

Les 9 Voorbeelden en toepassingen van de Fourier transformatie

We hebben in de vorige les de theorie van de Fourier transformatie behandeld en een aantal eigenschappen van de Fourier transformatie bekeken. Tot nog toe is de Fourier transformatie echter een abstracte procedure die aan een functie in het tijdsdomein een functie in het frequentiedomein toewijst. Om enigszins begrip van de Fourier transformatie te krijgen, zullen we in deze les de Fourier getransformeerden van een aantal belangrijke functies expliciet berekenen.

Verder leren we een nieuwe *functie* kennen, die geen functie van de gebruikelijke soort is, namelijk de *Dirac δ -functie*. Deze functie is overal nul, behalve in een enkele punt, waar ze zo groot is (oneindig) dat de integraal over de hele reële as niet de waarde 0 maar 1 geeft. We zullen zien dat deze rare functie in het kader van de Fourier transformatie heel nuttig is.

Ten slotte gaan we in deze les als toepassing van de Fourier transformatie bekijken, hoe high-pass en low-pass filters werken, die de contrasten van een plaatje of geluid aanscherpen of verzachten.

9.1 Belangrijke voorbeelden

We zullen voor een aantal elementaire functies de Fourier transformaties bepalen. Met behulp van verschuiven, schalen en het optellen van functies laten zich uit deze functies natuurlijk ingewikkeldere functies opbouwen.

Rechthoek impuls

Zij $f(t)$ een rechthoek impuls van sterkte 1 tussen de tijden $-a$ en a , dus

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

dan berekenen we de Fourier getransformeerde $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ als volgt:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt = \int_{-a}^a e^{-iut} dt = \frac{1}{-iu} e^{-iut} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{-iu} (e^{-iua} - e^{iua}) \\ &= \frac{2}{u} \frac{e^{iua} - e^{-iua}}{2i} = \frac{2}{u} \sin(au) = 2 \frac{\sin(au)}{u} \end{aligned}$$

Om de Fourier getransformeerden voor verschillende breedten van de impuls goed te kunnen vergelijken, is het handig de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ op 1 te normeren. Hiervoor moeten we naar een impuls van sterkte $\frac{1}{2a}$ in plaats van 1 kijken.

Omdat de Fourier transformatie een lineaire afbeelding is, hoeven we nu niet opnieuw te rekenen, we moeten het resultaat alleen maar met $\frac{1}{2a}$ vermenigvuldigen. De functie $g(t)$ met

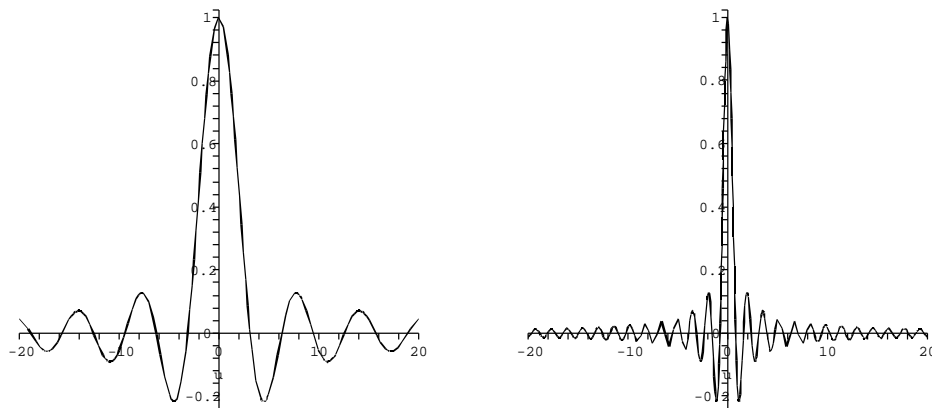
$$g(t) := \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

heeft dus de Fourier getransformeerde

$$G(u) = \mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{2a} \cdot 2 \frac{\sin(au)}{u} = \frac{\sin(au)}{au}.$$

We zien dat de parameter a van de rechthoek impuls bij de Fourier getransformeerde de rol van een schaling van de u -as speelt: Als we a verdubbelen, moeten we de u -as met een factor 2 samen schuiven. Dit betekent in het bijzonder dat voor een grotere waarde van a , dus een langere impuls, de Fourier getransformeerde met stijgende frequenties sneller afneemt als voor en kleinere waarde van a . Dit zouden we ook zo verwachten, want een korte impuls geeft een snelle verandering en heeft dus met hogere frequenties te maken.

In Figuur II.10 zijn de Fourier getransformeerden van een rechthoek impuls voor $a = 1$ en $a = 4$ te zien. Zo als verwacht neemt de getransformeerde van de langere impuls met $a = 4$ duidelijk sneller af dan de getransformeerde van de kortere impuls met $a = 1$.



Figuur II.10: Fourier getransformeerden van rechthoek impulsen met $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Driehoek impuls

Zij $f(t)$ een driehoek impuls die tussen de tijden $-a$ en 0 lineair van 0 tot 1 groeit en tussen 0 en a weer lineair naar 0 daalt, dus

$$f(t) := \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

De Fourier getransformeerde $F(u)$ van $f(t)$ is

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt = \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{t}{a}\right)e^{-iut} dt + \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right)e^{-iut} dt.$$

Dit lossen we met partiële integratie op, de primitieve van e^{-iut} is $\frac{1}{-iu}e^{-iut}$ en de afgeleide van $1 \pm \frac{t}{a}$ is $\pm \frac{1}{a}$. Voor de eerste integraal volgt hieruit

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{t}{a}\right) e^{-iut} dt &= \left(1 + \frac{t}{a}\right) \frac{1}{-iu} e^{-iut} \Big|_{-a}^0 - \int_{-a}^0 \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{-iu} e^{-iut} dt \\ &= -\frac{1}{iu} - 0 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{iu} \int_{-a}^0 e^{-iut} dt = -\frac{1}{iu} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(iu)^2} e^{-iut} \Big|_{-a}^0 \\ &= -\frac{1}{iu} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} e^{iua} \end{aligned}$$

Net zo krijgen we voor de tweede integraal

$$\begin{aligned} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{-iut} dt &= \left(1 - \frac{t}{a}\right) \frac{1}{-iu} e^{-iut} \Big|_0^a - \int_0^a -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{-iu} e^{-iut} dt \\ &= 0 + \frac{1}{iu} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{iu} \int_0^a e^{-iut} dt = \frac{1}{iu} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{(iu)^2} e^{-iut} \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{iu} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} e^{-iua} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} \end{aligned}$$

Als we de twee integralen bij elkaar optellen, krijgen we dus

$$\begin{aligned} F(u) &= -\frac{1}{iu} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} e^{iua} + \frac{1}{iu} - \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} e^{-iua} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{u^2} \\ &= \frac{1}{au^2} (2 - e^{iua} - e^{-iua}). \end{aligned}$$

