Deeltoets 2 (BKI 316)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. De opgaven tellen even zwaar. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Opgave 1.

(i) Zij $f(x,y) := xy$. Bereken de integraal $\int_R f(x,y)\ dA$ voor de rechthoek R met $x \in [0,1]$ en $y \in [1,2]$.

(ii) Zij $f(x,y) := xy$ en zij $a < b$ en $c < d$. Bereken de integraal $\int_R f(x,y)\ dA$ voor de rechthoek R met $x \in [a,b]$ en $y \in [c,d]$.

(iii) Zij $g(x,y) := e^{x-y}$. Bereken de integralen $\int_{D_1} g(x,y)\ dA$ en $\int_{D_2} g(x,y)\ dA$ voor de driehoeken D_1 met hoekpunten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ en D_2 met hoekpunten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

Opgave 2.

We hebben twee dobbelstenen, een oneerlijke en een eerlijke. De stochast X_1 geeft het aantal ogen bij het dobbelen met de oneerlijke dobbelsteen, waarbij $p(6) = \frac{1}{3}$ en $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5)$. De stochast X_2 geeft het aantal ogen bij het dobbelen met de eerlijke dobbelsteen.

(i) Bereken de entropieën van de stochasten X_1 en X_2.

(ii) Bepaal het aantal mogelijke uitkomsten van een *uniforme* kansverdeling die dezelfde entropie heeft als de stochast X_1.

(iii) We kiezen met kans $\frac{1}{2}$ één van de twee dobbelstenen en dobbelen dan hiermee. Het aantal ogen dat we bij deze manier van dobbelen bereiken, wordt door de stochast X aangegeven. Bepaal de kansverdeling voor de stochast X en de entropie hiervan.

(iv) De stochast Y heeft de waarde 1 of 2, afhankelijk ervan of we met de eerste of met de tweede dobbelsteen dobbelen. Wat is de voorwaardelijke entropie $H(X \mid Y)$? Hoeveel informatie over de stochast X onthuld kennis van de stochast Y?

Opgave 3.
We vatten de letters in het Nederlands in drie klassen samen: klinkers (K), medeklinkers (M) en de spatie (S). De relatieve frequenties van deze drie klassen zijn:

$$p(\mathtt{K}) = 36\%, \quad p(\mathtt{M}) = 49\%, \quad p(\mathtt{S}) = 15\%.$$

Voor de overgangen tussen de verschillende klassen telt men de volgende relatieve frequenties:

$$\begin{array}{llll}
\text{vanuit K:} & \mathtt{K} \to \mathtt{K} : 17\%, & \mathtt{K} \to \mathtt{M} : 70\%, & \mathtt{K} \to \mathtt{S} : 13\% \\
\text{vanuit M:} & \mathtt{M} \to \mathtt{K} : 52\%, & \mathtt{M} \to \mathtt{M} : 27\%, & \mathtt{M} \to \mathtt{S} : 21\% \\
\text{vanuit S:} & \mathtt{S} \to \mathtt{K} : 25\%, & \mathtt{S} \to \mathtt{M} : 75\%, & \mathtt{S} \to \mathtt{S} : 0\%
\end{array}$$

(i) Beschrijf de overgangen tussen de states door een overgangsmatrix en door de graaf van een stochastische automaat.

(ii) Welke rol spelen de relatieve frequenties van de klassen bij het berekenen van de kans voor een gegeven rij van klassen, bijvoorbeeld KKMS ?

(iii) Bepaal de kans dat ergens in een tekst drie klinkers achter elkaar staan. Bepaal ook de kans dat er drie medeklinkers achter elkaar staan.

(iv) Een *woord* is een keten van klinkers en medeklinkers, ingeschakeld tussen twee spaties. Wat is de kans op een woord van precies twee letters?

Opgave 4.
Een Hidden Markov model heeft als states drie munten S_1, S_2, S_3 en als uitkomsten natuurlijk kop (K) en munt (M). Bij S_1 is de kans op kop 50%, bij S_2 is de kans op kop 60% en bij S_3 is de kans op kop 70%. De overgangskansen tussen de states zijn gegeven door de overgangsmatrix

$$A := (a_{ij}) := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

waarbij a_{ij} de kans voor de overgang van state S_i naar state S_j aangeeft. De beginverdeling π van de states is een uniforme verdeling.

(i) Geef de matrix B van de emissiekansen vanuit de states aan.

(ii) Er wordt twee keer een munt geworpen. Bereken de kans op de uitkomst KM. Is deze kans groter of kleiner dan bij het werpen met één gewone eerlijke munt?

(iii) Bepaal de optimale rij van states voor het produceren van de uitkomst KKM . Wat is bij deze rij van states de kans voor de uitkomst KKM ?

(iv) Vergelijk de kans uit (iii) met de kans op de uitkomst KKM , als bij de enkele worpen telkens de munt met de hoogste kans op het resultaat K of M gekozen wordt, dus als de rij van states $S_3S_3S_1$ is.

Succes ermee!