Deel II

Fourier theorie

Aanbevolen achtergrondliteratuur met veel opgaven (en oplossingen):

- Murray R. Spiegel: (Schaum's Outline of Theory and Problems of) Fourier Analysis. McGraw-Hill Companies, 1974, 202 p., ISBN: 0070602190.
- Robert C. Wrede, Murray Spiegel: (Schaum's Outline of Theory and Problems of) Advanced Calculus. McGraw-Hill Companies, 2002, 433 p., ISBN: 0071375678.

  (Het tweede boek bevat alle relevante delen uit het eerstgenoemde speciale boek over Fourier analyse.)

Meer gevorderde boeken over Fourier theorie en toepassingen:

- Ronald N. Bracewell: The Fourier transform and its applications. McGraw-Hill, 1999, 496 p., ISBN: 0071160434.
- E. Oran Brigham: Fast Fourier transform and its applications. Prentice-Hall, 1988, 416 p., ISBN: 0133075052.
- Robert A. Gabel, Richard A. Roberts: Signals and linear systems. Wiley, 1986, 486 p., ISBN: 0471825131.

Les 7 Fourier analyse

Veel gewone fenomenen hebben iets met golven te maken, zo is bijvoorbeeld geluid een golvende verandering van de luchtdruk en is licht een elektromagnetische golf.

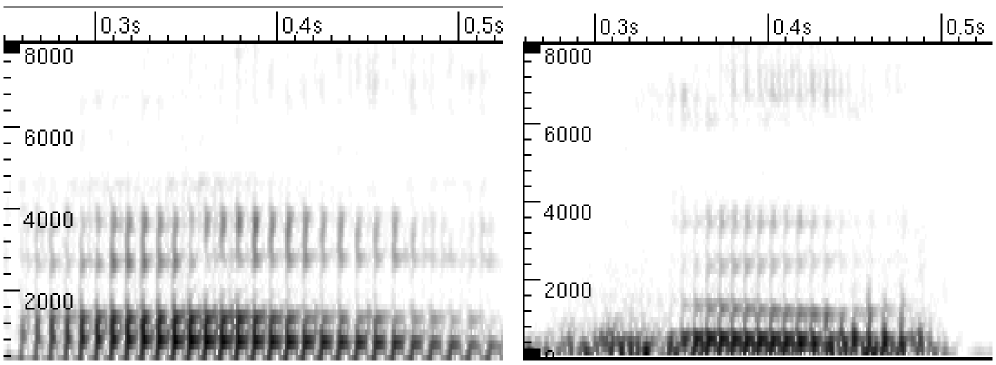
Als we nu eens kijken hoe bij een viool (of elk ander snaarinstrument) het geluid wordt geproduceerd, dan is het duidelijk dat de snaar aan de eindpunten vast zit, maar daartussen een golvende beweging uitvoert. De eenvoudigste mogelijkheid hiervoor is natuurlijk dat in het midden een buik is, waar de snaar de grootste amplitude heeft. Maar we kunnen ook precies in het midden een vinger op de snaar zetten, dan krijgen we twee half zo lange golven en de toon klinkt een octaaf hoger. Net zo kunnen we de vinger op een derde van de snaar plaatsen, de toon klinkt dan nog een kwint hoger, ook al heeft de intensiteit behoorlijk afgenomen. De tonen die we op deze manier produceren heten *boventonen* en klinken harmonisch met de grondtoon samen.

Dit was al aan Pythagoras bekend en ons gewoon systeem van twaalf halftonen in een octaaf berust op het delen van een snaar in twee stukken met een eenvoudige verhouding: 2 : 1 octaaf, 3 : 2 kwint, 4 : 3 kwart, 5 : 4 grote terts, 6 : 5 kleine terts, 9 : 8 grote seconde, 16 : 15 kleine seconde (halftoon). Uiteindelijk moet men met sommige intervallen iets schuiven, omdat bij deze verhoudingen twaalf kwinten een iets groter interval geven dan acht octaven: $1.5^{12} \approx 129.75$, $2^8 = 128$. De verhouding $\frac{1.5^{12}}{2^8} \approx 1.01364$ noemt men ook het *Pythagoraeïsch komma*. Om uit dit dilemma te ontsnappen zijn er verschillende *stemmingen* uitgevonden, bekende stemmingen zijn de *gelijkmatige*, waarbij iedere halftoon even groot is en de verhouding $\sqrt[12]{2} : 1$ heeft en verschillende soorten van *Wohltemperierung*.

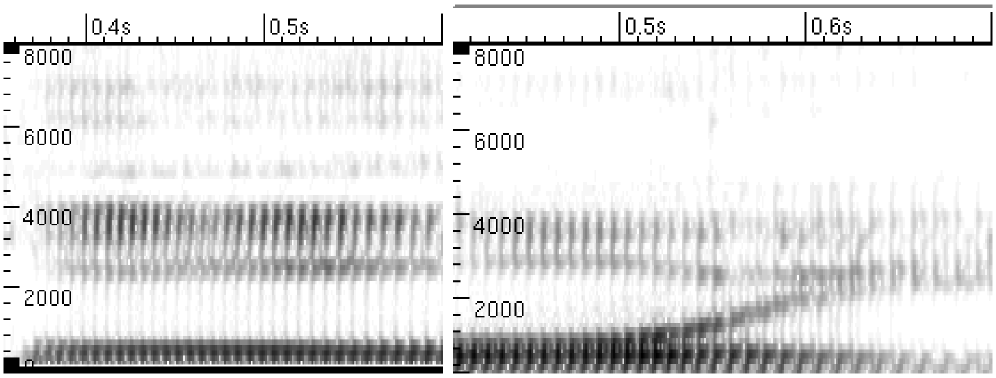
Als we naar verschillende instrumenten luisteren die dezelfde toon spelen, zullen we nog steeds makkelijk het verschil tussen een trompet, een viool en een piano kunnen horen (maar let wel: als je van een toon het begingeruis afplakt wordt dit veel moeilijker). De reden hiervoor ligt in het feit dat instrumenten naast de grondtoon ook boventonen produceren maar dat de intensiteiten van de boventonen tussen de instrumenten sterk verschillen. Bijvoorbeeld heeft een trompet veel sterkere boventonen dan een piano en ook bij een viool zijn de boventonen nog relatief sterk, terwijl een blokfluit zeer zwakke boventonen heeft. Grofweg geldt dat de scherpheid van de klank met de sterkte van de boventonen toeneemt.

Het idee is nu, de klank van een toon te beschrijven door naar de intensiteiten van de verschillende boventonen te kijken. De verdeling van de intensiteiten (waarbij we de grondtoon bijvoorbeeld op sterkte 1 normeren) geeft dan een karakterisering van de klank. Als we de hoogte van een toon door een grondfrequentie ω_0 beschrijven zo dat de frequenties van alle boventonen een veelvoud van ω_0 zijn, kunnen we de toon door de intensiteiten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beschrijven, waarbij a_k de intensiteit van de boventoon met frequentie $k\omega_0$ aangeeft (dit noemen we ook de boventoon van orde k). Bij de meeste instrumenten zijn de intensiteiten van de boventonen van orde 10 of meer erg klein, maar het menselijke oor is verbazingwekkend gevoelig voor heel kleine verschillen. Soms is het ook zo dat de grondfrequentie niet te hoogste intensiteit heeft, bij sommige instrumenten kan de speler dit zelfs bewust veranderen, bijvoorbeeld met de *flageolet* tonen bij een viool of fluit.

Het doel van de *Fourier analyse* is in principe, voor een gegeven 'klank' de intensiteiten $a_0, \ldots, a_n$ te bepalen, die een karakteristiek patroon voor de klank moeten geven. Dit past men bijvoorbeeld in de spraakherkenning toe, waar verschillende klinkers duidelijk verschillende patronen van intensiteiten voor het frequentie spectrum hebben. De frequenties met de hoogste intensiteiten heten *formanten* en bijvoorbeeld de afstand tussen de twee laagste formanten is een belangrijk kenmerk om klinkers te onderscheiden. Bij tweeklanken laat zich goed zien hoe de formanten over de tijd veranderen.



Figuur II.1: Formant spectra voor de klinkers `/a/` en `/oe/`



Figuur II.2: Formant spectra voor de klinker `/i/` en de tweeklank `/o-i/`

7.1 Periodieke functies

Om 'golvende fenomenen' (zo als trillingen) door een model te kunnen beschrijven, hebben we 'golvende functies' nodig, en daarbij denken we natuurlijk aan zo iets als de cosinus of sinus functies. Maar bij de sinus en cosinus heeft de golf een bepaalde vorm, om ook naar anders gevormde golven te kunnen kijken, spreken we algemeen van *periodieke functies*. Hiermee bedoelen we dat een functie zich naar een zeker interval weer herhaald.

Definitie: Een functie $f(t)$ heet *periodiek met periode* L als $f(t+L) = f(t)$ voor alle t.

> **Notatie:** Bij periodieke functies heet de variabel meestal t omdat we hierbij aan de *tijd* denken.

Bijvoorbeeld zijn $\cos(t)$ en $\sin(t)$ functies met periode 2π. Maar ook $\sin(2t)$ heeft periode 2π, de golven zijn bij deze functie half zo lang en de eigenlijke periode is π, maar dan is de functie natuurlijk ook periodiek met periode 2π. Algemener zijn alle functies $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ met $k = 0, 1, 2 \ldots$ periodiek met periode 2π. Deze functies kunnen we natuurlijk ook nog met factoren (de amplitude) vermenigvuldigen en bij elkaar optellen, dit geeft dan periodieke functies zo als

$$f(t) = 5\sin(t) + 3\cos(t) - 2\sin(3t) + \sin(4t).$$

Nu komt er een roekeloze gedachte aan: Bij gewone functies hebben we gezien dat we deze goed door veeltermen kunnen benaderen, bijvoorbeeld door de Taylor veelterm van zekere orde of door interpolatie. We hebben dus ingewikkelde functies beschreven door een lineaire combinatie van de heel eenvoudige functies 1, x, x^2, x^3 enzovoorts.