Met een klein trucje kunnen we dit nog iets eenvoudiger schrijven, er geldt namelijk

$$(e^{iu\frac{a}{2}} - e^{-iu\frac{a}{2}})^2 = e^{iua} - 2 + e^{-iua} = -(2 - e^{iua} - e^{-iua})$$

Hieruit volgt

$$\sin^2\left(\frac{a}{2}u\right) = \left(\frac{e^{iu\frac{a}{2}} - e^{-iu\frac{a}{2}}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{iu\frac{a}{2}} - e^{-iu\frac{a}{2}})^2 = \frac{1}{4}(2 - e^{iua} - e^{-iua})$$

en als we dit in de gevonden formule van $F(u)$ invullen, krijgen we uiteindelijk:

$$F(u) = \frac{4}{au^2} \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}u\right) = \frac{a}{\left(\frac{a}{2}u\right)^2} \cdot \sin^2\left(\frac{a}{2}u\right) = a \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{a}{2}u\right)}{\frac{a}{2}u}\right)^2.$$

Als we ook bij deze functie de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ op 1 normeren, moeten we $f(t)$ met $\frac{1}{a}$ vermenigvuldigen, dit geeft de functie

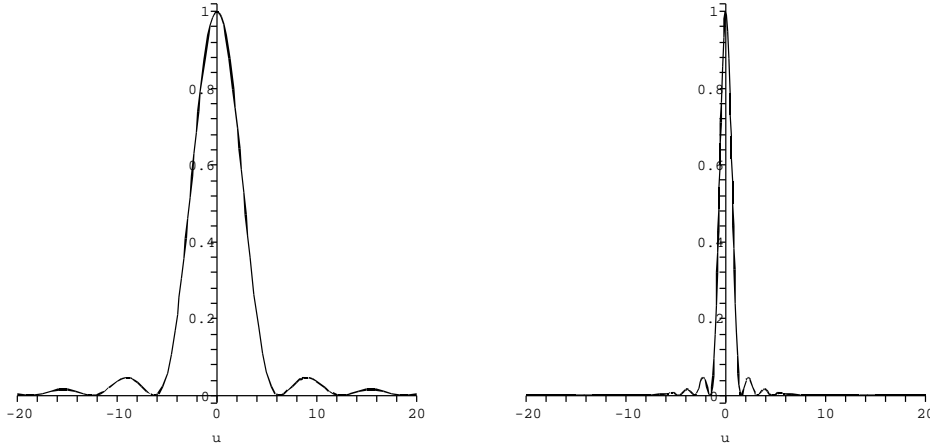
$$g(t) := \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{|t|}{a^2} & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

Deze functie $g(t)$ heeft als Fourier getransformeerde

$$\mathcal{F}[g(t)] = \left(\frac{\sin\left(\frac{a}{2}u\right)}{\frac{a}{2}u}\right)^2$$

dus speelt ook hier de parameter a de rol van een schaling van de u -as.

Ook de plaatjes van de Fourier getransformeerden van de driehoek impuls in Figuur II.11 laten duidelijk zien dat bij de kortere impuls voor $a = 1$ de hogere frequenties een grotere rol spelen dan bij de impuls voor $a = 4$.



Figuur II.11: Fourier getransformeerden van driehoek impulsen met $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Gauss functie

Een belangrijke rol bij de Fourier transformaties speelt de Gauss functie $f(t) := e^{-at^2}$, die we in verband met de normale verdeling ook in de kansrekening en statistiek tegen komen. De opmerkelijke eigenschap van deze functie ten opzichte van de Fourier transformatie is, dat de Fourier getransformeerde weer een functie van dezelfde soort is. Om dit na te gaan, hebben we de integraal van $-\infty$ tot ∞ van de Gauss functie nodig, die we in het kader van de integratie van functies van meerdere veranderlijken hebben bepaald:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{en dus} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

waarbij de tweede integraal met de substitutie $\sqrt{a} \cdot t = x$, $\sqrt{a} dt = dx$ uit de eerste volgt.

Voor de Gauss functie $f(t) := e^{-at^2}$ met $a > 0$ geldt voor de Fourier getransformeerde $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-iut} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t^2 + i\frac{u}{a}t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + i\frac{u}{2a})^2} \cdot e^{a(i\frac{u}{2a})^2} dt \\ &= e^{-\frac{u^2}{4a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t + i\frac{u}{2a})^2} dt = e^{-\frac{u^2}{4a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4a}} \end{aligned}$$

waarbij we in de voorlaatste stap de substitutie $\tau = t + i\frac{u}{2a}$, $d\tau = dt$ toepassen. We hebben dus ingezien:

Stelling: De Fourier getransformeerde van een Gauss functie is ook weer een Gauss functie, er geldt:

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4a}}.$$

De dichtheidsfunctie van een normale verdeling met verwachtingswaarde 0 en standaardafwijking σ is de Gauss functie

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

dus moeten we $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ in ons resultaat invullen. Dit geeft $\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{2\pi} \sigma$ en $\frac{u^2}{4a} = \frac{\sigma^2 u^2}{2} = \frac{u^2}{2\sigma^{-2}}$, dus geldt:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \sqrt{2\pi} \sigma \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^{-2}}}.$$

De Fourier getransformeerde van een normale verdeling met standaardafwijking σ is dus een normale verdeling met standaardafwijking $\sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma}$. In het bijzonder is de Fourier getransformeerde van een standaard-normale verdeling (met standaardafwijking 1) zelf ook een standaard-normale verdeling.

Eindige cosinus golf

We kijken naar een cosinus functie op het eindige interval $[-a, a]$, dus

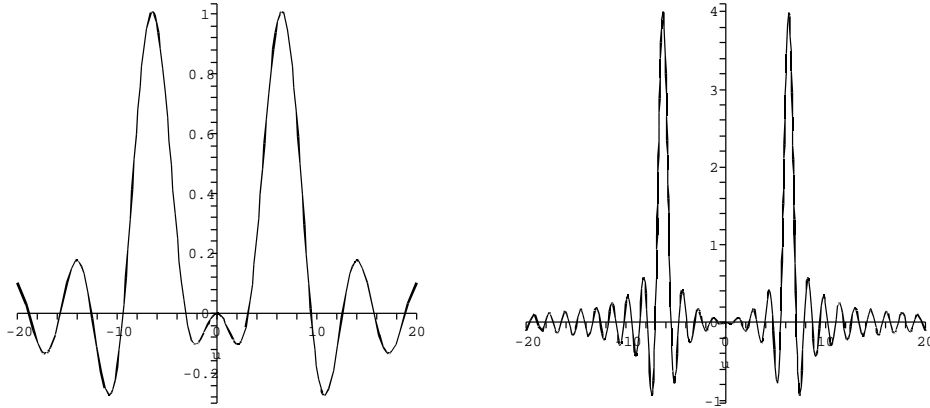
$$f(t) := \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

