Deeltoets 1 (BKI 316)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. De opgaven tellen even zwaar. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Opgave 1.

(i) Schrijf de volgende complexe getallen in de vorm $z = x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(a)\;\; 3(-1+4i) - 2(7-i), \qquad (b)\;\; \frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}.$$

(ii) Zij $z_1 = 1 - i$ en $z_2 = -2 + 4i$. Bereken

$$(a)\;\; \Re(z_1\overline{z_2}), \qquad (b)\;\; \Im(z_1\overline{z_2}), \qquad (c)\;\; |z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2|.$$

(iii) Schrijf de volgende complexe getallen in poolcoördinaten $re^{i\varphi}$ met $r > 0$ en $\varphi \in [0, 2\pi]$:

$$(a)\;\; 3i, \qquad (b)\;\; -\pi, \qquad (c)\;\; 2-2i, \qquad (d)\;\; -1 + i\cdot\sqrt{3}.$$

(iv) Schrijf $\pi e^{-i\frac{\pi}{4}}$ in de vorm $x + iy$ met $x, y \in \mathbb{R}$.

Opgave 2.

(i) Laat zien dat voor een getal $z \in \mathbb{C}$ met poolcoördinaten $z = re^{i\varphi}$ geldt dat $|e^{iz}| = e^{-r\sin(\varphi)}$.

(ii) Vind reële getallen a en b zo dat $\cos(3\varphi) = a\cdot\cos(\varphi) + b\cdot\cos^3(\varphi)$.
(Hint: Regel van de Moivre.)

(iii) Zij $z \in \mathbb{C}$. Schrijf $\cos(z)\cdot\sin(z)$ alleen maar met behulp van de complexe exponentiële functie, d.w.z. als combinatie van termen van de vorm e^{az} met geschikte $a \in \mathbb{C}$.

Opgave 3.
De functie $f(t)$ gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} -1 & \text{als} \quad t \in [-\pi, 0] \\ 3 & \text{als} \quad t \in [0, \pi] \end{cases}$$

wordt door verschuiving van het interval $[-\pi, \pi]$ om veelvouden van 2π voortgezet tot een periodieke functie met periode 2π.

(i) Maak een schets van $f(t)$ en geef aan of de functie even, oneven, allebei of geen van de twee is.

(ii) Bereken de reële vorm van de Fourier reeks van $f(t)$.

(iii) Hoe verandert de Fourier reeks, als de functie langs de (verticale) $f(t)$-as verschoven wordt? Wat is de Fourier reeks van $g(t) := f(t) - 1$?

Opgave 4.

Een impuls functie $f(t)$ is gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} 2 & \text{als} \quad t \in [-5,5] \\ 0 & \text{als} \quad t \notin [-5,5]. \end{cases}$$

(i) Maak een schets van $f(t)$ en geef aan of de functie even, oneven, allebei of geen van de twee is.

(ii) Bereken de Fourier getransformeerde $F(u)$ van $f(t)$.

(iii) Hoe verandert de Fourier getransformeerde, als de impuls even lang blijft, maar twee keer zo sterk wordt, dus $f(t) = 4$ tussen $t = -5$ en $t = 5$?

(iv) Hoe verandert de Fourier getransformeerde, als de impuls even sterk blijft, maar twee keer zo lang duurt, namelijk van $t = -10$ tot $t = 10$?

Fourier reeks:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \quad \text{met} \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt, \\ c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt}\, dt. \end{aligned}$$

Fourier transformatie:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iut}\, du \quad \text{met} \quad F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, dt.$$

Succes ermee!