Zou het nu niet analoog kunnen dat zich periodieke functies goed laten benaderen door een lineaire combinatie van functies van de vorm $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$? Het antwoord hierop is een duidelijk 'ja' en we zullen nu toelichten dat dit eigenlijk een vraagstelling uit de Lineaire Algebra is.

7.2 Trigonometrische benadering

In Wiskunde 1 hebben we naar *orthogonale projecties* gekeken om de beste benadering van een punt in een deelruimte te vinden. Bijvoorbeeld wilden we een punt P in het 2-dimensionale vlak benaderen door een punt op een gegeven lijn, en het was bijna vanzelfsprekend dat de beste benadering (het punt op de lijn het dichtst bij P) de orthogonale projectie van P op de lijn was. Dit concept gaan we nu op de periodieke functies toepassen en het pakt nu goed uit dat we toen ook naar algemenere vectorruimten dan 2- en 3-dimensionale hebben gekeken.

> **Merk op:** In deze les gaan we alleen maar periodieke functies met periode 2π bekijken. De uitbreiding van de theorie tot functies met een willekeurige periode L is echter geen probleem en leidt uiteindelijk tot de Fourier transformatie. Dit gaan we in de volgende les behandelen.

De periodieke functies met periode 2π vormen een vectorruimte V met optelling $(f+g)(t) = f(t)+g(t)$ en vermenigvuldiging met factoren $(cf)(t) = c\cdot f(t)$.

De periodieke functies zijn dus de *vectoren* in V. We hebben boven al een paar vectoren in deze vectorruimte opgenoemd, namelijk $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$ voor $k \in \mathbb{N}$. De nulvector is de 0-functie $\sin(0 \cdot t)$ en men vindt alle constante functies als $c \cdot \cos(0 \cdot t)$.

Een belangrijk feit is nu dat de genoemde 'vectoren' lineair onafhankelijk zijn, d.w.z.:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) = 0 \text{ voor alle } t \ \Rightarrow a_k = b_k = 0 \text{ voor alle } k.$$

Het bewijs hiervan is niet erg moeilijk, maar we slaan het even over. Later zullen we namelijk aantonen dat deze vectoren *loodrecht* op elkaar staan en hieruit volgt in het bijzonder dat ze lineair onafhankelijk zijn.

Omdat de functies $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$ voor $k \geq 0$ lineair onafhankelijk zijn, hebben we het bij de vectorruimte V met een vectorruimte van oneindige dimensie te maken, maar daar hoeven we niet van te schrikken. Ook de veeltermfuncties $1, x, x^2, x^3, \ldots$ vormen de basis van een oneindig-dimensionale vectorruimte, en die lijkt heel gewoon.

Het plan is nu, de vectoren uit V te benaderen door lineaire combinaties van $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$, dus door vectoren in de deelruimte

$$U := \langle \cos(kt), \sin(lt) \mid k, l \in \mathbb{N}, l > 0 \rangle.$$

Omdat $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$ trigonometrische functies zijn, noemt men dit ook een *trigonometrische benadering*.

We weten uit Wiskunde 1 dat we de beste benadering van een vector in een deelruimte vinden door een orthogonale projectie, maar hiervoor moeten we wel kunnen zeggen, wanneer twee periodieke functies *loodrecht* op elkaar staan. Dit hadden we altijd met behulp van een *inproduct* uitgedrukt en voor de periodieke functies definiëren we een inproduct als volgt:

$$\Phi(f(t), g(t)) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot g(t) \; dt.$$

We moeten natuurlijk na gaan dat dit inderdaad een inproduct is, maar gelukkig volgt de *bilineariteit* rechtstreeks uit de eigenschappen van de integraal:

(i) $\Phi(f(t), g(t)) = \Phi(g(t), f(t))$ (symmetrie)

(ii) $\Phi(f(t) + g(t), h(t)) = \Phi(f(t), h(t)) + \Phi(g(t), h(t))$ (optellen)

(iii) $\Phi(cf(t), g(t)) = c \cdot \Phi(f(t), g(t))$ (vermenigvuldigen met een factor).

Verder moet het inproduct positief definiet zijn, d.w.z. er moet gelden:

(i) $\Phi(f(t), f(t)) \geq 0$ voor alle periodieke functies $f(t)$;

(ii) $\Phi(f(t), f(t)) = 0$ alleen maar voor de 0-functie $f(t)$ met $f(t) = 0$ voor alle t.

Het eerste punt zien we makkelijk in: $\Phi(f(t), f(t)) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt \geq 0$, want $f(t)^2 \geq 0$ voor alle t en de integraal over een niet-negatieve functie is niet negatief.

Om echter te kunnen concluderen dat alleen maar voor de 0-functie geldt dat $\Phi(f(t), f(t)) = 0$, moeten we nog iets over de periodieke functies veronderstellen. We hebben bijvoorbeeld problemen met functies $f(t)$ die overal 0 zijn behalve in een paar geïsoleerde punten. Voor dit soort functies is de integraal over $f(t)^2$ namelijk wel 0, terwijl het niet de 0-functies zijn. Om dit soort pathologische gevallen uit te sluiten, veronderstellen we dat onze functies *stuksgewijs continu* zijn:

Definitie: Een functie $f(t)$ heet *stuksgewijs continu* op het interval $[a, b]$ als het interval zich in eindig veel stukken laat opsplitsen waarop de functie continu is, d.w.z. als er punten $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ zijn, zo dat $f(t)$ continu op elk van de intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ is.

Een stuksgewijs continue periodieke functie is dus (op een eindig interval) continu tot op een eindig aantal sprongen na.

> Als men de voorwaarde dat de periodieke functies stuksgewijs continu moeten zijn te sterk vindt, moet men een alternatieve aanpak kiezen. De functies $f(t)$ waarvoor de integraal over $f(t)^2$ gelijk aan 0 is, worden dan tot de 0-functie *verklaart*. Dit geeft de theorie van *Lebesgue integralen* waarbij men functies met elkaar identificeert die *bijna overal* gelijk zijn. De term 'bijna overal' heeft hierbij een precies gedefinieerde betekenis, namelijk dat de uitzonderingen een verzameling van *maat* 0 zijn. Voor een verzameling (bijvoorbeeld een interval) met een gelijkverdeelde kansverdeling heeft een deelverzameling maat 0 als de kans voor deze deelverzameling 0 is. Op het interval $[-\pi, \pi]$ geldt dit bijvoorbeeld voor alle eindige verzamelingen van punten, maar ook voor de verzameling van rationale getallen die in dit interval liggen.

Om goed naar orthogonale projecties te kunnen kijken, hebben we een orthogonale, of beter nog een orthonormale basis nodig. Een basis heet *orthogonaal* als $\Phi(v, w) = 0$ voor elk paar $v \neq w$ van basisvectoren. Als verder ook nog $\Phi(v, v) = 1$ voor alle basisvectoren, heet de basis *orthonormaal*. Algemeen definiëren we de *lengte* van een vector als $\sqrt{\Phi(v, v)}$. Voor een periodieke functie $f(t)$ is de lengte dus gedefinieerd door

$$\|f(t)\| = \sqrt{\Phi(f(t), f(t))} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

We hebben inmiddels gezien hoe handig de complexe exponentiële functie is om uitspraken over de cosinus en sinus functies te bewijzen. Dit geldt ook voor het berekenen van de inproducten $\Phi(\cos(kt), \sin(lt))$. We zullen zien dat het stelsel $(\cos(kt), \sin(lt))$ al een orthogonaal stelsel is en dat de inproducten er als volgt uit zien:

Stelling:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\sin(lt)\,dt = 0 \quad \text{voor alle } k,l \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq l \\ \pi & \text{als } k = l > 0 \\ 2\pi & \text{als } k = l = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq l \\ \pi & \text{als } k = l > 0 \end{cases}$$

Bewijs: Uit het feit dat de complexe exponentiële functie een periode van $2\pi i$ heeft, volgt dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{als } k \neq l \\ 2\pi & \text{als } k = l \end{cases}$$

want voor $k \neq l$ is $\frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)t}$ een primitieve van $e^{i(k-l)t}$ en er geldt dus $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\,dt = \frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)t}\big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)\pi} - \frac{1}{i(k-l)}e^{i(k-l)(-\pi)} = 0$ (want $e^{i\pi} = e^{i(-\pi)}$). Voor $k = l$ is $e^{i(k-l)t} = 1$ en $\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 2\pi$.

Aan de andere kant is

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kt) + i\sin(kt))(\cos(-lt) + i\sin(-lt))\,dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(kt) + i\sin(kt))(\cos(lt) - i\sin(lt))\,dt$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt) + \sin(kt)\sin(lt)\,dt + i\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\sin(kt) - \cos(kt)\sin(lt)\,dt.$$

We kijken eerst naar het reële deel $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt) + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\,dt$ hiervan:
Er geldt $\cos(kt) = \sin(kt + \frac{\pi}{2})$, dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt + \frac{\pi}{2})\sin(lt + \frac{\pi}{2})\,dt$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(kt)\sin(lt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\,dt$$

omdat we over een volle periode integreren. Hieruit volgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt) + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\,dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\,dt$$
$$= 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\,dt.$$

Hieruit trekken we de volgende conclusies:

(1) Voor $k \neq l$ is $\Re(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\,dt) = 0$, dus

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(lt)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(lt)\,dt.$$

(2) Voor $k = l \neq 0$ volgt uit $\Re(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\, dt) = 2\pi$ dat

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\sin(kt)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cos(kt)\, dt = \pi.$$

(3) Voor $k = l = 0$ berekenen we heel eenvoudig dat $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(0\cdot t)\cos(0\cdot t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt = 2\pi$.