De Fourier getransformeerde is

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt = \int_{-a}^a \cos(\omega t)e^{-iut} dt = \int_{-a}^a \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})e^{-iut} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a e^{-i(u-\omega)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-a}^a e^{-i(u+\omega)t} dt \\ &= \frac{1}{-2i(u-\omega)} e^{-i(u-\omega)t} \Big|_{-a}^a + \frac{1}{-2i(u+\omega)} e^{-i(u+\omega)t} \Big|_{-a}^a \\ &= -\frac{1}{u-\omega} \cdot \frac{1}{2i} (e^{-i(u-\omega)a} - e^{i(u-\omega)a}) - \frac{1}{u+\omega} \cdot \frac{1}{2i} (e^{-i(u+\omega)a} - e^{i(u+\omega)a}) \\ &= \frac{\sin(a(u-\omega))}{u-\omega} + \frac{\sin(a(u+\omega))}{u+\omega} \end{aligned}$$

Als we dit resultaat met de Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls vergelijken, zien we dat de Fourier getransformeerde van een eindige cosinus golf de som van twee Fourier getransformeerden van rechthoek impulsen is, waarvan één om ω naar rechts en de andere om ω naar links verschoven is. Dit is in feite niet erg moeilijk om in te zien:

Net zo als een verschuiving om t_0 in het tijdsdomein met een vermenigvuldiging van de Fourier getransformeerde met e^{iut_0} in het frequentiedomein correspondeert, correspondeert een verschuiving van een Fourier getransformeerde om ω in het frequentiedomein met een vermenigvuldiging met $e^{i\omega t}$ in het tijdsdomein. Maar als we een rechthoek impuls met $e^{i\omega t}$ vermenigvuldigen, krijgen we de functie $e^{i\omega t}$ op een eindig interval, en door één keer om ω en één keer om $-\omega$ te verschuiven, krijgen we $e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2 \cos(\omega t)$ op een eindig interval, en dit is (tot op de factor 2 na) precies waarmee we zijn begonnen.



Figuur II.12: Fourier getransformeerden van eindige cosinus golven met frequentie $\omega = 2\pi$ op het interval $[-a, a]$ voor $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Exponentiële afname

Een exponentiële afname wordt door de functie

$$f(t) := \begin{cases} e^{-at} & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases} \quad \text{met } a > 0$$

beschreven. Hierbij is de afname om zo sneller hoe groter de parameter a is.

De Fourier getransformeerde van deze functie $f(t)$ berekenen we als volgt:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-iut} dt = \int_0^{\infty} e^{-(iu+a)t} dt \\ &= -\frac{1}{iu+a} e^{-(iu+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{iu+a} = \frac{a-iu}{u^2+a^2} = \frac{a}{u^2+a^2} - i\frac{u}{u^2+a^2} \end{aligned}$$

want voor $t \rightarrow \infty$ gaat $e^{-at} \rightarrow 0$ en dus ook $e^{-(iu+a)t} = e^{-iut}e^{-at} \rightarrow 0$.

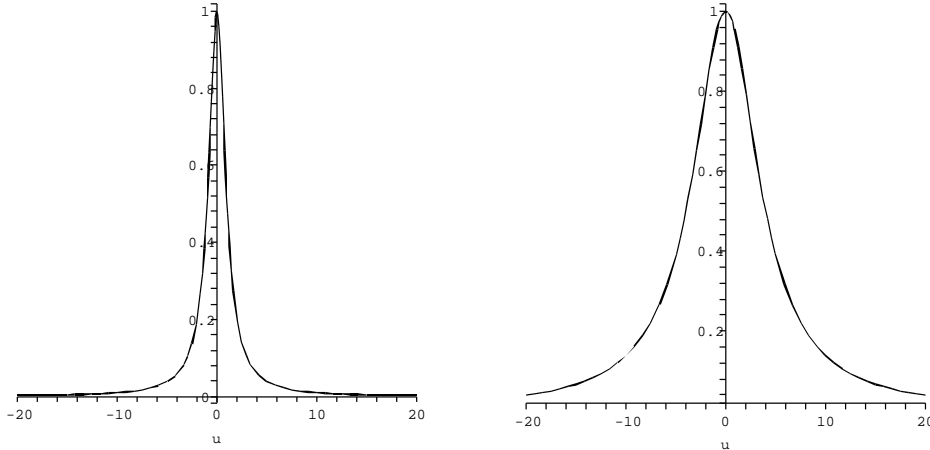
Om ook in dit geval verschillende parameters a goed te kunnen vergelijken, normeren we $\int_0^{\infty} f(t) dt$ weer op 1, hiervoor moeten we e^{-at} met a vermenigvuldigen, want $\int_0^{\infty} e^{-at} dt = \frac{-1}{a} e^{-at} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a}$. De functie

$$g(t) := \begin{cases} ae^{-at} & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases}$$

heeft de Fourier getransformeerde

$$G(u) := \mathcal{F}[g(t)] = \frac{a^2 - iau}{a^2 + u^2} \quad \text{met reëel deel } \Re(G(u)) = \frac{a^2}{a^2 + u^2}.$$

Ook hier is in de plaatjes van Figuur II.13 duidelijk te zien dat de snellere afname voor $a = 4$ een grotere bijdrage van hoge frequenties tot gevolg heeft.



Figuur II.13: Fourier getransformeerden van exponentiële afname met $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Omdat we het hier eigenlijk met een functie te maken hebben, die alleen maar voor positieve tijden gedefinieerd is, is dit een typisch geval om de Fourier cosinus transformatie

$$F_c(u) = \int_0^\infty f(t) \cos(ut) dt$$

toe te passen. Hiervoor hebben we weer een partiële integratie nodig:

$$\begin{aligned} \int e^{-at} \cos(ut) dt &= e^{-at} \frac{1}{u} \sin(ut) - \int (-a)e^{-at} \frac{1}{u} \sin(ut) dt \\ &= \frac{1}{u} e^{-at} \sin(ut) + \frac{a}{u} \int e^{-at} \sin(ut) dt \\ &= \frac{1}{u} e^{-at} \sin(ut) + \frac{a}{u} \left(e^{-at} \left(-\frac{1}{u}\right) \cos(ut) - \int (-a)e^{-at} \left(-\frac{1}{u}\right) \cos(ut) dt \right) \\ &= \frac{1}{u} e^{-at} \sin(ut) - \frac{a}{u^2} e^{-at} \cos(ut) - \frac{a^2}{u^2} \int e^{-at} \cos(ut) dt \end{aligned}$$

Met $1 + \frac{a^2}{u^2} = \frac{u^2 + a^2}{u^2}$ volgt hieruit

$$\begin{aligned} F_c(u) &= \int_0^\infty e^{-at} \cos(ut) dt = \frac{u^2}{a^2 + u^2} \left(\frac{1}{u} e^{-at} \sin(ut) - \frac{a}{u^2} e^{-at} \cos(ut) \right) \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{a^2 + u^2} (ue^{-at} \sin(ut) - ae^{-at} \cos(ut)) \Big|_0^\infty = \frac{a}{a^2 + u^2} \end{aligned}$$

want voor $t \rightarrow \infty$ gaat $ue^{-at} \sin(ut) - ae^{-at} \cos(ut) \rightarrow 0$.

