Deeltoets 1 (BKI 316)

Het tentamen is *open dictaat*, d.w.z. je mag het dictaat van de cursus (inclusieve je aantekeningen erin) tijdens het tentamen gebruiken.

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. De opgaven tellen even zwaar. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Opgave 1.
Zij $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$f(x,y) := \frac{x^3 - 3x}{1+y^2}.$$

(i) Bepaal de gradiënt van $f(x,y)$ in het punt $(x,y) = (1,2)$.

(ii) Bepaal de Hesse matrix $H(x_0,y_0)$ van $f(x,y)$ in een algemeen punt (x_0,y_0).

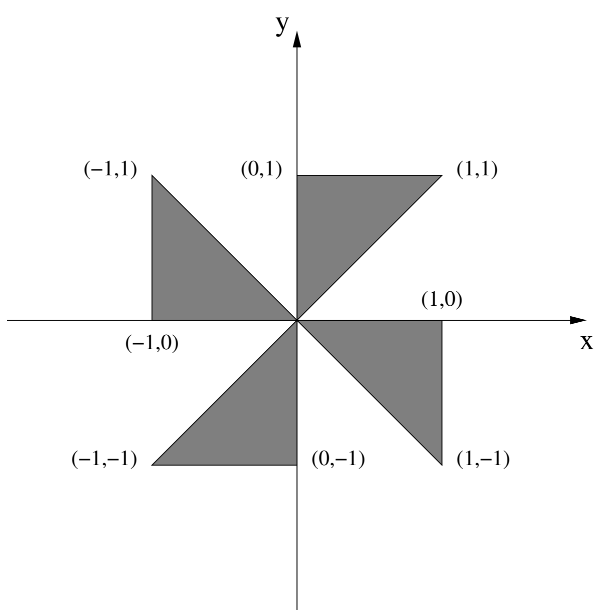
(iii) Geef de Taylor veelterm van graad 2 van $f(x,y)$ in het punt $(x,y) = (0,0)$ aan.

(iv) Geef de definitie van de kritieke punten van $f(x,y)$ aan. Bepaal de kritieke punten van $f(x,y)$.

(v) Laat zien welke van de kritieke punten van $f(x,y)$ een (lokaal) maximum en welke een (lokaal) minimum van de functie zijn.

Opgave 2.
Zij $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de functie gegeven door $f(x,y) := x^4 + y^2$.

(i) Bepaal de integraal $\int_R f(x,y)\ dA$ op het gebied R in de vorm van een windroos dat in het plaatje hieronder grijs getekend is.



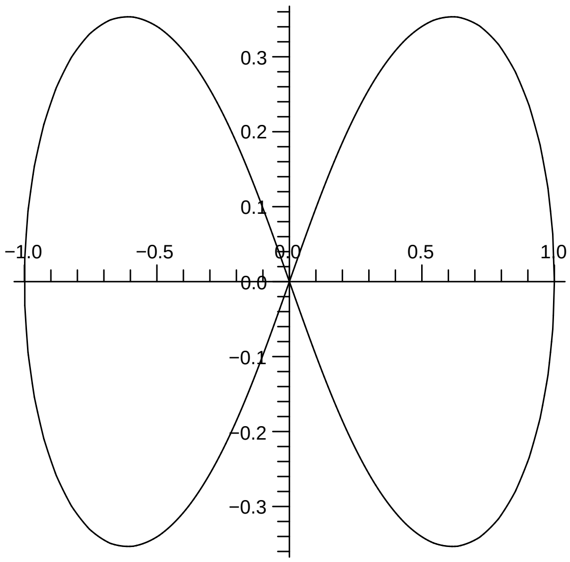
(ii) Bepaal ook de integraal $\int_V f(x,y)\ dA$ over de vierkant V met $x \in [-1,1]$ en $y \in [-1,1]$.

z.o.z.

Opgave 3.
De kromme in het 2-dimensionale vlak die voldoet aan de vergelijking $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ heet *lemniscaat*. In poolcoördinaten (r,φ) voldoet de lemniscaat aan de makkelijkere vergelijking

$$r^2 = a^2\cos(2\varphi).$$

De schets hieronder geeft de lemniscaat voor $a=1$ weer.



(i) Laat zien dat de transformatie van de vergelijking $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ op poolcoördinaten inderdaad oplevert dat $r^2 = a^2\cos(2\varphi)$.

(ii) Bepaal de oppervlakte die door de lemniscaat met vergelijking $r^2 = a^2\cos(2\varphi)$ ingesloten is.

Opgave 4.
We bekijken de volgende drie complexe functies $f(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\text{(a) } f(z) := z^3 + i; \qquad \text{(b) } f(z) := \sin(z^2); \qquad \text{(c) } f(z) := \frac{z^2}{1-z}.$$

(i) Schrijf voor $z = x+iy$ met $x = \Re(z) \in \mathbb{R}$ en $y = \Im(z) \in \mathbb{R}$ de drie functies $f(z)$ in de vorm $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, waarbij $u(x,y)$ en $v(x,y)$ ***reële*** functies zijn.

(ii) Laat zien dat de twee functies (a) en (b) voor ieder punt (x,y) in het complexe vlak voldoen aan de vergelijkingen

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}.$$

Succes ermee!