Les 8 Fourier transformatie

8.1 Periodieke functies met perioden verschillend van 2π

In de vorige les hebben we naar de Fourier reeksen voor periodieke functies met periode 2π gekeken. De reden hiervoor was, dat we voor deze periode met de cosinus en sinus functies goed bekende voorbeelden hadden. Maar de beperking tot functies met periode 2π is natuurlijk erg kunstmatig, en we zullen de theorie van Fourier reeksen nu uitbreiden op functies met een willekeurige periode L.

Het idee dat hier achter zit is heel eenvoudig: Door een schaling (van de x-as) maken we uit een interval van lengte L een interval van lengte 2π, hiervoor moeten we L met de factor $\frac{2\pi}{L}$ vermenigvuldigen. Als $f(t)$ een periodieke functie met periode L is, dan definiëren we

$$\omega := \frac{2\pi}{L} \quad \text{en} \quad x := \omega t.$$

Loopt nu t over een volledige periode, d.w.z. over een interval van lengte L, dan loopt x over een interval van lengte $\omega L = 2\pi$. We definiëren nu een nieuwe functie $g(t)$ door

$$g(t) := f(\frac{1}{\omega}t), \text{ dus } f(t) = g(\omega t) = g(x)$$

en voor de nieuwe variabel x is $g(x)$ een functie met periode 2π.

Op de functie $g(x)$ kunnen we nu de theorie van Fourier reeksen voor functies met periode 2π toepassen, we krijgen dus

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{met} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx.$$

Maar omdat $f(t) = g(x)$ en $x = \omega t$, kunnen we dit ook schrijven als

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt}.$$

Let op: In de coëfficiënten c_k mogen we x niet zo maar door ωt vervangen, omdat x hier een integratie variabel is. Dit is dus een echte *substitutie*:

$$x = \omega t, \quad dx = \omega\,dt,$$

De integratie over x loopt van $-\pi$ tot π, dus loopt de integratie voor t van $\frac{1}{\omega}(-\pi) = -\frac{L}{2}$ tot $\frac{1}{\omega}\pi = \frac{L}{2}$. We krijgen dus

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} g(\omega t)e^{-i\omega kt}\omega\,dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-i\omega kt}\,dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-i\omega kt}\,dt. \end{aligned}$$

De Fourier reeks van een functie $f(t)$ met periode L is dus:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt} \quad \text{met} \quad c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-i\omega kt} \, dt.$$

Op een soortgelijke manier wordt ook de reële versie van de Fourier reeks aangepast, want we schrijven

$$\begin{aligned} f(t) = g(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt) \end{aligned}$$

en weer met de substitutie $x = \omega t$, $dx = \omega\ dt$ vinden we:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx) \, dx = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(\omega kt) \, dt \text{ voor } k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx) \, dx = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(\omega kt) \, dt \text{ voor } k \geq 1. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de reële versie van de Fourier reeks voor een functie $f(t)$ met periode L:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt) \quad \text{met} \\ a_k &= \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(\omega kt) \, dt, \qquad b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(\omega kt) \, dt. \end{aligned}$$

De Fourier reeksen voor periodieke functies met periode L kan men ook direct afleiden door de methode van orthogonale projecties aan de periode L aan te passen:

Het inproduct is $\Phi(f(t), g(t)) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)g(t)\, dt$, het orthogonale stelsel is $\{\cos(\omega kt), \sin(\omega lt) \mid k \geq 0, l \geq 0\}$ met $\omega = \frac{2\pi}{L}$ en er geldt $\Phi(\cos(0), \cos(0)) = L$, $\Phi(\cos(\omega kt), \cos(\omega kt)) = \Phi(\sin(\omega kt), \sin(\omega kt)) = \frac{L}{2}$ voor $k \geq 1$.

8.2 Van Fourier reeks naar Fourier integraal

Bij de ontwikkeling van een periodieke functie $f(t)$ met periode L in zijn Fourier reeks is $\omega = \frac{2\pi}{L}$ de basis frequentie en de coëfficiënt c_k geeft de intensiteit van de trilling met frequentie $k\omega$ in de functie $f(t)$ aan. In het bijzonder geven naburige coëfficiënten c_k en c_{k+1} de intensiteiten voor frequenties met een verschil van ω aan. Als we nu naar periodieke functies met verschillende periodes kijken, hangen de afstanden tussen de frequenties die aan de functies bijdragen van de periode af. Als we de periode verdubbelen, moeten we naar frequenties met een half zo grote afstand kijken. Hoe langer de periode van een functie, hoe meer frequenties in een bepaald interval spelen dus een rol.