De Fourier cosinus transformatie levert dus inderdaad het reële deel van de complexe Fourier transformatie op (maar eist wel behoorlijk meer rekenwerk).

9.2 De Dirac δ -functie

Een kunstmatige maar uiterst belangrijke en nuttige functie is de *Dirac δ -functie* of *δ -impuls*. Deze functie is overal 0, behalve van een oneindige spits in het nulpunt en is gedefinieerd door de eigenschap dat de integraal van $-\infty$ tot ∞ de waarde 1 heeft. We kunnen dit zien als limiet van een rechthoek impuls op het interval $[-a, a]$ van sterkte $\frac{1}{2a}$, waarbij men $a \rightarrow 0$ laat gaan. Deze functie wordt aangegeven met $\delta(x)$. De wezenlijke eigenschappen van de δ -impuls zijn:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

De tweede eigenschap gaat men na door de δ -functie door een rechthoek impuls van breedte $2a$ te benaderen en hiervan de limiet $a \rightarrow 0$ te bekijken: Een rechthoek impuls van breedte $2a$ rond een punt x_0 is gegeven door de functie

$$r_a(x) := \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{als } x \in [x_0 - a, x_0 + a] \\ 0 & \text{als } x \notin [x_0 - a, x_0 + a] \end{cases}$$

We veronderstellen nu dat we een primitieve van $f(x)$ kennen, dus een functie $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$. Er geldt nu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)r_a(x) dx = \int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)\frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a}F(x)|_{x_0-a}^{x_0+a} = \frac{F(x_0 + a) - F(x_0 - a)}{2a}$$

Maar de laatste quotiënt is juist de differentiaalquotiënt waardoor de afgeleide van $F(x)$ in het punt $x_0 - a$ gedefinieerd is, dus gaat deze quotiënt voor $a \rightarrow 0$ naar $F'(x_0 - a) = F'(x_0) = f(x_0)$.

Wat de eigenschap $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0)$ in feite betekent is dat het *convolutieproduct* van een functie $f(x)$ met de δ -functie $\delta(x)$ in het punt x_0 juist de waarde $f(x_0)$ oplevert: De δ -functie is een even functie, dus geldt $\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x)$ en dus is

$$f(x_0) * \delta(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x_0 - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Merk op: Het convolutieproduct van een functie $f(x)$ met de δ -functie $\delta(x)$ levert juist de waarde $f(x_0)$ op.

Uit de eigenschappen van de δ -functie volgt meteen wat de Fourier getransformeerde $\mathcal{F}[\delta(t)]$ is, namelijk:

$$F(u) = \mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-iut} dt = e^{-iu \cdot 0} = 1.$$

Dit zegt dat de Fourier getransformeerde de constante functie **1** met waarde 1 voor alle u is (deze functie noteren we met een vet gedrukte **1**).

De inverse Fourier transformatie geeft nu een alternatieve schrijfwijze voor de δ -functie, namelijk

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{1}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1} \cdot e^{iut} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} du.$$

Voor de δ -functie $\delta(t - t_0)$ met spits in t_0 vinden we met de formule voor een verschoven functie (of direct) dat

$$\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-iut_0}.$$

De samenhang $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]] = 2\pi f(-t)$ tussen Fourier transformatie en inverse Fourier transformatie geeft nu ook de mogelijkheid om de Fourier transformatie van constante functies te berekenen. We hadden gezien dat $\mathcal{F}[\delta(t)] = \mathbf{1}$, en als we de variabele t tot u hernoemen, volgt hieruit:

$$\mathcal{F}[\mathbf{1}] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta(u)]] = 2\pi \delta(-u) = 2\pi \delta(u)$$

omdat de δ -functie met spits in $u = 0$ een even functie is.

Als we in de relatie $\mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-iut_0}$ voor de verschoven δ -functie de variabelen hernoemen tot $t \rightarrow u$, $t_0 \rightarrow -\omega$, $u \rightarrow t$ luidt deze $\mathcal{F}[\delta(u + \omega)] = e^{i\omega t}$ en met hetzelfde argument als boven volgt:

$$\mathcal{F}[e^{i\omega t}] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta(u + \omega)]] = 2\pi \delta(-u + \omega) = 2\pi \delta(u - \omega),$$

waarbij we weer uit symmetrie redenen weten dat $\delta(-u + \omega) = \delta(u - \omega)$.

Samenvattend geeft dit de twee paren van relaties:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(t)] &= \mathbf{1} & \mathcal{F}[\delta(t - t_0)] &= e^{-iut_0} \\ \mathcal{F}[\mathbf{1}] &= 2\pi \delta(u) & \mathcal{F}[e^{i\omega t}] &= 2\pi \delta(u - \omega). \end{aligned}$$

Met de gewone theorie van integralen is het eigenlijk onzin naar een integraal als $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} du$ te kijken, want de limiet $L \rightarrow \infty$ van $\int_{-L}^L e^{iut} du$ bestaat niet. Om hier wel na te kunnen kijken, moeten we noodzakelijk een nieuwe functie met de eigenschappen van de δ -functie definiëren. Dit is een verder voorbeeld van een definitie die door de wiskundigen (en natuurkundigen) is verzonnen, om uit een doodlopende straat te ontsnappen.

We hadden gezegd dat we de δ -functie als limiet van een rechthoek impuls met oppervlakte 1 kunnen zien. Daarom zouden we kunnen verwachten, dat ook de net gevonden Fourier getransformeerde van de δ -functie interpreteerbaar is als limiet van de Fourier getransformeerden van de rechthoek impulsen.

De Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls van breedte $2a$ rond 0 was $F(u) = \frac{\sin(au)}{au}$. Deze functie heeft voor $u = 0$ de waarde 1 (want $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$) en de nulpunten zijn gegeven door $au = k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$, dus door $u = \frac{k\pi}{a}$. In het bijzonder ligt het kleinste positieve nulpunt bij $u = \frac{\pi}{a}$. Als we nu de limiet $a \rightarrow 0$ bekijken, betekent dit dat de eerste nulpunt naar oneindig gaat, dus de heuvel rond $u = 0$ wordt steeds breder en in de limiet wordt de heuvel helemaal plat en wordt de functie $F(u)$ de constante functie 1.

