ii) Bepaal een deel $D \subseteq \mathbb{C}$ van het complexe vlak zo dat $f(z)$ op D een omkeerfunctie heeft. Geef de omkeerfunctie aan.

60. Gebruik de relaties $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ en $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ om de afgeleiden $\cos'(z) = -\sin(z)$ en $\sin'(z) = \cos(z)$ rechtstreeks uit de afgeleide van $\exp(z)$ te berekenen (zonder Taylor reeksen of partiële afgeleiden). Let op dat volgens de kettingregel $(e^{iz})' = i \cdot e^{iz}$.

61. De *arcustangens* functie heeft in $z_0 = 0$ de Taylor reeks

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots.$$

    Laat zien dat $\arctan'(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

62. Schrijf voor $z = x + iy$ de volgende functies in de vorm $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ waarbij $u(x, y)$ en $v(x, y)$ reële functies zijn:

    (i) $f(z) = z^2 + 2iz$;

    (ii) $f(z) = \frac{z}{3+z}$;

    (iii) $f(z) = \exp(z^2)$;

    (iv) $f(z) = \log(1 + z)$.