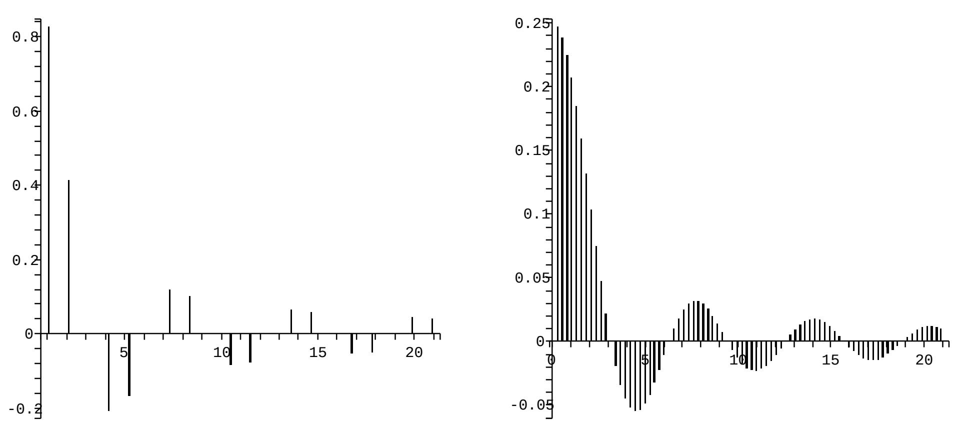
Voorbeeld: We kijken naar een impuls van lengte $2a$ en intensiteit 1 tussen $t = -a$ en $t = a$, die met een periode van L herhaald. Omdat de functie even is, hoeven we alleen maar de coëfficiënten a_k te bepalen, en er geldt:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(\omega kt)\,dt = \frac{2}{L}\int_{-a}^{a}\cos(\omega kt)\,dt = \frac{2}{L}\frac{1}{\omega k}\sin(\omega kt)\Big|_{-a}^{a} \\ &= \frac{4}{L}\frac{\sin(\omega ka)}{\omega k} = \frac{4a}{L}\frac{\sin(\omega ka)}{\omega ka}. \end{aligned}$$

Als we nu de afstand tussen de impulsen verdubbelen, dus de periode van L naar $L' = 2L$ verdubbelen, krijgen we nieuwe Fourier coëfficiënten a'_k voor veelvouden van de nieuwe grondfrequentie $\omega' = \frac{1}{2}\omega$, namelijk

$$a'_k = \frac{4a}{L'}\frac{\sin(\omega' ka)}{\omega' ka} = \frac{2a}{L}\frac{\sin(\omega\frac{k}{2}a)}{\omega\frac{k}{2}a}.$$

De coëfficiënt a_k geeft de intensiteit van de trilling met frequentie $\omega k = 2\omega' k = \omega' \cdot 2k$ aan, dus hoort bij de frequentie ωk in de nieuwe Fourier reeks de coëfficiënt a'_{2k}. Er geldt $a'_{2k} = \frac{2a}{L}\frac{\sin(\omega ka)}{\omega ka} = \frac{1}{2}\,a_k$, dus zijn de intensiteiten voor dezelfde frequentie tot op een factor $\frac{1}{2}$ na hetzelfde. Maar tussen twee naburige frequenties ωk en $\omega(k+1)$ voor de impuls met periode L ligt er nu nog de frequentie $\omega\frac{k+(k+1)}{2} = \omega'(2k+1)$ omdat de afstanden tussen de frequenties gehalveerd zijn.



Figuur II.9: Fourier coëfficiënten voor rechthoek impuls met periode L en $4L$.

In Figuur II.9 is het effect van het vergrootten van de periode te zien. De x-as geeft de frequenties aan, en voor de frequenties die aan de Fourier reeks bijdragen is de waarde van de bijhorende coëfficiënt a_k door een verticale lijn aangegeven. Het is duidelijk te zien dat bij de overgang van een periode L naar $4L$ de bijdragende frequenties 4 keer dichter bij elkaar liggen.