Omgekeerd laten we nu eens voor een rechthoek impuls van sterkte 1 en breedte $2a$ de parameter $a \rightarrow \infty$ lopen. Deze rechthoek impuls heeft de Fourier

getransformeerde $F(u) = 2 \frac{\sin(au)}{u} = 2a \frac{\sin(au)}{au}$ en voor $a \rightarrow \infty$ wordt de functie $\frac{\sin(au)}{au}$ en spits van hoogte 1 in het nulpunt, dus wordt $F(u)$ inderdaad een δ -functie. (Dat de constanten hierbij kloppen moet men met een integratie nagaan.)

We zien dus dat de definitie van de δ -functie als limiet van rechthoek impulsen ten opzichte van de Fourier transformatie de gewenste eigenschappen heeft.

Periodieke functies

Met behulp van de δ -functie kunnen we nu ook de Fourier transformaties van periodieke functies bepalen. Een periodieke functie $f(t)$ met periode L en grondfrequentie $\omega = \frac{2\pi}{L}$ kunnen we schrijven als Fourier reeks

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt}.$$

Uit de lineariteit van de Fourier transformatie en de resultaten voor de δ -functie volgt

$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}[e^{i\omega kt}] = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \delta(u - \omega k)$$

(waarbij we ons geen zorgen over de oneindige som maken). Dit betekent dat we een periodieke functie beschrijven door een som van δ -functies met spitsen op de veelvouden van de grondfrequentie en geschaald volgens de Fourier coëfficiënten. In feite is deze beschrijving van een periodieke functie niets anders dan de beschrijving door de Fourier reeks.

Als we nu nog eens terug kijken naar de Fourier transformaties van eindige cosinus golven in Figuur II.12, zien we dat de functie voor $a = 4$ al twee duidelijke spitsen heeft. Als we het interval $[-a, a]$ van de cosinus golf nu laten groeien, worden deze spitsen steeds geprononceerder en voor $a \rightarrow \infty$ krijgen we uiteindelijk de som van twee δ -functies met spitsen in ω en $-\omega$.

Sprongfunctie

Nu dat we de δ -functie kennen en de Fourier getransformeerde hiervan hebben bepaald, kunnen we ook naar functies met een sprong kijken. Het eenvoudigste voorbeeld hiervan is de *Heaviside functie* $H(t)$, gegeven door

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{als } t < 0 \\ 1 & \text{als } t \geq 0 \end{cases}$$

Omdat voor de Dirac δ -functie geldt dat $\int_{-\infty}^t \delta(x) dx = 0$ als $t < 0$ en $\int_{-\infty}^t \delta(x) dx = 1$ als $t > 0$, is $H(t)$ een primitieve van de δ -functie. Omgekeerd betekent dit dat $H'(t) = \delta(t)$. Dit is een verdere motivatie om een functie zo als de δ -functie te definiëren.

We hadden in de vorige les gezien dat $\mathcal{F}[f'(t)] = iu\mathcal{F}[f(t)]$, maar hierbij hadden we verondersteld dat $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ voor $t \rightarrow \pm\infty$ en dit is voor de Heaviside functie $H(t)$ zeker niet het geval. Als we de formule niettemin op $H(t)$ toepassen, krijgen we $\mathcal{F}[H(t)] = \frac{1}{iu}\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{iu}$. Maar we zien hier ook waar het probleem zit: Als we op de Heaviside functie een constante C optellen, is de afgeleide nog steeds $(H(t) + C)' = \delta(t)$, maar nu is $\mathcal{F}[H(t) + C] = \mathcal{F}[H(t)] + \mathcal{F}[C] = \mathcal{F}[H(t)] + C\delta(u)$. Het optellen van een constante leidt dus tot een verschil om een veelvoud van de δ -functie bij de Fourier getransformeerde.

Uit deze discussie volgt dat we hooguit kunnen verwachten dat $\mathcal{F}[H(t)]$ van de vorm $\mathcal{F}[H(t)] = \frac{1}{iu} + c\delta(u)$ is.

Dat dit inderdaad het geval is, kunnen we op een andere manier onderbouwen: We hebben eerder in deze les aangetoond dat de functie

$$f(t) := \begin{cases} e^{-at} & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases} \quad \text{met } a > 0$$

de Fourier getransformeerde $\mathcal{F}[f(t)] = \frac{a}{u^2 + a^2} - i\frac{u}{u^2 + a^2}$ heeft. Maar in de limiet $a \rightarrow 0$ geeft $f(t)$ juist de Heaviside functie weer, want hoe kleiner a is, hoe langzamer neemt de functie af, en in de limiet $a \rightarrow 0$ neemt de functie helemaal niet meer af.

Als we nu voor $u \neq 0$ de limiet $a \rightarrow 0$ van $\mathcal{F}[f(t)]$ bepalen, krijgen we $\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}[f(t)] = \frac{0}{u^2} - i\frac{u}{u^2} = \frac{1}{iu}$ en dit klopt inderdaad met onze gok dat $\mathcal{F}[H(t)] = \frac{1}{iu} + c\delta(u)$.

We moeten dus alleen maar nog de waarde van $\mathcal{F}[H(t)]$ voor $u = 0$ bepalen. Dit doen we als volgt: Er geldt $H(t) + H(-t) = \mathbf{1}$ (behalve voor $t = 0$). Hieruit volgt dat

$$\mathcal{F}[H(t)] + \mathcal{F}[H(-t)] = \mathcal{F}[\mathbf{1}] = 2\pi\delta(u).$$

Maar voor $F(u) = \mathcal{F}[H(t)]$ geldt dat $\mathcal{F}[H(-t)] = F(-u)$, dus hebben we $F(u) + F(-u) = 2\pi\delta(u)$ en dus $F(0) = \pi\delta(u)$.

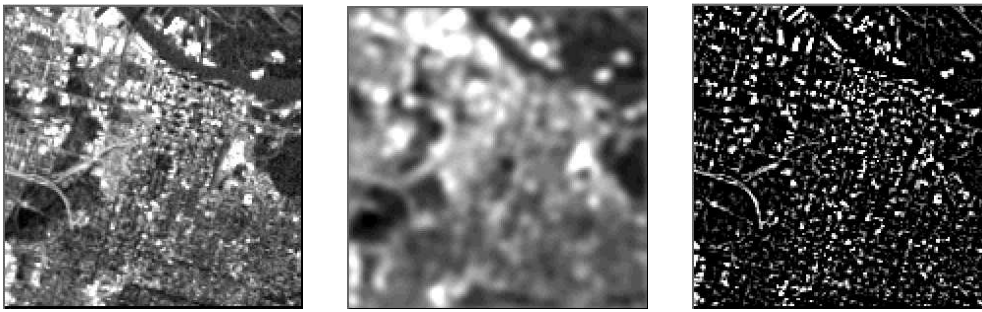
Bij elkaar genomen hebben we dus voor de sprong functie $H(t)$ aangetoond dat

$$\mathcal{F}[H(t)] = \pi\delta(u) + \frac{1}{iu}.$$

9.3 Toepassing: Filters

Het idee bij een filter is dat we zekere frequentieaandelen in een signaal willen versterken en andere onderdrukken. Dit gebeurt typisch door de Fourier getransformeerde met een geschikte functie te vermenigvuldigen en het resultaat met de inverse Fourier transformatie terug naar het tijdsdomein te transformeren:

Principe van een filter: Een functie $f(t)$ met $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$ wordt in het frequentiedomein met behulp van de filter functie $H(u)$ tot de nieuwe functie $G(u) = F(u) \cdot H(u)$ veranderd. Hieruit wordt met behulp van de inverse Fourier transformatie het *gefilterde signaal* $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(u)] = f(t) * h(t)$ verkregen, waarbij $h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(u)]$ de inverse Fourier getransformeerde van $H(u)$ is.