Hetzelfde trucje passen we nu op het imaginaire deel van $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\, dt$ toe, dus op $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\sin(kt) - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\sin(lt)\, dt$:
Met $\cos(kt) = \sin(kt + \frac{\pi}{2})$ en $\sin(lt) = -\cos(lt + \frac{\pi}{2})$ volgt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\sin(lt)\, dt &= -\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt + \frac{\pi}{2})\cos(lt + \frac{\pi}{2})\, dt \\ = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(kt)\cos(lt)\, dt &= -\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)\cos(lt)\, dt \end{aligned}$$

omdat we weer over een volle periode integreren. We hebben dus

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\sin(kt)\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\sin(lt)\, dt &= 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\sin(kt)\, dt \\ &= -2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\sin(lt)\, dt. \end{aligned}$$

Maar $\Im(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}e^{-ilt}\, dt) = 0$, dus hebben we

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(lt)\sin(kt)\, dt \text{ voor alle } k, l.$$

We hebben dus (zo als beloofd) bewezen dat de verzameling

$$B := \{1(= \cos(0\cdot t)), \cos(kt), \sin(lt) \mid k, l \geq 1\}$$

een orthogonaal stelsel vormt en dat voor de basisvectoren geldt dat

$$\Phi(1, 1) = 2\pi, \quad \Phi(\cos(kt), \cos(kt)) = \pi, \quad \Phi(\sin(kt), \sin(kt)) = \pi.$$

We kunnen ook met behulp van een paar handige opteltheorema's zien dat de functies een orthogonaal stelsel vormen. Deze bewijzen we wederom het makkelijkst met behulp van de complexe exponentiële functie. Bijvoorbeeld is $\cos(kt)\cos(lt) = \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2} \cdot \frac{e^{ilt}+e^{-ilt}}{2} = \frac{1}{4}(e^{i(k+l)t} + e^{i(k-l)t} + e^{i(-k+l)t} + e^{i(-k-l)t}) = \frac{1}{2}(\frac{e^{i(k+l)t}+e^{-i(k+l)t}}{2} + \frac{e^{i(k-l)t}+e^{-i(k-l)t}}{2}) = \frac{1}{2}(\cos((k+l)t) + \cos(k-l)t)$. Maar de integraal $\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k\pm l)t)\, dt$ kunnen we natuurlijk heel eenvoudig uitrekenen. Op dezelfde manier vindt men de opteltheorema's $\sin(kt)\sin(lt) = \frac{1}{2}(\cos((k-l)t) + \cos(k+l)t)$ en $\sin(kt)\cos(lt) = \frac{1}{2}(\sin((k+l)t) + \sin(k-l)t)$.

De Fourier reeks

Nu dat we weten dat de elementen van de basis B een orthogonaal stelsel vormen (dus dat ze alle loodrecht op elkaar staan) kunnen we ook projecties in de deelruimte U opgespannen door $\cos(kt)$ en $\sin(lt)$ berekenen. We hadden in Wiskunde 1 gezien, dat de projectie van een vector v in een deelruimte met orthogonale basis $(v_1, \ldots, v_n)$ gegeven is door

$$v_{\|} = c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = \sum_{k=1}^{n} c_k v_k,$$

waarbij de coëfficiënten c_k gegeven zijn door

$$c_k = \frac{\Phi(v, v_k)}{\|v_k\|^2}.$$

Voor een ortho*normaal* stelsel zou $\|v_k\|^2 = 1$ en dus $c_k = \Phi(v, v_k)$ gelden, maar onze basisvectoren hebben lengte $\sqrt{\pi}$ of $\sqrt{2\pi}$.

Dat onze basis oneindig veel elementen bevat, heeft tot gevolg dat we de projectie als een oneindige reeks moeten schrijven. Dit is verder geen probleem, we zien deze reeks (net zo als de Taylor reeks) als de limiet $n \to \infty$ van de som over de eerste n termen. We moeten dan (in principe) wel na gaan of de reeks inderdaad convergeert.

De conclusie is nu dat we een periodieke functie $f(t)$ met periode 2π kunnen benaderen door de projectie

$$f_{\|}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$$

met

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\Phi(f(t), \cos(kt))}{\|\cos(kt)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt \text{ voor } k = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ b_k &= \frac{\Phi(f(t), \sin(kt))}{\|\sin(kt)\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt \text{ voor } k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

De conventie de eerste coëfficiënt als $\frac{a_0}{2}$ te schrijven, zorgt ervoor dat de algemene formule voor de a_k ook voor a_0 geldt.

Definitie: De reeks $f_{\|}(t)$ heet de *Fourier reeks* van $f(t)$ en de coëfficiënten a_k, b_k heten de *Fourier coëfficiënten* van $f(t)$. De naam wijst op Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), die (in het kader van de zogeheten *hittevergelijking*) als eerste de wiskundige theorie van trigonometrische reeksen voor periodieke functies heeft ontwikkeld.

7.3 Eigenschappen van de Fourier reeks

We moeten nu twee belangrijke vragen over de Fourier reeks van een functie beantwoorden:

(1) Wanneer is de Fourier reeks een convergente reeks?

(2) Als de Fourier reeks convergeert, is de limiet dan ook de goede functie $f(t)$?

Het antwoord op beide vragen geeft de volgende beroemde stelling:

Stelling van Dirichlet: Voor een periodieke functie $f(t)$ met periode 2π convergeert de Fourier reeks, als $f(t)$ aan de volgende voorwaarden voldoet:

(a) Het interval $[-\pi, \pi]$ laat zich in eindig veel deelintervallen splitsen waarop $f(t)$ continu en monotoon (stijgend of dalend) is.

(b) In een punt t_0 waar $f(t)$ niet continu is, bestaan de rechtszijdige limiet $f_+(t_0) := \lim_{t \to t_0^+} f(t)$ en de linkszijdige limiet $f_-(t_0) := \lim_{t \to t_0^-} f(t)$ (maar ze zijn niet gelijk).

In de punten waar $f(t)$ continu is, convergeert onder deze voorwaarden de Fourier reeks inderdaad tegen de goede waarde $f(t)$ en in een punt t_0 waar $f(t)$ niet continu is (dus een sprong heeft) convergeert de Fourier reeks tegen het gemiddelde van de rechts- en de linkszijdige limiet, dus tegen $\frac{1}{2}(f_+(t_0)+f_-(t_0))$.

Deze opmerkelijke stelling zegt in het bijzonder dat de projectie van een periodieke functie in de deelruimte U opgespannen van de cosinus en sinus functies in de limiet weer de originele functie oplevert (behalve in afzonderlijke gevallen). We zeggen daarom, dat de deelruimte *dicht* ligt in de hele vectorruimte van periodieke functies. Dit is analoog met het feit, dat je elk reëel getal willekeurig goed kunt benaderen met rationale getallen (breuken), men zegt ook hier dat de rationale getallen dicht in de reële getallen liggen. Dit betekent echter niet dat alle periodieke functies in de deelruimte U liggen, want hiervoor zijn alleen maar eindige lineaire combinaties toegestaan en geen oneindige reeksen of limieten.

We kunnen zelfs de fout afschatten, die we maken als we de Fourier reeks naar een aantal termen afbreken (net zo als we de Taylor reeks naar een paar termen afbreken en een functie door een Taylor veelterm benaderen). Er geldt namelijk de **Parseval identiteit** die in principe uit het feit volgt dat we het kwadraat van de lengte van een lineaire combinatie van een orthogonaal stelsel berekenen als

$$\begin{aligned} \|c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n\|^2 &= \Phi(c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n, c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n) \\ &= c_1^2 \|v_1\|^2 + \ldots + c_n^2 \|v_n\|^2. \end{aligned}$$

Als we dit toepassen op een periodieke functie $f(t)$ met Fourier reeks $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)$ krijgen we

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, dt.$$

Als we de reeks na n termen afbreken, kunnen we dus de kwadratische fout afschatten door $\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$.

We merken nog op dat de voorwaarden in de stelling van Dirichlet geen noodzakelijke voorwaarden zijn, d.w.z. er zijn ook functies die niet aan deze voorwaarden voldoen, maar waarvoor de Fourier reeks wel tegen de goede functie convergeert. Aan de andere kant zijn er zelfs continue functies waarvoor de Fourier reeks niet tegen de juiste functie convergeert. Het probleem om een precieze karakterisatie van de functies te geven, waarvoor de Fourier reeks tegen de goede functie convergeert, is nog steeds open!

Uit de symmetrie eigenschappen van cosinus en sinus kunnen we heel eenvoudig een aantal belangrijke conclusies trekken. We weten dat $\cos(t)$ een even functie is, dus $\cos(-t) = \cos(t)$. Evenzo is $\sin(t)$ een oneven functie, want $\sin(-t) = -\sin(t)$. De integraal $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt$ kunnen we daarom makkelijk iets anders schrijven, namelijk als

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt = \int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt + \int_{0}^{\pi} f(-t)\cos(-kt)\, dt$$
$$= \int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt + \int_{0}^{\pi} f(-t)\cos(kt)\, dt.$$

Net zo is

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt = \int_{0}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt + \int_{0}^{\pi} f(-t)\sin(-kt)\, dt$$
$$= \int_{0}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt - \int_{0}^{\pi} f(-t)\sin(kt)\, dt.$$

Als nu $f(t)$ een even functie is, dan is $f(-t) = f(t)$ en dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt = \int_{0}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt - \int_{0}^{\pi} f(t)\sin(kt)\, dt = 0.$$

Hieruit volgt dat in de Fourier reeks van een even functie $f(t)$ alle coëfficiënten b_k gelijk aan 0 zijn en $f(t)$ dus een lineaire combinatie van alleen maar cosinus functies is (die precies de even functies in de basis van de deelruimte U zijn). Dit is analoog met het feit dat de Taylor reeks van een even functie alleen maar even machten z^{2n} bevat.