Als we de lengte van de periode steeds verder laten groeien, verliest de functie uiteindelijk zijn periodieke karakter en in de limiet kunnen we iedere functie als periodieke functie met periode $L = \infty$ opvatten. Maar de limiet $L \to \infty$ correspondeert met de limiet $\omega \to 0$, dus moeten we voor dit geval frequenties met oneindig kleine afstand bekijken en een intensiteit voor elke frequentie op een continue lijn bepalen. In het rechter plaatje van Figuur II.9 kan men zich dit al goed voorstellen, de verticale lijnen geven al bijna de contour van een continue functie aan.

We gaan nu de overgang van discrete frequenties voor een periodieke functie naar een continu spectrum van frequenties voor een niet-periodieke functie nader bekijken.

Hiervoor schrijven we een functie $f(t)$ met periode L als Fourier reeks:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt} \text{ met } c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-i\omega kt}\, dt \text{ waarbij } \omega = \frac{2\pi}{L}.$$

Eerst vullen we de coëfficiënten c_k in de Fourier reeks in, dit geeft:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) e^{-i\omega k\tau}\, d\tau \right) e^{i\omega kt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) e^{-i\omega k\tau}\, d\tau \right) e^{i\omega kt} \omega. \end{aligned}$$

Als we nu de limiet $L \to \infty$ bekijken, gaat $\omega \to 0$, dus loopt ωk in steeds kleinere stappen ω van $-\infty$ naar ∞. Uiteindelijk wordt ωk een continue variabel die we u noemen en die in stappen van $\Delta u = \omega$ van $-\infty$ naar ∞ loopt. Elke term in de som wordt dan een term van de vorm

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) e^{-iu\tau}\, d\tau \right) e^{iut} \Delta u$$

en uiteindelijk gaat de som over deze termen over in een integraal en we krijgen een van de centrale stellingen van de Fourier theorie:

Fourier integraal identiteit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-iu\tau}\, d\tau \right) e^{iut}\, du.$$

Merk op dat in de binnenste integraal τ de integratie variabel is, terwijl u hier als constante behandeld wordt.

Om de Fourier integraal identiteit iets overzichtelijker te schrijven definiëren we de binnenste integraal als een aparte functie van u:

$$F(u) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, dt \quad \text{dan is} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iut}\, du.$$

Als we de formule $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iut}\, du$ met de Fourier reeks $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt}$ van een periodieke functie vergelijken, zien we dat we de functie $F(u)$ kunnen opvatten als de continue versie van de Fourier coëfficiënten c_k.

Definitie:

(i) De functie

$$F(u) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\, dt$$

heet de *Fourier getransformeerde* of *Fourier transformatie* van $f(t)$ en wordt genoteerd met $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ of $F(u) = \hat{f}$.

(ii) De afbeelding $\mathcal{F} : f(t) \to \mathcal{F}[f(t)]$ die een functie $f(t)$ op zijn Fourier getransformeerde $F(u)$ afbeeldt, wordt zelf ook *Fourier transformatie* genoemd.

(iii) Omgekeerd komen we van de functie $F(u)$ terug naar $f(t)$ door

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iut}\, du$$

en we noemen dit de *inverse Fourier transformatie* van $F(u)$, genoteerd met $\mathcal{F}^{-1}[F(u)]$.

De Fourier transformatie levert een 'tweede taal' om over functies te praten: De Fourier transformatie vertaald een functie vanuit het *tijdsdomein* naar het *frequentiedomein*, de inverse Fourier transformatie is de vertaling de andere kant op. Omdat sommige eigenschappen van een functie beter in het tijdsdomein, andere beter in het frequentiedomein beschreven worden, is het heen en weer schakelen tussen de twee talen een fundamenteel hulpmiddel in vele gebieden van signaalverwerking en patroonherkenning.

De factor $\frac{1}{2\pi}$ in de Fourier integraal identiteit geeft aanleiding tot verschillende formuleringen van de Fourier transformatie. Bij de Fourier transformatie en de inverse Fourier transformatie moeten er namelijk factoren voor de integraal staan, die met elkaar vermenigvuldigd $\frac{1}{2\pi}$ opleveren. Drie voor de hand liggende mogelijkheden zijn:

(i) 1 bij de Fourier transformatie en $\frac{1}{2\pi}$ bij de inverse Fourier transformatie (zo als aangegeven),

(ii) $\frac{1}{2\pi}$ bij de Fourier transformatie en 1 bij de inverse Fourier transformatie,

(iii) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ bij de Fourier transformatie en ook bij de inverse Fourier transformatie.