Figuur II.14: Origineel, low-pass en high-pass gefilterd versie van een satelliet foto.

In Figuur II.14 is een voorbeeld van de toepassing van een low-pass en een high-pass filter op een satelliet opname te zien. Bij een low-pass filter worden de lage frequenties doorgelaten en de hoge onderdrukt en bij een high-pass filter is het omgekeerd, de lage frequenties worden onderdrukt en de hoge doorgelaten. Het effect is, dat met een low-pass filter het grove patroon van een signaal hetzelfde blijft, maar de scherpe contrasten tot een meer geleidelijke overgang verzacht worden. Omgekeerd benadrukt een high-pass filter alleen maar de scherpe contrasten, terwijl bijvoorbeeld de informatie over de intensiteit van het signaal verloren gaat. Zo is in het rechterplaatje niet meer te achterhalen of een gebied in het origineel licht of donker grijs is, maar wel heel duidelijk waar de grijstonen sterk veranderen.

Belangrijke typen en voorbeelden van filters zijn:

- (1) Low pass filter: De lage frequenties corresponderen met de grove kenmerken over grotere gebieden. Een filter die deze frequenties benadrukt en hogere frequenties onderdrukt heet een *low-pass filter*. In de beeldverwerking zal zo'n filter een zachter beeld tot gevolg hebben, waarbij de scherpe contrasten afgezwakt zijn.
- (2) High pass filter: De hoge frequenties corresponderen met snelle veranderingen. Een filter die lage frequenties onderdrukt en hoge frequenties benadrukt heet *high-pass filter*. Bij de beeldverwerking worden hierdoor scherpe contrasten, zo als knikken benadrukt en hierdoor kan een beeld scherper lijken.
- (3) Gauss filter: We hebben gezien dat een Gauss functie de mooie eigenschap heeft dat ook zijn Fourier getransformeerde weer een Gauss functie is. Dit maakt het omschakelen tussen tijd en frequentiedomein bijzonder eenvoudig.

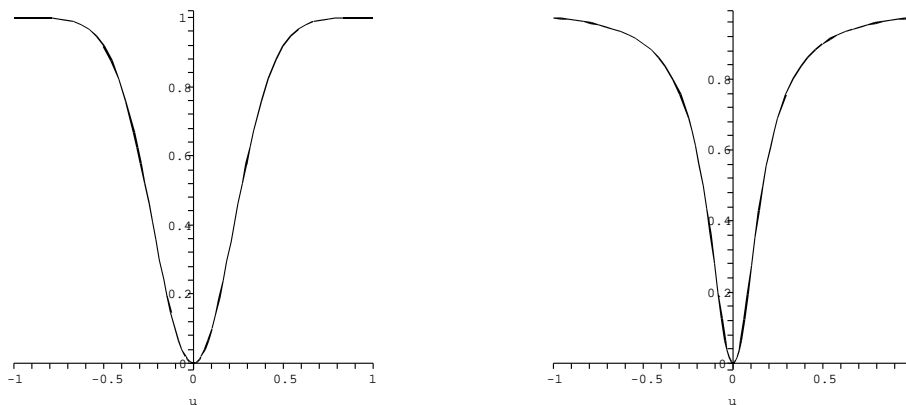
Met $H(u) = A \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$ krijgt men een low-pass filter waarbij de parameter σ (de standaardafwijking) aangeeft, hoe breed de filter is, d.w.z. voor een grotere σ worden meer frequenties doorgelaten, terwijl een kleine σ bijna alle frequenties wegdraait.



Figuur II.15: Origineel, low-pass en high-pass gefilterd versie van een eenvoudig plaatje.

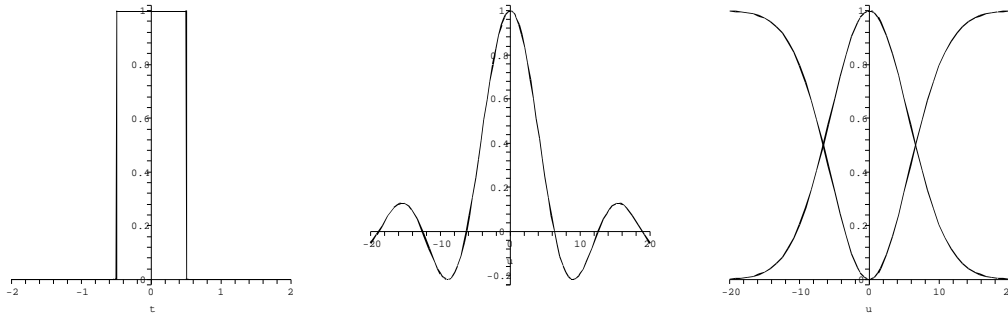
Een Gauss high-pass filter krijgt men in het eenvoudigste geval als verschil van een constante functie en een Gauss low-pass filter, namelijk als $H(u) = A(1 - e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}})$. Algemeener neemt men vaak het verschil van twee Gauss functies met parameters σ en ρ : $H(u) = A \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} - B \cdot e^{-\frac{u^2}{2\rho^2}}$.

- (4) Notch filter: In het punt $u = 0$ geeft de Fourier getransformeerde het gemiddelde $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ van de functie $f(t)$ aan. Door dit op 0 te zetten, wordt bijvoorbeeld de helderheid van plaatjes genormeerd. De hiervoor benodigde filter heeft in het frequentiedomein de functie $H(0) = 0$ en $H(u) = 1$ voor $u \neq 0$, maar deze functie is natuurlijk niet continu. Om wel met een continue functie te kunnen werken moeten we rond $u = 0$ een scherpe dip hebben. In principe kunnen we hiervoor een high-pass filter nemen, die alleen maar de frequenties heel dicht bij $u = 0$ onderdrukt. Een mogelijkheid hiervoor is een Gauss high-pass filter $H(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$ met een kleine waarde van σ . Maar ook een functie zo als $H(u) = \frac{(au)^2}{1+(au)^2}$ met een grote waarde van a is geschikt.



Figuur II.16: Notch filters: links Gauss high-pass filter, rechts high-pass filter met functie $\frac{(au)^2}{1+(au)^2}$.