Omgekeerd geldt voor een oneven functie $f(t)$ dat $f(-t) = -f(t)$. In dit geval is

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt = \int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt - \int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)\, dt = 0$$

en zijn dus alle coëfficiënten a_k in de Fourier reeks gelijk aan 0. Ook dit is een analogie met de Taylor reeksen voor oneven functies, want deze bevatten alleen maar oneven termen z^{2n+1}.

Deze redeneringen laten zich als volgt samenvatten:

Stelling:

(i) Een even functie $f(t)$ met $f(-t) = f(t)$ heeft een Fourier reeks van de vorm

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt).$$

(ii) Een oneven functie $f(t)$ met $f(-t) = -f(t)$ heeft een Fourier reeks van de vorm

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt).$$

7.4 Fase verschuivingen

We kunnen ons afvragen hoe het komt, dat we alleen maar functies $\cos(kt)$ die in het nulpunt een maximum hebben, en functies $\sin(kt)$ die in het nulpunt een nulpunt hebben, nodig hebben om algemene periodieke functies te kunnen beschrijven. Hoe zit het bijvoorbeeld met een zuivere sinus functie die langs de x-as verschoven is, dus met $f(t) = \sin(kt + \varphi)$? Dit is een belangrijk punt, want we kunnen niet ervan uitgaan dat iedere golvende beweging op het tijdstip $t = 0$ of een nuldoorgang of een maximum heeft. De verschuiving φ noemt men ook de *fase* van de functie. De (misschien verrassende) oplossing is dat we de functie $f(t) = \sin(kt + \varphi)$ kunnen schrijven als lineaire combinatie van $\sin(kt)$ en $\cos(kt)$.

Uit het vergelijken van de imaginaire delen van $e^{i(kt+\varphi)}$ en $e^{ikt} \cdot e^{i\varphi}$ hadden we al eerder het opteltheorema $\sin(kt + \varphi) = \sin(\varphi)\cos(kt) + \cos(\varphi)\sin(kt)$ gevonden. Maar dit zegt precies dat we een functie $A\sin(kt+\varphi)$ kunnen schrijven als lineaire combinatie van $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$, namelijk als:

$$A\sin(kt + \varphi) = a\cos(kt) + b\sin(kt) \text{ met } a = A\sin(\varphi) \text{ en } b = A\cos(\varphi).$$

Met behulp van de relaties $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $\tan(\varphi) = \frac{a}{b}$ kunnen we makkelijk tussen de twee schrijfwijzen hen en weer gaan.

We hebben dus gezien dat het equivalent is een functie als lineaire combinatie $a\cos(kt) + b\sin(kt)$ te schrijven of als $A\sin(kt+\varphi)$, in beide gevallen zijn er drie parameters nodig: de amplituden a en b en de frequentie k óf de amplitude A, de fase φ en de frequentie k.

Dit betekent, dat we ook de Fourier reeks van een periodieke functie $f(t)$ met Fourier coëfficiënten a_k, b_k op een andere manier kunnen schrijven, namelijk als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(kt + \varphi_k) \text{ met } A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \text{ en } \tan(\varphi_k) = \frac{a_k}{b_k}.$$

Dit noemt men ook de *spectrale* schrijfwijze van de Fourier reeks van $f(t)$. De rij $A_1, A_2, \ldots$ heet dan het *amplitude spectrum* en de rij $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ het *fase spectrum* van $f(t)$.

7.5 Complexe schrijfwijze

We hebben nu al een paar keer gezien dat het soms handig is de cosinus en sinus functies gezamenlijk door de complexe exponentiële functie te beschrijven. Dit geldt ook voor de Fourier reeks!

We weten dat

$$\begin{aligned} a_k \cos(kt) &= a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} &&= \frac{a_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k}{2} e^{-ikt} \quad \text{en} \\ b_k \sin(kt) &= b_k \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} &&= \frac{b_k}{2}(-i) e^{ikt} + i \frac{b_k}{2} e^{-ikt}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) e^{ikt} + \frac{1}{2}(a_k + ib_k) e^{-ikt}.$$

We definiëren nu $c_0 := \frac{a_0}{2}$ en voor $k \geq 1$ definiëren we

$$c_k := \frac{1}{2}(a_k - ib_k) \quad \text{en} \quad c_{-k} := \overline{c_k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k).$$

Dan kunnen we de Fourier reeks van $f(t)$ herschrijven als

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Voor de coëfficiënten c_k met $k \geq 1$ geldt:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(kt) - i \sin(kt))\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(-kt) + i \sin(-kt))\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt. \end{aligned}$$

Maar de relatie $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$ geldt ook voor $k < 0$, want

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos(kt) + i \sin(kt))\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-i(-k)t}\, dt. \end{aligned}$$

We definiëren dus algemeen voor $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

en noemen dit de k-de *complexe Fourier coëfficiënt* van $f(t)$. Merk op dat deze formule ook voor $k = 0$ geldt, want $c_0 = \frac{a_0}{2}$ en a_0 was gedefinieerd door $a_0 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$.

De complexe schrijfwijze van de Fourier reeks van een periodieke functie $f(t)$ is dus:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \text{ met } c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt.$$

Voor reële functies $f(t)$ hebben we gezien dat $c_{-k} = \overline{c_k}$, maar we kunnen de complexe vorm van de Fourier reeks net zo goed op complexe functies $f(z)$ toepassen die langs de reële as periodiek zijn. De reële functies zijn echter de meest belangrijke toepassingen van de Fourier reeksen.

We hadden de complexe schrijfwijze van de Fourier reeks ook rechtstreeks middels het concept van de projectie op een deelruimte kunnen afleiden: De functies e^{ikt} met $k \in \mathbb{Z}$ zijn orthogonaal ten opzichte van het inproduct $\Psi(f(z), g(z)) := \int_{-\pi}^{\pi} f(z)\overline{g(z)}\,dz$. Merk op dat de complexe conjugatie bij de tweede factor nodig is om het inproduct positief definiet te hebben, want dan wordt $\Psi(f(z), f(z)) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(z)|^2\,dz$. Met betrekking tot dit inproduct geldt $\Psi(e^{ikt}, e^{ikt}) = 2\pi$, dus vinden we de coëfficiënt c_k van e^{ikt} als $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e^{ikt}}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt$.

7.6 Belangrijke voorbeelden

We zullen de theorie van Fourier reeksen nu op een aantal belangrijke periodieke functies toepassen. Hierbij berekenen we voor een gegeven functie de Fourier coëfficiënten en vergelijken de functie met de benadering door de eerste termen van de Fourier reeks. Het produceren van een zekere golfvorm middels lineaire combinaties van cosinus en sinus functies noemt men ook *Fourier synthese*. Dit principe wordt bijvoorbeeld in synthesizers toegepast, waar zuivere sinus-golven elektronisch geproduceerd en vervolgens tot periodieke functies met ingewikkeldere golfvormen gecombineerd worden.

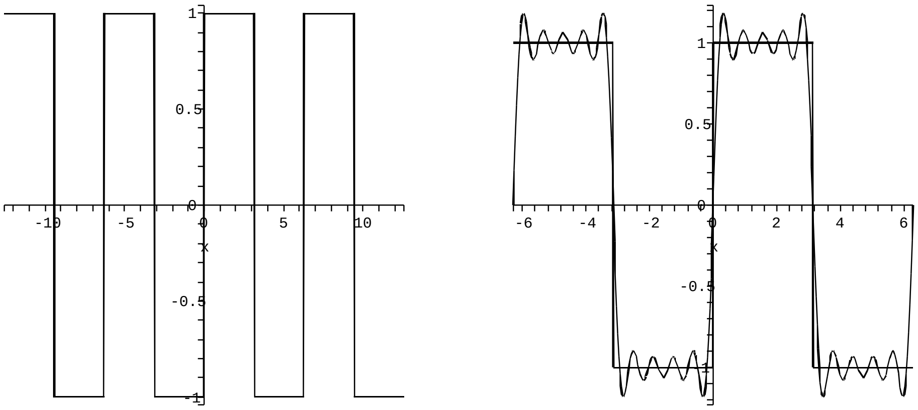
Omdat we het over functies met periode 2π hebben, hoeven we de functies alleen maar voor het interval $[-\pi, \pi]$ te definiëren, door verschuiving van dit interval om veelvouden van 2π overdekken we de hele reële as.

De stapfunctie

De stapfunctie is gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} -1 & \text{als} \quad -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

Omdat $f(t)$ een oneven functie is, zijn de coëfficiënten a_k van $\cos(kt)$ alle gelijk aan 0 en voor de coëfficiënten b_k van $\sin(kt)$ geldt $b_k = 2\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt$.