De laatste versie benadrukt de symmetrie tussen Fourier transformatie en inverse Fourier transformatie, maar wij zullen bij de eerste optie blijven.

8.3 Schrijfwijzen van de Fourier transformatie

Net als voor de Fourier reeks zijn er ook voor de Fourier transformatie verschillende schrijfwijzen.

Amplitude en fase spectrum

Met behulp van absolute waarde en argument kunnen we $F(u)$ schrijven als

$$F(u) = |F(u)|e^{i\Phi(u)}$$

dan heet $|F(u)|$ het *amplitude spectrum* en $\Phi(u)$ het *fase spectrum* van $f(t)$.

Uit $e^{-i(-u)t} = e^{iut} = \overline{e^{-iut}}$ volgt voor reële functies $f(t)$:

$$F(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-u)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{e^{-iut}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-iut}}\,dt = \overline{F(u)}.$$

Hieruit volgt in het bijzonder dat het amplitude spectrum $|F(u)|$ een even functie en het fase spectrum $\Phi(u)$ een oneven functie is.

Reële schrijfwijze

In analogie met de reële schrijfwijze van Fourier reeksen is er ook een reële schrijfwijze voor de Fourier transformatie van een reële functie $f(t)$. We schrijven

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(ut) - i\sin(ut))\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ut)\,dt - i\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ut)\,dt \end{aligned}$$

en definiëren

$$a(u) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ut)\,dt, \qquad b(u) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ut)\,dt$$

dan is $F(u) = a(u) - ib(u)$. Er geldt $a(-u) = a(u)$ omdat $\cos(-ut) = \cos(ut)$ en $b(-u) = -b(u)$ omdat $\sin(-ut) = -\sin(ut)$, dus:

$$a(u) \text{ is een even functie,} \quad b(u) \text{ is een oneven functie.}$$

Als we de Fourier integraal identiteit met behulp van reële functies uitschrijven, krijgen we:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iut}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)(\cos(ut) + i\sin(ut))\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (a(u) - ib(u))(\cos(ut) + i\sin(ut))\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (a(u)\cos(ut) + b(u)\sin(ut))\,du \\ &+ i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (a(u)\sin(ut) - b(u)\cos(ut))\,du. \end{aligned}$$

Maar $f(t)$ is een reële functie, daarom verdwijnt het imaginaire deel en we hebben
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (a(u)\cos(ut) + b(u)\sin(ut))\, du.$$
Nu weten we dat $a(u)$ even en $b(u)$ oneven is, hieruit volgt $a(-u)\cos(-ut) = a(u)\cos(ut)$ en $b(-u)\sin(-ut) = -b(u)(-\sin(ut)) = b(u)\sin(ut)$ en daarom levert de integratie van $-\infty$ tot 0 hetzelfde op als de integratie van 0 tot ∞. We hebben dus uiteindelijk gevonden:
$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} (a(u)\cos(ut) + b(u)\sin(ut))\, du \quad \text{met}$$
$$a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ut)\, dt \quad \text{en} \quad b(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ut)\, dt.$$
Als $f(t)$ een even functie is, is $f(t)\sin(ut)$ een oneven functie, maar dan is $b(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ut)\, dt = 0$. Voor een oneven functie $f(t)$ is $f(t)\cos(ut)$ een oneven functie, dus volgt in dit geval met hetzelfde argument dat $a(u) = 0$ is.

Fourier cosinus en Fourier sinus transformatie

Voor reële functies $f(t)$ die alleen maar voor $0 \leq t < \infty$ gedefinieerd zijn, worden vaak ook de *Fourier cosinus transformatie* en de *Fourier sinus transformatie* toegepast. Het idee hierbij is, de functie door $f(-t) := f(t)$ tot een even of door $f(-t) := -f(-t)$ tot een oneven functie op de hele reële as voort te zetten. Voor de voortgezette functie is dan bij de Fourier transformatie of de functie $b(u)$ de 0-functie (even geval) of de functie $a(u)$ is de 0-functie (oneven geval).

Voor de *Fourier cosinus transformatie* stellen we ons voor dat $f(t)$ door $f(-t) := f(t)$ tot een even functie $f_e(t)$ op de hele reële as voortgezet wordt en berekenen hiervoor de reële versie van de Fourier transformatie.

Voor de voortgezette functie $f_e(t)$ krijgen we
$$a(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e(t)\cos(ut)\, dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(ut)\, dt$$
omdat $f(t)\cos(ut)$ een even functie is.