Voorbeeld: Rechthoek impuls



Figuur II.17: Rechthoek impuls, Fourier getransformeerde en Gauss low-pass en high-pass filters

We kijken naar een rechthoek impuls $f(t)$ van breedte 1 en sterkte 1. Voor deze functie hebben we in het begin van deze les al de Fourier getransformeerde bepaald, namelijk

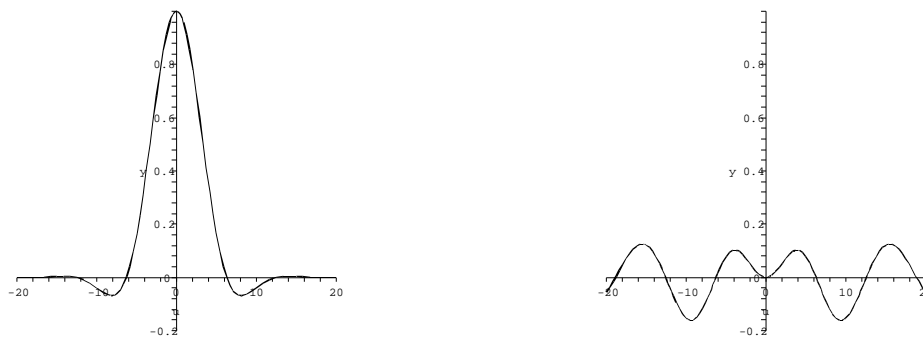
$$F(u) = \frac{\sin(\frac{1}{2}u)}{\frac{1}{2}u}.$$

De kleinste positieve nulpunt van $F(u)$ is 2π , zo als ook in het middelste plaatje van Figuur II.17 te zien is.

We gaan nu een Gauss low-pass en high-pass filter op dit signaal toepassen en kiezen hiervoor (enigszins willekeurig) de filter functie

$$H_l(u) = e^{-\frac{u^2}{20\pi}}.$$

De breedte van de Gauss functie $H_l(u)$ is zo gekozen, dat bij het minimum van $F(u)$ op $u = 3\pi$ de filter functie ongeveer bij 0.5 zit.



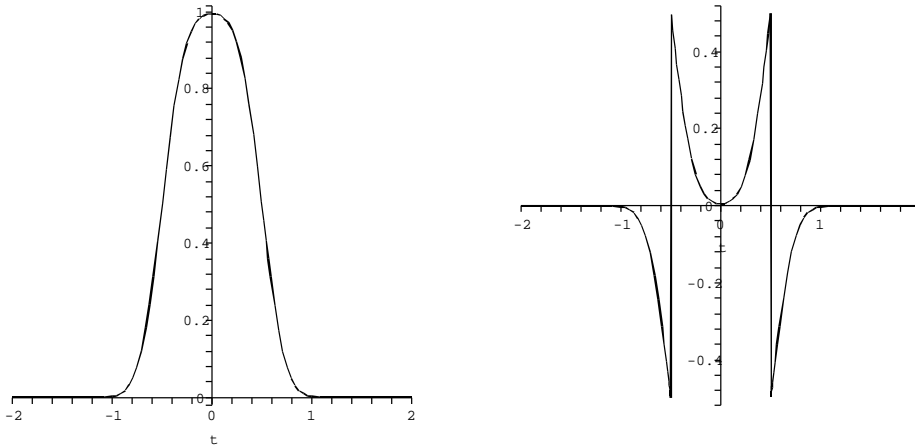
Figuur II.18: Product van Fourier getransformeerde met Gauss low-pass en high-pass filters

Als high-pass filter kiezen we

$$H_h(u) = 1 - H_l(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{20\pi}}.$$

De twee filter functies zijn in het rechterplaatje van Figuur II.17 te zien.

Zo als gezegd is het idee bij een filter dat we zekere frequenties onderdrukken en andere gewoon doorlaten, hiervoor vermenigvuldigen we de Fourier getransformeerde van het signaal met de filter functie. Voor de low-pass filter krijgen we zo de functie $G_l(u) = F(u) \cdot H_l(u)$ en voor de high-pass filter $G_h(u) = F(u) \cdot H_h(u)$. De functies $G_l(u)$ en $G_h(u)$ zijn in Figuur II.18 te zien en het is duidelijk hoe de low-pass filter de heuvels in de Fourier getransformeerde $F(u)$ onderdrukt, behalve van de hoofdspits in $u = 0$. Omgekeerd verdwijnt bij de high-pass filter deze hoofdspits helemaal, terwijl de andere maxima en minima voor hogere frequenties duidelijk zichtbaar blijven.



Figuur II.19: Inverse Fourier transformatie van het product met de filter functies geeft de gefilterde signalen

Het gefilterde signaal krijgen we nu door de inverse Fourier transformatie op het product van de Fourier getransformeerde en de filter functie in het frequentiedomein toe te passen, het low-pass gefilterde signaal is dus

$$f_l(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_l(u)]$$

en het high-pass gefilterde signaal is

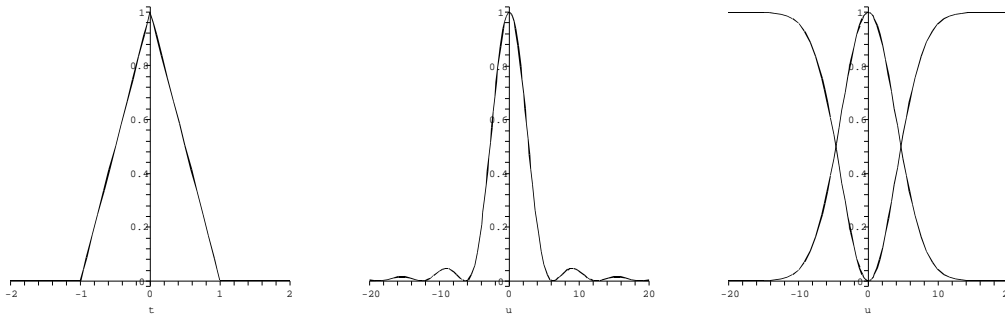
$$f_h(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_h(u)].$$

Deze signalen zijn in Figuur II.19 te zien. Het is duidelijk dat de low-pass filter het signaal grofweg bewaart, maar de scherpe knikken tot ronde bochten verzacht. In tegenstelling hiermee geeft het high-pass gefilterde signaal aan, waar het signaal sterk verandert, namelijk in de punten $t = \pm 0.5$ van de knikken. In het punt $t = 0$ waar het signaal de grootste intensiteit heeft, geeft de high-pass filter zelf de waarde 0, want hier verandert het signaal niet. Dit is in

overeenstemming met de waarnemingen bij Figuur II.14: Als de grijs-intensiteit op een gebied nauwelijks veranderd, geeft de high-pass filter steeds eenzelfde grijs-kleuring, onafhankelijk of het origineel in dit gebied licht of donker grijs is.

