

Deeltoets 2 (BKI 316)

Het tentamen is *open dictaat*, d.w.z. je mag het dictaat van de cursus (inclusieve je aantekeningen erin) tijdens het tentamen gebruiken.

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. De opgaven tellen even zwaar. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Opgave 1.

De functie $f(t)$ gegeven door

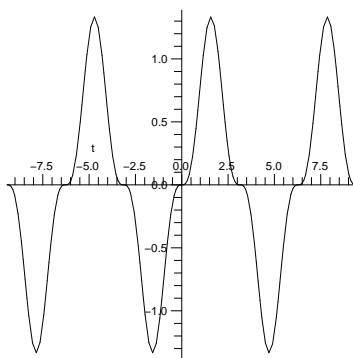
$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{als } -\pi < t \leq 0 \\ t & \text{als } 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

wordt door verschuiving van het interval $[-\pi, \pi]$ om veelvoud van 2π voortgezet tot een periodieke functie met periode 2π .

- (i) Maak een schets van $f(t)$ en geef aan of de functie even, oneven of geen van de twee is.
- (ii) Bereken de reële vorm van de Fourier reeks van $f(t)$.
- (iii) In $t = 0$ heeft de functie $f(t)$ een sprong van 1 naar 0. Aan de andere kant is de Fourier reeks van $f(t)$ wel een continue functie. Wat is de waarde van de Fourier reeks in $t = 0$?
- (iv) Omdat we met transparanties werken, hebben we per ongeluk de gespiegelde functie bekeken, eigenlijk zijn we geïnteresseerd in de functie $g(t) := f(-t)$ (dus de gespiegelde in de y -as).
Hoe kunnen we uit de Fourier coëfficiënten van $f(t)$ makkelijk de Fourier coëfficiënten van $g(t)$ bepalen en wat zijn deze?

Opgave 2.

Zij $f(t)$ de periodieke functie $f(t) := \sin(t) - \frac{1}{3} \sin(3t)$ die hieronder geschetst is.



- (i) Bepaal de Fourier getransformeerde $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ van $f(t)$. (Hint: Denk aan de δ -functie.)
- (ii) De functie $H(u) := \begin{cases} 1 & \text{als } |u| \in [a, b] \\ 0 & \text{als } |u| \notin [a, b] \end{cases}$ in het frequentiedomein heet een ideale *band-filter* voor het frequentie-interval $[a, b]$.
Bepaal voor het interval $[a, b] = [2, 4]$ de inverse Fourier getransformeerde $\mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H(u)]$ van het product van $F(u)$ met de filter functie $H(u)$.
- (iii) Leg uit waarom voor een functie $H(u)$ zo als in (ii) de naam *band-filter* terecht gekozen is.

Opgave 3.

De uitkomst van het dobbelen met een eerlijke dobbelsteen wordt door de stochast X beschreven. Als X de waarde 1, 2, 3 of 4 heeft, wordt vervolgens een eerlijke munt één keer geworpen, bij de uitkomsten 5 en 6 wordt de munt twee keer geworpen. De stochast Y geeft aan hoe vaak bij het (een of twee keer) werpen van de munt kop valt.

- (i) Bepaal de entropieën $H(X)$ en $H(Y)$ van de stochasten X en Y .
- (ii) Bepaal de entropie $H(X, Y)$ van de combinatie van X en Y en vergelijk dit met de som van de entropieën van X en Y .
Zijn de stochasten X en Y onafhankelijk?
- (iv) Hoeveel informatie over de stochast X onthult de kennis van de stochast Y ?

Opgave 4.

Een haai in het aquarium is een beetje weemoedig, omdat hij net zo als vroeger graag zou willen weten of het buiten regent of niet. Wat hij echter alleen maar kan zien is of zijn verzorgster met of zonder paraplu binnen komt.

Omdat hij verstand van de menselijke natuur heeft, weet hij dat een mens bij regen met een kans van 90% een paraplu meeneemt, maar slechts met kans 50% als het niet regent. Verder weet hij ook dat op een regendag met een kans van 70% een verdere regendag volgt, terwijl op een dag zonder regen slechts met 30% kans een regendag volgt. Hieruit concludeert hij (en wij) vlijmscherp dat er gemiddeld even veel dagen met en zonder regen zijn.

Omdat de haai vanuit een land is geïmporteerd waar iedereen iets van Hidden Markov modellen af weet, beschrijft hij het weer door een HMM.

- (i) Welke parameters zijn nodig om een HMM te specificeren?
- (ii) Geef de parameters voor het HMM aan dat de haai voor het weer heeft gemaakt.
- (iii) Het patroon dat de haai de laatste vier dagen heeft gezien, was

[paraplu, paraplu, geen paraplu, paraplu].

Wat is volgens zijn HMM de meest plausibele hypothese over het weer van de laatste vier dagen?

- (iv) De haai heeft al een tijd twijfels of de kans van 90% voor een paraplu op regendagen niet iets te hoog gegrepen is. Wat is in zijn model de kans op de waarneming [paraplu, paraplu, geen paraplu, paraplu] en hoe verandert deze kans als hij de parameter van 90% op 80% verlaagt?

Succes ermee!