Definitie: De integraal
$$F_c(u) := \int_{0}^{\infty} f(t)\cos(ut)\, dt$$
heet de *Fourier cosinus transformatie* van $f(t)$. Er geldt:
$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} F_c(u)\cos(ut)\, dt \quad \text{met} \quad F_c(u) = \int_{0}^{\infty} f(t)\cos(ut)\, dt.$$

Net zo kunnen we $f(t)$ door $f(-t) := -f(t)$ tot een oneven functie $f_o(t)$ op de hele reële as voortzetten. Voor de voortgezette functie $f_o(t)$ krijgen we
$$b(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(t)\sin(ut)\, dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\sin(ut)\, dt$$

omdat nu $f(t)\sin(ut)$ een even functie is.

Definitie: De integraal

$$F_s(u) := \int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$$

heet de *Fourier sinus transformatie* van $f(t)$. Hiervoor geldt:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(u)\sin(ut)\,dt \quad \text{met} \quad F_s(u) = \int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt.$$

8.4 Eigenschappen van de Fourier transformatie

De meeste eigenschappen van de Fourier transformatie volgen uit eigenschappen van de integraal. Het probleem is dat we het hier met oneindige integralen te maken hebben, waar soms dingen mis kunnen gaan. Omdat we ons hier niet met wiskundige details willen bemoeien, veronderstellen we nu dat het voor de functies waarin wij geïnteresseerd zijn nooit mis gaat en onderdrukken twijfels die bij sommige stappen misschien op komen dagen.

Bestaan

Omdat de Fourier getransformeerde middels een integratie over de hele reële as gedefinieerd is, moeten we wel een opmerking kwijt, wanneer de integraal überhaupt bestaat. Een integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ is namelijk gedefinieerd als de limiet $L \to \infty$ van $\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$ en die limiet hoeft helemaal niet te bestaan. Voldoende voorwaarden waaronder de Fourier getransformeerde van $f(t)$ wel bestaat, zijn:

(i) $f(t)$ en $f'(t)$ zijn stuksgewijs continu op eindige intervallen;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$.

Net als bij de stelling van Dirichlet over de Fourier reeksen is in het bijzonder (ii) geen noodzakelijke voorwaarde. Sommige functies waarvoor (ii) niet geldt zullen we zelfs in de volgende les bekijken, omdat ze bijzonder belangrijk zijn.

Fourier transformatie ↔ inverse Fourier transformatie

Als $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ de Fourier getransformeerde van $f(t)$ is, geldt $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iut}\,du$ en dus $f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-iut}\,du$. Maar het laatste is tot op de factor $\frac{1}{2\pi}$ na de Fourier getransformeerde van $F(u)$, dus is

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(u)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]].$$

Er geldt dus

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]] = 2\pi f(-t)$$

en als we dit vergelijken met de toepassing

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(t)]] = f(t)$$

van de inverse Fourier transformatie zien we, dat de inverse Fourier transformatie tot op een vermenigvuldiging met de factor 2π na hetzelfde is als de Fourier transformatie gecombineerd met *tijdsomkeer*. In het bijzonder zijn voor even functies $f(t)$ Fourier transformatie en inverse Fourier transformatie tot op de factor 2π na hetzelfde.

Lineariteit

Uit de lineariteit van de integraal volgt meteen de lineariteit van de Fourier transformatie, want voor twee functies $f(t)$ en $g(t)$ is $\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)+g(t))e^{-iut}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iut}\,dt$. Net zo geldt voor de vermenigvuldiging met een factor c dat $\int_{-\infty}^{\infty} c \cdot f(t)e^{-iut}\,dt = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt$. Dit geeft

$$\mathcal{F}[f(t) + g(t)] = \mathcal{F}[f(t)] + \mathcal{F}[g(t)] \quad \text{en} \quad \mathcal{F}[c \cdot f(t)] = c \cdot \mathcal{F}[f(t)]$$

dat wil zeggen de Fourier transformatie is een lineaire afbeelding van functies.