Het feit dat in dit voorbeeld $H_l(u) + H_h(u) = 1$ heeft tot gevolg dat $F(u) = F(u) \cdot H_l(u) + F(u) \cdot H_h(u)$ en hieruit volgt dat $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_l(u)] + \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_h(u)]$. Dit betekent dat in dit voorbeeld het originele signaal de som van het low-pass gefilterde signaal en het high-pass gefilterde signaal is.

Voorbeeld: Driehoek impuls



Figuur II.20: Driehoek impuls, Fourier getransformeerde en Gauss low-pass en high-pass filters

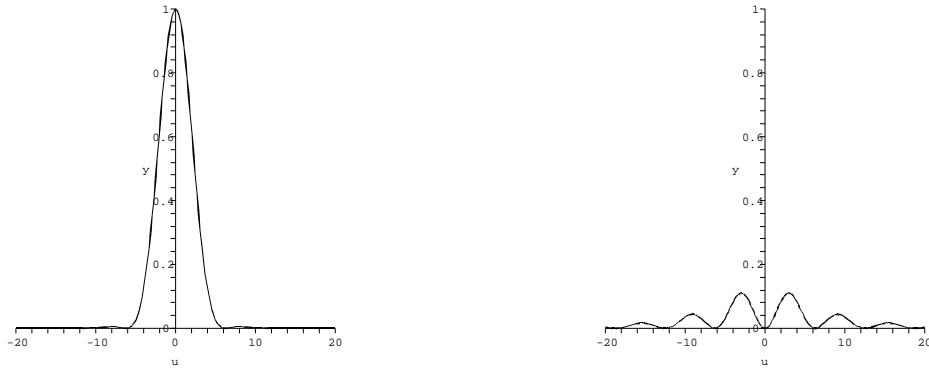
We kijken op een soortgelijke manier naar het voorbeeld van een driehoek impuls $f(t)$ tussen -1 en 1 die in $t = 0$ de sterkte 1 heeft. Zo als eerder in deze les gevonden, heeft $f(t)$ de Fourier getransformeerde

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(u) = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}u)}{\frac{1}{2}u} \right)^2 .$$

In dit geval passen we een scherpere low-pass filter toe, die al op de frequentie $u = 2\pi$ waar $F(u)$ het kleinste positieve nulpunt heeft een waarde van ongeveer 0.5 heeft. De high-pass filter definiëren we weer als verschil $H_h(u) := 1 - H_l(u)$:

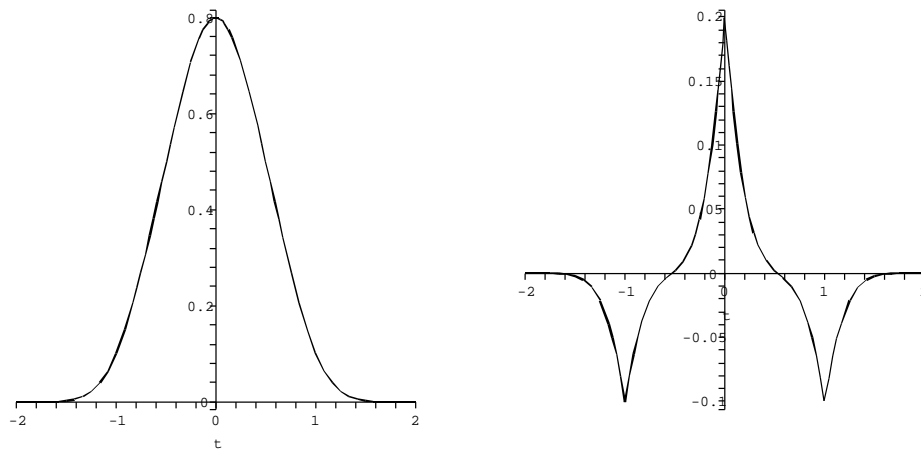
$$H_l(u) = e^{-\frac{u^2}{10\pi}}, \quad H_h(u) = 1 - H_l(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{10\pi}} .$$

Als we in dit geval naar de producten van de Fourier getransformeerde $F(u)$ met de filter functies kijken, zien we duidelijk dat de low-pass filter alleen maar de hoofdspits doorlaat en de rest van de Fourier getransformeerde onderdrukt. Interessant is hier het product met de high-pass filter. De functie $F(u)$ heeft het eerste positieve maximum bij $u = 3\pi$, maar in het rechterplaatje van Figuur II.21 is duidelijk te zien dat het product $F(u) \cdot H_h(u)$ in $u = \pi$ al een maximum heeft. Met het blote oog is dit verschil tussen de hoofdspitsen van $F(u)$ en $F(u) \cdot H_l(u)$ nauwelijks te zien omdat de absolute hoogte van de spits overweegt.



Figuur II.21: Product van Fourier getransformeerde met Gauss low-pass en high-pass filters

Maar de inverse Fourier transformatie van de producten in het frequentiedomein maakt duidelijk dat de subtiele verschillen een belangrijke effect op het signaal hebben.



Figuur II.22: Inverse Fourier transformatie van het product met de filter functies geeft de gefilterde signalen

Bij de gefilterde signalen in Figuur II.22 zien we in het linkerplaatje dat de low-pass filter de vorm van de driehoek impuls ongeveer bewaart, maar wel de knikken behoorlijk verzacht. Dit is het gevolg van onze keuze van een relatief scherpe low-pass filter. Het high-pass gefilterde signaal in het rechterplaatje laat duidelijk de drie knikken van de driehoek impuls bij $t = -1$, $t = 0$ en $t = 1$ zien.

BELANGRIJKE BEGRIPPEN IN DEZE LES

- Fourier getransformeerde van rechthoek impuls

- Fourier getransformeerde van Gauss functies zijn Gauss functies
- Dirac δ -functie
- low-pass en high-pass filters

OPGAVEN

73. Zij $f(t)$ de functie gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} 1 - t^2 & \text{als } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{als } |t| > 1. \end{cases}$$

- Maak een schets van de functie.
- Bepaal de Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ van $f(t)$.
- Maak een schets van de Fourier getransformeerde $F(u)$.

74. Bepaal de Fourier getransformeerde van de functie

$$f(t) := e^{-a|t|} \quad \text{met } a > 0.$$

75. Bepaal de Fourier getransformeerden van

- $f(t) := \cos(\omega t)$;
- $f(t) := \sin(\omega t)$.

76. Bepaal de Fourier getransformeerden van

- $f(t) := e^{iat^2}$;
- $f(t) := \cos(at^2)$;
- $f(t) := \sin(at^2)$.

(Hint: Zonder afleiding mag je de oneindige integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ en $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ gebruiken.)

77. Laat zien dat voor de *signum functie*, gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} -1 & \text{als } t < 0 \\ 1 & \text{als } t > 0 \end{cases}$$

geldt, dat $\mathcal{F}[f(t)] = \frac{2}{iu}$.