Figuur II.3: Stapfunctie en benadering door Fourier reeks

Hieruit volgt:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1\cdot\sin(kt)\ dt = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}(-\cos(kt)\big|_0^\pi = \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}(-\cos(k\pi)+1)$$
$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi}\frac{1}{k} & \text{als } k \text{ oneven} \\ 0 & \text{als } k \text{ even} \end{cases}$$

De ontwikkeling van $f(t)$ in een Fourier reeks is dus

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \frac{\sin(7t)}{7} + \ldots\right)$$

De zaagfunctie

De zaagfunctie is gedefinieerd door

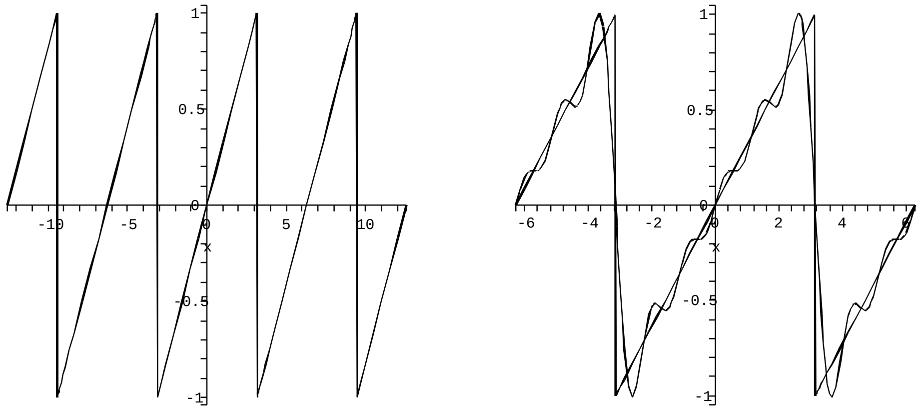
$$f(t) := \frac{1}{\pi}t.$$

Ook de zaagfunctie is een oneven functie, dus zijn ook hier de coëfficiënten van $\cos(kt)$ gelijk aan 0. We moeten de integraal $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t\cdot\sin(kt)\ dt$ berekenen, en hiervoor bepalen we eerst met behulp van partiële integratie een primitieve van $t\cdot\sin(kt)$. Er geldt

$$\int t\sin(kt)\ dt = t\frac{1}{k}(-\cos(kt)) + \int \frac{1}{k}\cos(kt)\ dt = -t\frac{1}{k}\cos(kt) + \frac{1}{k^2}\sin(kt).$$

Hieruit volgt:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t\cdot\sin(kt)\ dt = \frac{2}{\pi^2}(-t\frac{1}{k}\cos(kt)\big|_0^\pi + \frac{1}{k^2}\sin(kt)\big|_0^\pi)$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{k}(-\pi\cos(k\pi)) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{k}$$

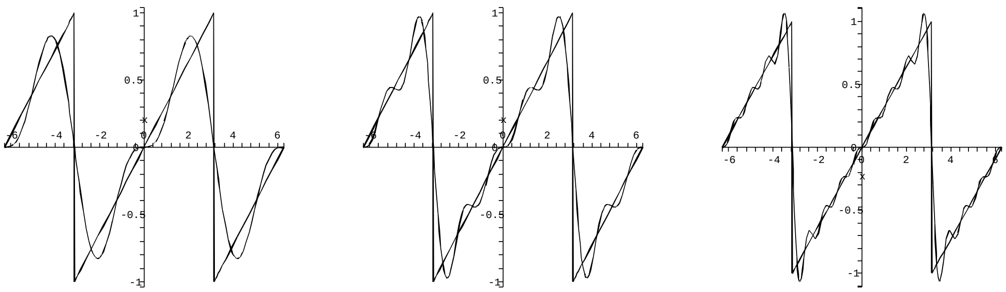


Figuur II.4: Zaagfunctie en benadering door Fourier reeks

De ontwikkeling van $f(t)$ in een Fourier reeks is dus

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(kt) = \frac{2}{\pi}\left(\sin(t) - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} - \frac{\sin(4t)}{4} + \ldots\right)$$

Voor de zaagfunctie laten we in de volgende drie plaatjes zien hoe de benadering verbeterd door meer termen van de Fourier reeks erbij te pakken. De drie benaderingen breken de Fourier reeks naar 2, 4 en 8 termen af. Het is duidelijk dat vooral het punt waar de functie niet continu is problemen bij de benadering veroorzaakt.



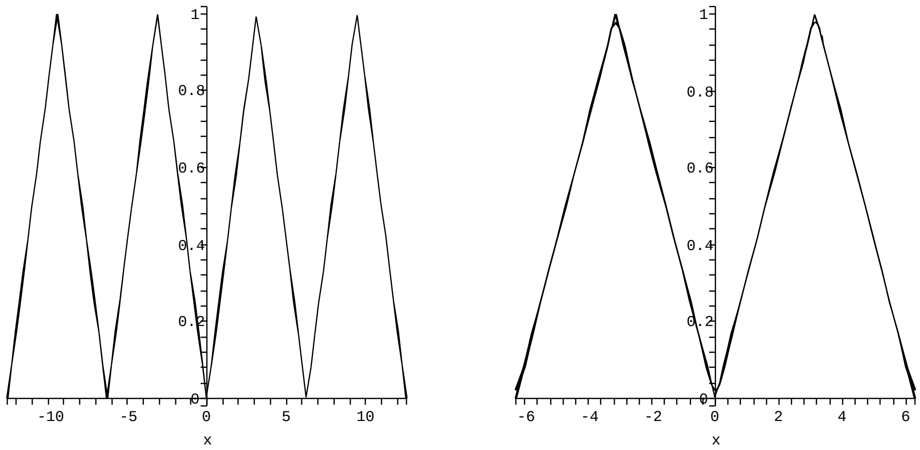
Figuur II.5: Afbreken van de Fourier reeks naar 2, 4 en 8 termen

Als we de Fourier reeks van de zaagfunctie voor $t = \frac{\pi}{2}$ toepassen, krijgen we $\frac{1}{2} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin(k\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots)$, want voor even k is $\sin(k\frac{\pi}{2}) = 0$ en voor oneven k is $\sin(k\frac{\pi}{2})$ afwisselend 1 en -1. Hieruit volgt de opmerkelijke formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

De zigzagfunctie

De zigzagfunctie krijgen we als we de absolute waarde van de zaagfunctie nemen. We hebben dus
$$f(t) := \frac{1}{\pi}|t|.$$



Figuur II.6: Zigzagfunctie en benadering door Fourier reeks

De zigzagfunctie is een even functie, daarom zijn de coëfficiënten b_k van $\sin(kt)$ gelijk aan 0. Ook hier gebruiken we de symmetrie om de integraal te vereenvoudigen, we krijgen dan $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t \cdot \cos(kt)\ dt$. We moeten dus een primitieve van $t \cdot \cos(kt)$ bepalen:

$$\int t\cos(kt)\ dt = t\frac{1}{k}\sin(kt) - \int \frac{1}{k}\sin(kt)\ dt = t\frac{1}{k}\sin(kt) + \frac{1}{k^2}\cos(kt).$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t \cdot \cos(kt)\ dt = \frac{2}{\pi^2}(t\frac{1}{k}\sin(kt)\big|_0^\pi + \frac{1}{k^2}\cos(kt)\big|_0^\pi) \\ &= \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{k^2}(\cos(k\pi) - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{k^2} & \text{als } k \text{ oneven} \\ 0 & \text{als } k \text{ even} \end{cases} \end{aligned}$$

Voor a_0 hebben we

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}t\ dt = \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{2}t^2\big|_0^\pi = 1.$$

De ontwikkeling van $f(t)$ in een Fourier reeks is dus

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)t) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos(t) + \frac{\cos(3t)}{3^2} + \frac{\cos(5t)}{5^2} + \dots\right) \end{aligned}$$

Merk op dat men hier veel sneller een goede benadering van $f(t)$ krijgt, omdat de noemers in de Fourier reeks met k^2 groeien.

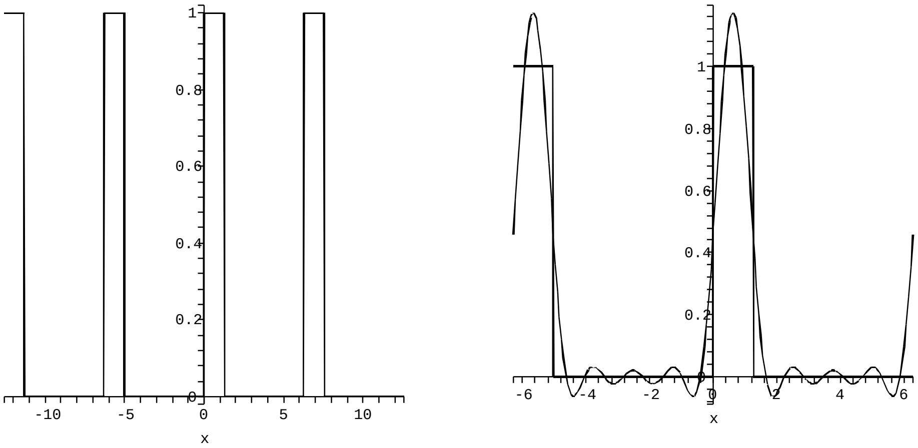
Als we de Fourier reeks van de zigzagfunctie voor $t = 0$ toepassen, krijgen we $0 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1) \cdot 0) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots)$ en hieruit volgt de formule

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

De impulsfunctie

De impulsfunctie $f(t)$ heeft op het tijdstip 0 een impuls van lengte $a < \pi$ en is verder 0 op het interval $[-\pi, \pi]$. De functie is dus gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{als} \quad 0 \le t \le a \\ 0 & \text{als} \quad t \notin [0, a]. \end{cases}$$



Figuur II.7: Impulsfunctie en benadering door Fourier reeks

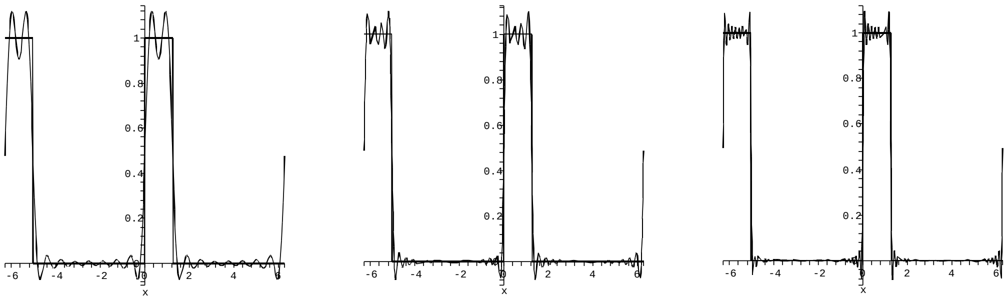
Omdat de functie buiten het interval $[0, a]$ gelijk aan 0 is, hoeven we ook alleen maar over dit deelinterval te integreren. Er geldt:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^a 1 \; dt = \frac{1}{\pi} a \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \cos(kt) \; dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k} \sin(kt)\Big|_0^a = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(ka)}{k} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^a \sin(kt) \; dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k} (-\cos(kt))\Big|_0^a = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos(ka)}{k} \end{aligned}$$

De ontwikkeling van $f(t)$ in een Fourier reeks is dus

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(ka)}{k} \cos(kt) + \frac{1-\cos(ka)}{k} \sin(kt) \right) \\ &= \frac{a}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \Bigg(\sin(a)\cos(t) + (1-\cos(a))\sin(t) \\ &\qquad + \frac{\sin(2a)}{2}\cos(2t) + \frac{1-\cos(2a)}{2}\sin(2t) + \ldots \Bigg) \end{aligned}$$

Bij de impulsfunctie geven we nog drie benaderingen van hogere graden aan, om te laten zien dat ook een korte impuls goed benaderd wordt.