Verschuiving

Als we de Fourier transformatie van een functie $f(t)$ hebben berekend is het handig als we hieruit de Fourier transformatie van een verschuiving van $f(t)$ langs de reële as af kunnen leiden. Als we bijvoorbeeld de Fourier transformatie van een rechthoek impuls rond $t = 0$ kennen, willen we hieruit graag de Fourier transformatie van een rechthoek impuls rond een tijdstip t_0 kunnen berekenen. Hiervoor moeten we de Fourier transformatie van de functie

$$g(t) := f(t - t_0)$$

berekenen. Als we de Fourier getransformeerden van $g(t)$ en $f(t)$ met $G(u) := \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[f(t - t_0)]$ en $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ noteren, vinden we:

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-iut}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-iu(t-t_0)}e^{-iut_0}\,dt \\ &= e^{-iut_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iu\tau}\,d\tau = e^{-iut_0}F(u) \end{aligned}$$

waarbij we in de stap van de eerste naar de tweede rij de substitutie $\tau := t - t_0$, $d\tau = dt$ hebben toegepast. Voor een om t_0 langs de reële as verschoven functie geldt dus

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-iut_0}\mathcal{F}[f(t)].$$

Dit betekent dat we alleen maar de fase van de Fourier getransformeerde veranderen, maar niet de amplitude $|\mathcal{F}[f(t - t_0)]|$, omdat e^{-iut_0} een getal op de eenheidscirkel is. Een verschuiving in het tijdsdomein resulteert dus in een fase-verschuiving in het frequentiedomein.

Schaling

Naast een *verschuiving* in het tijdsdomein is ook een *schaling* van de tijd een eenvoudige maar belangrijke transformatie die we vaak tegen komen. Zij $g(t) := f(at)$ en noteer de Fourier getransformeerden met $G(u) := \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[f(at)]$ en $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$. We veronderstellen eerst dat $a > 0$, dan krijgen we met de substitutie $\tau = at$, $d\tau = a\ dt$ (dus $dt = \frac{1}{a}\ d\tau$):

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-iut}\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\frac{u}{a}\tau}\frac{1}{a}\ d\tau = \frac{1}{a}F(\frac{u}{a}).$$

Als $a < 0$ werkt de substitutie hetzelfde, maar als t van $-\infty$ naar ∞ loopt, loopt in dit geval $\tau = at$ van ∞ naar $-\infty$. We moeten dus de grenzen van de integratie omdraaien en daarom het resultaat met -1 vermenigvuldigen, dus krijgen we in dit geval $G(u) = -\frac{1}{a}F(\frac{u}{a})$. Als we de twee gevallen combineren, volgt hieruit

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(u) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a}).$$

Dit betekent dat een schaling in het tijdsdomein correspondeert met de inverse schaling in het frequentiedomein, dus een rekking wordt een comprimering en andersom.

Afgeleiden

We kunnen ons afvragen, of er een eenvoudige manier is om van de Fourier getransformeerde van een functie $f(t)$ naar de Fourier getransformeerde van de afgeleide $f'(t)$ te komen. Laten $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ en $G(u) := \mathcal{F}[f'(t)]$, dan geldt met partiële integratie

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iut}\ dt = f(t)e^{-iut}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-iu)e^{-iut}\ dt \\ &= f(t)e^{-iut}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iuF(u). \end{aligned}$$

Als we nu veronderstellen dat $f(t) \to 0$ voor $t \to \pm\infty$, valt de eerste term weg en er geldt

$$\mathcal{F}[f'(t)] = iu\mathcal{F}[f(t)].$$

Ook over de afgeleide van de Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ in het frequentiedomein kunnen we iets zeggen. Er geldt $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\ dt$ en als we dit naar u gaan afleiden, mogen we de differentiatie onder zekere voorwaarden (die we hier als gegeven veronderstellen) met de integratie verruilen.

> Denk hierbij aan de integraal als een oneindige som: Ook voor functies die door een oneindige reeks gegeven zijn, hadden we gezien dat we de afgeleide krijgen door de reeks termsgewijs af te leiden.

We hebben dus

$$F'(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-iut})'\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-iut}\ dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-iut}\ dt$$

en de laatste integraal is de Fourier getransformeerde van $tf(t)$. Er geldt dus

$$\mathcal{F}[f(t)]' = F'(u) = -i\mathcal{F}[tf(t)],$$

waarbij we veronderstellen dat de functie $tf(t)$ een Fourier getransformeerde *heeft*, dus dat in het bijzonder de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,dt$ bestaat.