Figuur II.8: Benaderingen van hogere orde voor de impulsfunctie

Belangrijke begrippen in deze les

- periodieke functies
- trigonometrische benadering
- Fourier reeks, Fourier coëfficiënten
- spectrale schrijfwijze, complexe schrijfwijze
- stapfunctie, zaagfunctie, impulsfunctie

Opgaven

63. We bekijken de functie

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{als} \quad -\pi \le t < 0 \\ 1 & \text{als} \quad 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{als} \quad \frac{\pi}{2} \le t < \pi \end{cases}$$

die we door verschuiven om veelvouden van 2π tot een 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$ voortzetten.

(i) Maak een schets van de functie.

(ii) Bepaal de Fourier reeks van de functie

(iii) Maak een schets van de eerste twee benaderingen van $f(t)$ door afbreken van de Fourier reeks.

64. Bereken de Fourier reeks van $f(t) := |\sin(t)|$.

Hint: Met partiële integratie vindt men een primitieve van $\sin(t)\cos(kt)$ als volgt:
$\int \sin(t)\cos(kt)\ dt = -\cos(t)\cos(kt) - \int(-\cos(t))(-k\sin(kt))\ dt$
$= -\cos(t)\cos(kt) - k\int \cos(t)\sin(kt)\ dt$
$= -\cos(t)\cos(kt) - k(\sin(t)\sin(kt) - \int \sin(t)k\cos(kt)\ dt)$
$= -\cos(t)\cos(kt) - k\sin(t)\sin(kt) + k^2\int \sin(t)\cos(kt)\ dt$
$= \frac{1}{k^2-1}(\cos(t)\cos(kt) + k\sin(t)\sin(kt))$.

65. Bereken de Fourier reeks van de functie $f(t) := t^2$ die we van het interval $[-\pi,\pi]$ door verschuiven om veelvouden van 2π op de hele reële as voortzetten.

66. We bekijken de functie

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{als} \quad -\pi \le t \le 0 \\ \sin(t) & \text{als} \quad 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

die we door verschuiven om veelvouden van 2π tot een 2π-periodieke functie op $\mathbb{R}$ voortzetten.

(i) Maak een schets van de functie.

(ii) Laat zien dat $f(t)$ de Fourier reeks

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kt)}{(2k)^2-1}\right) \\ =\ &\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(2t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6t)}{5\cdot 7} + \frac{\cos(8t)}{7\cdot 9} + \ldots\right) \end{aligned}$$

heeft.

(iii) Concludeer dat

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} - \frac{1}{7\cdot 9} + \ldots = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)^2-1}.$$

(Hint: Vul $t = \frac{\pi}{2}$ in de Fourier reeks in.)

67. Bereken de Fourier reeks van de functie

$$f(t) := \cos(\alpha t) \text{ met } \alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

die van het interval $[-\pi,\pi]$ door verschuiven tot een periodieke functie met periode 2π voortgezet wordt.

Hint: Er geldt $2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$.

Les 8 Fourier transformatie

8.1 Periodieke functies met perioden verschillend van 2π

In de vorige les hebben we naar de Fourier reeksen voor periodieke functies met periode 2π gekeken. De reden hiervoor was, dat we voor deze periode met de cosinus en sinus functies goed bekende voorbeelden hadden. Maar de beperking tot functies met periode 2π is natuurlijk erg kunstmatig, en we zullen de theorie van Fourier reeksen nu uitbreiden op functies met een willekeurige periode L.

Het idee dat hier achter zit is heel eenvoudig: Door een schaling (van de x-as) maken we uit een interval van lengte L een interval van lengte 2π, hiervoor moeten we L met de factor $\frac{2\pi}{L}$ vermenigvuldigen. Als $f(t)$ een periodieke functie met periode L is, dan definiëren we

$$\omega := \frac{2\pi}{L} \quad \text{en} \quad x := \omega t.$$

Loopt nu t over een volledige periode, d.w.z. over een interval van lengte L, dan loopt x over een interval van lengte $\omega L = 2\pi$. We definiëren nu een nieuwe functie $g(t)$ door

$$g(t) := f(\frac{1}{\omega}t), \text{ dus } f(t) = g(\omega t) = g(x)$$

en voor de nieuwe variabel x is $g(x)$ een functie met periode 2π.

Op de functie $g(x)$ kunnen we nu de theorie van Fourier reeksen voor functies met periode 2π toepassen, we krijgen dus

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad \text{met} \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\, dx.$$

Maar omdat $f(t) = g(x)$ en $x = \omega t$, kunnen we dit ook schrijven als

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt}.$$

Let op: In de coëfficiënten c_k mogen we x niet zo maar door ωt vervangen, omdat x hier een integratie variabel is. Dit is dus een echte *substitutie*:

$$x = \omega t, \quad dx = \omega\, dt,$$

De integratie over x loopt van $-\pi$ tot π, dus loopt de integratie voor t van $\frac{1}{\omega}(-\pi) = -\frac{L}{2}$ tot $\frac{1}{\omega}\pi = \frac{L}{2}$. We krijgen dus

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} g(\omega t)e^{-i\omega kt}\omega\, dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-i\omega kt}\, dt \\ &= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-i\omega kt}\, dt. \end{aligned}$$

De Fourier reeks van een functie $f(t)$ met periode L is dus:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt} \quad \text{met} \quad c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-i\omega kt}\, dt.$$

Op een soortgelijke manier wordt ook de reële versie van de Fourier reeks aangepast, want we schrijven

$$\begin{aligned} f(t) = g(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt) \end{aligned}$$

en weer met de substitutie $x = \omega t$, $dx = \omega\, dt$ vinden we:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(kx)\, dx = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(\omega kt)\, dt \text{ voor } k \geq 0 \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(\omega kt)\, dt \text{ voor } k \geq 1. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de reële versie van de Fourier reeks voor een functie $f(t)$ met periode L:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt) \quad \text{met} \\ a_k &= \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \cos(\omega kt)\, dt, \qquad b_k = \frac{2}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) \sin(\omega kt)\, dt. \end{aligned}$$

De Fourier reeksen voor periodieke functies met periode L kan men ook direct afleiden door de methode van orthogonale projecties aan de periode L aan te passen:

Het geschikte inproduct is in dit geval

$$\Phi(f(t), g(t)) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) g(t)\, dt,$$

het orthogonale stelsel wordt $\{\cos(\omega kt), \sin(\omega lt) \mid k \geq 0, l \geq 0\}$ met $\omega = \frac{2\pi}{L}$ en er geldt

$$\begin{aligned} &\Phi(\cos(\omega kt), \cos(\omega kt)) = \Phi(\sin(\omega kt), \sin(\omega kt)) = \frac{L}{2} \text{ voor } k \geq 1, \\ &\Phi(\cos(0), \cos(0)) = L. \end{aligned}$$

8.2 Van Fourier reeks naar Fourier integraal

Bij de ontwikkeling van een periodieke functie $f(t)$ met periode L in zijn Fourier reeks is $\omega = \frac{2\pi}{L}$ de basis frequentie en de coëfficiënt c_k geeft de intensiteit van de trilling met frequentie $k\omega$ in de functie $f(t)$ aan. In het bijzonder geven naburige coëfficiënten c_k en c_{k+1} de intensiteiten voor frequenties met een verschil van ω aan. Als we nu naar periodieke functies met verschillende periodes kijken, hangen de afstanden tussen de frequenties die aan de functies bijdragen van de periode af. Als we de periode verdubbelen, moeten we naar frequenties met een half zo grote afstand kijken. Hoe langer de periode van een functie, hoe meer frequenties in een bepaald interval spelen dus een rol.

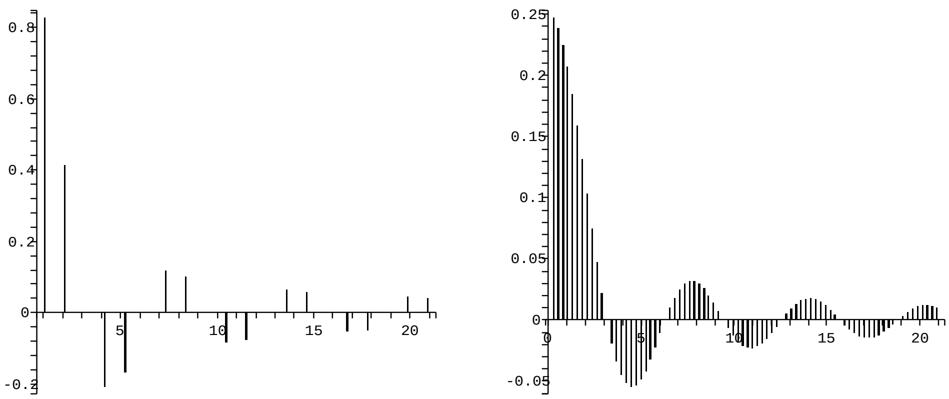
Voorbeeld: We kijken naar een impuls van lengte $2a$ en intensiteit 1 tussen $t = -a$ en $t = a$, die met een periode van L herhaald. Omdat de functie even is, hoeven we alleen maar de coëfficiënten a_k te bepalen, en er geldt:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(\omega k t)\,dt = \frac{2}{L}\int_{-a}^{a}\cos(\omega k t)\,dt = \frac{2}{L}\frac{1}{\omega k}\sin(\omega k t)\Big|_{-a}^{a} \\ &= \frac{4}{L}\frac{\sin(\omega k a)}{\omega k} = \frac{4a}{L}\frac{\sin(\omega k a)}{\omega k a}. \end{aligned}$$

Als we nu de afstand tussen de impulsen verdubbelen, dus de periode van L naar $L' = 2L$ verdubbelen, krijgen we nieuwe Fourier coëfficiënten a'_k voor veelvouden van de nieuwe grondfrequentie $\omega' = \frac{1}{2}\omega$, namelijk

$$a'_k = \frac{4a}{L'}\frac{\sin(\omega' k a)}{\omega' k a} = \frac{2a}{L}\frac{\sin(\omega \frac{k}{2} a)}{\omega \frac{k}{2} a}.$$

De coëfficiënt a_k geeft de intensiteit van de trilling met frequentie $\omega k = 2\omega' k = \omega' \cdot 2k$ aan, dus hoort bij de frequentie ωk in de nieuwe Fourier reeks de coëfficiënt a'_{2k}. Er geldt $a'_{2k} = \frac{2a}{L}\frac{\sin(\omega k a)}{\omega k a} = \frac{1}{2}\,a_k$, dus zijn de intensiteiten voor dezelfde frequentie tot op een factor $\frac{1}{2}$ na hetzelfde. Maar tussen twee naburige frequenties ωk en $\omega(k+1)$ voor de impuls met periode L ligt er nu nog de frequentie $\omega\frac{k+(k+1)}{2} = \omega'(2k+1)$ omdat de afstanden tussen de frequenties gehalveerd zijn.



Figuur II.9: Fourier coëfficiënten voor rechthoek impuls met periode L en $4L$.

In Figuur II.9 is het effect van het vergrootten van de periode te zien. De x-as geeft de frequenties aan, en voor de frequenties die aan de Fourier reeks bijdragen is de waarde van de bijhorende coëfficiënt a_k door een verticale lijn aangegeven. Het is duidelijk te zien dat bij de overgang van een periode L naar $4L$ de bijdragende frequenties 4 keer dichter bij elkaar liggen.

Overgang naar niet-periodieke functies

Als we de lengte van de periode steeds verder laten groeien, verliest de functie uiteindelijk zijn periodieke karakter en in de limiet kunnen we iedere functie als periodieke functie met periode $L = \infty$ opvatten. Maar de limiet $L \to \infty$ correspondeert met de limiet $\omega \to 0$, dus moeten we voor dit geval frequenties met oneindig kleine afstand bekijken en een intensiteit voor elke frequentie op een continue lijn bepalen. In het rechter plaatje van Figuur II.9 kan men zich dit al goed voorstellen, de verticale lijnen geven al bijna de contour van een continue functie aan.

We gaan nu de overgang van discrete frequenties voor een periodieke functie naar een continu spectrum van frequenties voor een niet-periodieke functie nader bekijken.

Hiervoor schrijven we een functie $f(t)$ met periode L als Fourier reeks:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt} \text{ met } c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-i\omega kt}\, dt \text{ waarbij } \omega = \frac{2\pi}{L}.$$

Eerst vullen we de coëfficiënten c_k in de Fourier reeks in, dit geeft:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) e^{-i\omega k\tau}\, d\tau \right) e^{i\omega kt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) e^{-i\omega k\tau}\, d\tau \right) e^{i\omega kt} \omega. \end{aligned}$$

Als we nu de limiet $L \to \infty$ bekijken, gaat $\omega \to 0$, dus loopt ωk in steeds kleinere stappen ω van $-\infty$ naar ∞. Uiteindelijk wordt ωk een continue variabel die we u noemen en die in stappen van $\Delta u = \omega$ van $-\infty$ naar ∞ loopt. Elke term in de som van de Fourier reeks wordt door het vervangen van ωk door de nieuwe variabel u een term van de vorm

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(\tau) e^{-iu\tau}\, d\tau \right) e^{iut} \Delta u$$

en in de limiet gaat de som over deze termen (door vervangen van Δu door de differentiaal du) over in een integraal met integratievariabel u. Op deze manier krijgen we een van de centrale stellingen van de Fourier theorie:

Fourier integraal identiteit

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-iu\tau}\, d\tau \right) e^{iut}\, du.$$

Merk op dat in de binnenste integraal τ de integratie variabel is, terwijl u hier als constante behandeld wordt.

Om de Fourier integraal identiteit iets overzichtelijker te schrijven definiëren we de binnenste integraal als een aparte functie van u:

$$F(u) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt \quad \text{dan is} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iut}\,du.$$

Als we de formule $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iut}\,du$ met de Fourier reeks $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega kt}$ van een periodieke functie vergelijken, zien we dat we de functie $F(u)$ kunnen opvatten als de continue versie van de Fourier coëfficiënten c_k.

Definitie:

(i) De functie
$$F(u) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt$$
heet de *Fourier getransformeerde* of *Fourier transformatie* van $f(t)$ en wordt genoteerd met $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ of $F(u) = \hat{f}$.

(ii) De afbeelding $\mathcal{F} : f(t) \to \mathcal{F}[f(t)]$ die aan een functie $f(t)$ zijn Fourier getransformeerde $F(u)$ toewijst, wordt zelf ook *Fourier transformatie* genoemd.

(iii) Omgekeerd komen we van de functie $F(u)$ terug naar $f(t)$ door
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iut}\,du$$
en we noemen dit de *inverse Fourier transformatie* van $F(u)$, genoteerd met $\mathcal{F}^{-1}[F(u)]$.

Merk op: De Fourier transformatie levert een 'tweede taal' om over functies te praten: De Fourier transformatie vertaalt een functie vanuit het *tijdsdomein* naar het *frequentiedomein*, de inverse Fourier transformatie is de vertaling de andere kant op. Omdat sommige eigenschappen van een functie beter in het tijdsdomein, andere beter in het frequentiedomein beschreven worden, is het heen en weer schakelen tussen de twee talen een fundamenteel hulpmiddel in vele gebieden van signaalverwerking en patroonherkenning.

De factor $\frac{1}{2\pi}$ in de Fourier integraal identiteit geeft aanleiding tot verschillende formuleringen van de Fourier transformatie. Bij de Fourier transformatie en de inverse Fourier transformatie moeten er namelijk factoren voor de integraal staan, die met elkaar vermenigvuldigd $\frac{1}{2\pi}$ opleveren. Drie voor de hand liggende mogelijkheden zijn:

(i) 1 bij de Fourier transformatie en $\frac{1}{2\pi}$ bij de inverse Fourier transformatie (zo als aangegeven),

(ii) $\frac{1}{2\pi}$ bij de Fourier transformatie en 1 bij de inverse Fourier transformatie,

(iii) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ bij de Fourier transformatie en ook bij de inverse Fourier transformatie.

De laatste versie benadrukt de symmetrie tussen Fourier transformatie en inverse Fourier transformatie, maar wij zullen bij de eerste optie blijven.

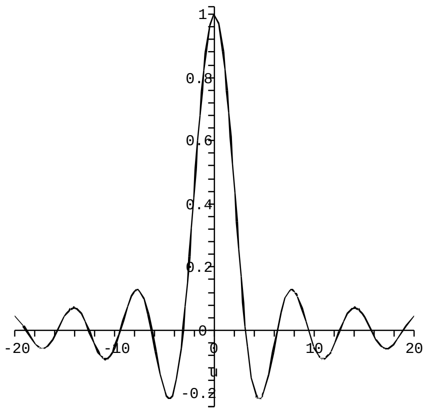
Voorbeeld: Zij $f(t)$ een rechthoek impuls van sterkte 1 tussen de tijden $-a$ en a, dus

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

dan berekenen we de Fourier getransformeerde $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ als volgt:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt = \int_{-a}^{a} e^{-iut}\,dt = \frac{1}{-iu}\,e^{-iut}\big|_{-a}^{a} = \frac{1}{-iu}\,(e^{-iua} - e^{iua}) \\ &= \frac{2}{u}\,\frac{e^{iua} - e^{-iua}}{2i} = \frac{2}{u}\sin(au) = 2\,\frac{\sin(au)}{u} \end{aligned}$$

In Figuur II.10 is de Fourier getransformeerde voor het geval $a = 1$ te zien.



Figuur II.10: Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls met $a = 1$.

We zullen in de volgende les nader op dit en andere belangrijke voorbeelden ingaan.

8.3 Andere schrijfwijzen van de Fourier transformatie

Net als voor de Fourier reeks zijn er ook voor de Fourier transformatie verschillende schrijfwijzen.

Amplitude en fase spectrum

Met behulp van absolute waarde en argument kunnen we $F(u)$ schrijven als

$$F(u) = |F(u)|e^{i\Phi(u)}$$

dan heet $|F(u)|$ het *amplitude spectrum* en $\Phi(u)$ het *fase spectrum* van $f(t)$.

Uit $e^{-i(-u)t} = e^{iut} = \overline{e^{-iut}}$ volgt voor reëele functies $f(t)$:

$$F(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-u)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{e^{-iut}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-iut}}\,dt = \overline{F(u)}.$$

Hieruit volgt in het bijzonder dat het amplitude spectrum $|F(u)|$ een even functie en het fase spectrum $\Phi(u)$ een oneven functie is.