8.5 Het convolutieproduct

De meest belangrijke operatie bij Fourier transformaties is de vermenigvuldiging van de getransformeerde functies in het frequentiedomein. Het idee hierbij is, bepaalde frequentie intervallen te versterken of af te zwakken door de Fourier getransformeerde met een functie te vermenigvuldigen die voor deze frequenties een grote of kleine waarde heeft. We zullen hier in de volgende les concrete voorbeelden van zien.

Laten $f(t)$ en $g(t)$ twee functies in het tijdsdomein zijn met Fourier getransformeerden $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$ en $\mathcal{F}[g(t)] = G(u)$. Dan is

$$\begin{aligned} F(u)\cdot G(u) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iu\tau}\,d\tau\right)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau')e^{-iu\tau'}\,d\tau'\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iu\tau}\,d\tau\right) g(\tau')e^{-iu\tau'}\,d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau')e^{-iu(\tau+\tau')}\,d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

Als de lezer twijfels heeft over de manier hoe de integralen gemanipuleerd worden, is het verstandig om de integralen als oneindige sommen te interpreteren. Hiervoor zijn de omvormingen redelijk voor de hand liggend.

We substitueren nu $t = \tau + \tau'$, dan is $\tau' = t - \tau$ en $d\tau' = dt$. Dit geeft

$$\begin{aligned} F(u)\cdot G(u) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-iut}\,d\tau\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right) e^{-iut}dt. \end{aligned}$$

We zien dat het resultaat ook weer de Fourier getransformeerde van een functie is, namelijk van de functie

$$h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

die door de binnenste integraal gegeven is.

Definitie: De functie

$$h(t) := f(t) * g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

heet het *convolutieproduct*, de *convolutie* of de *vouwing* van $f(t)$ en $g(t)$ en wordt genoteerd met een sterretje voor het product.

De cruciale eigenschap van het convolutieproduct $f(t)*g(t)$ is dat $F(u)\cdot G(u)$ de Fourier getransformeerde van deze functie is, dus dat

$$\mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[f(t) * g(t)].$$

Merk op: Het puntsgewijs product $F(u) \cdot G(u)$ van twee functies in het frequentiedomein correspondeert via de Fourier transformatie met het convolutieproduct $\mathcal{F}^{-1}[F(u)] * \mathcal{F}^{-1}[G(u)]$ van de inverse Fourier getransformeerden in het tijdsdomein. Deze samenhang is in feite de hoofdreden om überhaupt naar een zo rare constructie als als het convolutieproduct te kijken.

Belangrijke begrippen in deze les

- Fourier reeksen voor periodieke functies met willekeurige periode
- Fourier integraal identiteit
- Fourier transformatie, inverse Fourier transformatie
- amplitude spectrum, fase spectrum
- Fourier cosinus transformatie, Fourier sinus transformatie
- eigenschappen van de Fourier transformatie
- convolutieproduct

Opgaven

68. Zij $f(t)$ een functie met Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$.

    (i) Toon aan dat $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-u)$. Dit betekent dat een spiegeling in het tijdsdomein ook een spiegeling in het frequentiedomein tot gevolg heeft.

    (ii) Neem nu aan dat $f(t)$ een *reële* functie is. Laat zien dat $F(-u) = \overline{F(u)}$.

69. Toon aan dat voor $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ een verschuiving in het frequentiedomein gegeven is door de formule $F(u - u_0) = \mathcal{F}[f(t)e^{iu_0 t}]$.

70. Zij $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ de Fourier getransformeerde van $f(t)$. Bepaal de Fourier getransformeerde van $f(t)\cos(\omega t)$. (De functie $f(t)\cos(\omega t)$ noemt men een *modulatie*.)

71. Ga na dat het convolutieproduct *commutatief* is, d.w.z. dat $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

72. We hebben gezien dat voor de Fourier getransformeerden $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ en $G(u) = \mathcal{F}[g(t)]$ geldt, dat $F(u) \cdot G(u) = \mathcal{F}[f(t) * g(t)]$.

    (i) Laat zien dat omgekeerd geldt dat

    $$\mathcal{F}^{-1}[F(u) * G(u)] = 2\pi f(t) \cdot g(t) \text{ en dus } \mathcal{F}[f(t) \cdot g(t)] = \frac{1}{2\pi} F(u) * G(u).$$

(ii) Bewijs hiermee dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot G(-u)\, du.$$

(iii) Concludeer dat voor een *reële* functie $f(t)$ geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2\, du.$$

Deze relatie heet de *Parseval identiteit*.