Reële schrijfwijze

In analogie met de reële schrijfwijze van Fourier reeksen is er ook een reële schrijfwijze voor de Fourier transformatie van een reële functie $f(t)$. We schrijven

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(ut) - i\sin(ut))\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ut)\,dt - i\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ut)\,dt \end{aligned}$$

en definiëren

$$a(u) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(ut)\,dt, \qquad b(u) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(ut)\,dt$$

dan is $F(u) = a(u) - ib(u)$. Er geldt $a(-u) = a(u)$ omdat $\cos(-ut) = \cos(ut)$ en $b(-u) = -b(u)$ omdat $\sin(-ut) = -\sin(ut)$, dus:

$$a(u) \text{ is een even functie,} \quad b(u) \text{ is een oneven functie.}$$

Als we de Fourier integraal identiteit met behulp van reële functies uitschrijven, krijgen we:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iut}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)(\cos(ut) + i\sin(ut))\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (a(u) - ib(u))(\cos(ut) + i\sin(ut))\,du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (a(u)\cos(ut) + b(u)\sin(ut))\,du \\ &+ i\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (a(u)\sin(ut) - b(u)\cos(ut))\,du. \end{aligned}$$

Maar $f(t)$ is een reële functie, daarom verdwijnt het imaginaire deel en we hebben

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (a(u)\cos(ut) + b(u)\sin(ut))\,du.$$

Nu weten we dat $a(u)$ even en $b(u)$ oneven is, hieruit volgt $a(-u)\cos(-ut) = a(u)\cos(ut)$ en $b(-u)\sin(-ut) = -b(u)(-\sin(ut)) = b(u)\sin(ut)$ en daarom levert de integratie van $-\infty$ tot 0 hetzelfde op als de integratie van 0 tot ∞. We hebben dus uiteindelijk gevonden:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (a(u)\cos(ut) + b(u)\sin(ut))\,du \quad \text{met}$$
$$a(u) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos(ut)\,dt \quad \text{en} \quad b(u) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(ut)\,dt.$$

Als $f(t)$ een even functie is, is $f(t)\sin(ut)$ een oneven functie, maar dan is $b(u) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\sin(ut)\,dt = 0$. Voor een oneven functie $f(t)$ is $f(t)\cos(ut)$ een oneven functie, dus volgt in dit geval met hetzelfde argument dat $a(u) = 0$ is.

Fourier cosinus en Fourier sinus transformatie

Voor reële functies $f(t)$ die alleen maar voor $0 \leq t < \infty$ gedefinieerd zijn, worden vaak ook de *Fourier cosinus transformatie* en de *Fourier sinus transformatie* toegepast. Het idee hierbij is, de functie door $f(-t) := f(t)$ tot een even of door $f(-t) := -f(-t)$ tot een oneven functie op de hele reële as voort te zetten. Voor de voortgezette functie is dan bij de Fourier transformatie of de functie $b(u)$ de 0-functie (even geval) of de functie $a(u)$ is de 0-functie (oneven geval).

Voor de *Fourier cosinus transformatie* stellen we ons voor dat $f(t)$ door $f(-t) := f(t)$ tot een even functie $f_e(t)$ op de hele reële as voortgezet wordt en berekenen hiervoor de reële versie van de Fourier transformatie.

Voor de voortgezette functie $f_e(t)$ krijgen we

$$a(u) = \int_{-\infty}^\infty f_e(t)\cos(ut)\,dt = 2\int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$$

omdat $f(t)\cos(ut)$ een even functie is.

Definitie: De integraal

$$F_c(u) := \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt$$

heet de *Fourier cosinus transformatie* van $f(t)$. Er geldt:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(u)\cos(ut)\,dt \quad \text{met} \quad F_c(u) = \int_0^\infty f(t)\cos(ut)\,dt.$$

Net zo kunnen we $f(t)$ door $f(-t) := -f(t)$ tot een oneven functie $f_o(t)$ op de hele reële as voortzetten. Voor de voortgezette functie $f_o(t)$ krijgen we

$$b(u) = \int_{-\infty}^\infty f_o(t)\sin(ut)\,dt = 2\int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$$

omdat nu $f(t)\sin(ut)$ een even functie is.

Definitie: De integraal

$$F_s(u) := \int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt$$

heet de *Fourier sinus transformatie* van $f(t)$. Hiervoor geldt:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(u)\sin(ut)\,dt \quad \text{met} \quad F_s(u) = \int_0^\infty f(t)\sin(ut)\,dt.$$

8.4 Eigenschappen van de Fourier transformatie

De meeste eigenschappen van de Fourier transformatie volgen uit eigenschappen van de integraal. Het probleem is dat we het hier met oneindige integralen te maken hebben, waar soms dingen mis kunnen gaan. Omdat we ons hier niet met wiskundige details willen bemoeien, veronderstellen we nu dat het voor de functies waarin wij geïnteresseerd zijn nooit mis gaat en onderdrukken twijfels die bij sommige stappen misschien op komen dagen.

Bestaan

Omdat de Fourier getransformeerde middels een integratie over de hele reële as gedefinieerd is, moeten we wel een opmerking kwijt, wanneer de integraal überhaupt bestaat. Een integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ is namelijk gedefinieerd als de limiet $L \to \infty$ van $\int_{-L}^{L} f(x)\ dx$ en die limiet hoeft helemaal niet te bestaan. Voldoende voorwaarden waaronder de Fourier getransformeerde van $f(t)$ wel bestaat, zijn:

(i) $f(t)$ en $f'(t)$ zijn stuksgewijs continu op eindige intervallen;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ dt < \infty$.

Net als bij de stelling van Dirichlet over de Fourier reeksen is in het bijzonder (ii) geen noodzakelijke voorwaarde. Sommige functies waarvoor (ii) niet geldt zullen we zelfs in de volgende les bekijken, omdat ze bijzonder belangrijk zijn.

Fourier transformatie ↔ inverse Fourier transformatie

Als $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ de Fourier getransformeerde van $f(t)$ is, geldt $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iut}\ du$ en dus $f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{-iut}\ du$. Maar het laatste is tot op de factor $\frac{1}{2\pi}$ na de Fourier getransformeerde van $F(u)$, dus is

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[F(u)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]].$$

Er geldt dus

$$\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]] = 2\pi f(-t)$$

en als we dit vergelijken met de toepassing

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(t)]] = f(t)$$

van de inverse Fourier transformatie zien we, dat de inverse Fourier transformatie tot op een vermenigvuldiging met de factor 2π na hetzelfde is als de Fourier transformatie gecombineerd met *tijdsomkeer*. In het bijzonder zijn voor even functies $f(t)$ Fourier transformatie en inverse Fourier transformatie tot op de factor 2π na hetzelfde.

Lineariteit

Uit de lineariteit van de integraal volgt meteen de lineariteit van de Fourier transformatie, want voor twee functies $f(t)$ en $g(t)$ is $\int_{-\infty}^{\infty}(f(t)+g(t))e^{-iut}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-iut}\,dt$. Net zo geldt voor de vermenigvuldiging met een factor c dat $\int_{-\infty}^{\infty} c\cdot f(t)e^{-iut}\,dt = c\cdot\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt$. Dit geeft

$$\mathcal{F}[f(t)+g(t)] = \mathcal{F}[f(t)] + \mathcal{F}[g(t)] \quad \text{en} \quad \mathcal{F}[c\cdot f(t)] = c\cdot\mathcal{F}[f(t)]$$

dat wil zeggen de Fourier transformatie is een lineaire afbeelding van functies.

Verschuiving

Als we de Fourier transformatie van een functie $f(t)$ hebben berekend is het handig als we hieruit de Fourier transformatie van een verschuiving van $f(t)$ langs de reële as af kunnen leiden. Als we bijvoorbeeld de Fourier transformatie van een rechthoek impuls rond $t = 0$ kennen, willen we hieruit graag de Fourier transformatie van een rechthoek impuls rond een tijdstip t_0 kunnen berekenen. Hiervoor moeten we de Fourier transformatie van de functie

$$g(t) := f(t - t_0)$$

berekenen. Als we de Fourier getransformeerden van $g(t)$ en $f(t)$ met $G(u) := \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[f(t-t_0)]$ en $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ noteren, vinden we:

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-iut}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-iu(t-t_0)}e^{-iut_0}\,dt \\ &= e^{-iut_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iu\tau}\,d\tau = e^{-iut_0}F(u) \end{aligned}$$

waarbij we in de stap van de eerste naar de tweede rij de substitutie $\tau := t - t_0$, $d\tau = dt$ hebben toegepast. Voor een om t_0 langs de reële as verschoven functie geldt dus

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-iut_0}\mathcal{F}[f(t)].$$

Dit betekent dat we alleen maar de fase van de Fourier getransformeerde veranderen, maar niet de amplitude $|\mathcal{F}[f(t-t_0)]|$, omdat e^{-iut_0} een getal op de eenheidscirkel is. Een verschuiving in het tijdsdomein resulteert dus in een fase-verschuiving in het frequentiedomein.

Schaling

Naast een *verschuiving* in het tijdsdomein is ook een *schaling* van de tijd een eenvoudige maar belangrijke transformatie die we vaak tegen komen. Zij $g(t) := f(at)$ en noteer de Fourier getransformeerden met $G(u) := \mathcal{F}[g(t)] = \mathcal{F}[f(at)]$ en $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$. We veronderstellen eerst dat $a > 0$, dan krijgen we met de substitutie $\tau = at$, $d\tau = a\,dt$ (dus $dt = \frac{1}{a}\,d\tau$):

$$G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-iut}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\frac{u}{a}\tau}\frac{1}{a}\,d\tau = \frac{1}{a}F(\frac{u}{a}).$$

Als $a < 0$ werkt de substitutie hetzelfde, maar als t van $-\infty$ naar ∞ loopt, loopt in dit geval $\tau = at$ van ∞ naar $-\infty$. We moeten dus de grenzen van de integratie omdraaien en daarom het resultaat met -1 vermenigvuldigen, dus krijgen we in dit geval $G(u) = -\frac{1}{a}F(\frac{u}{a})$. Als we de twee gevallen combineren, volgt hieruit

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(u) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F(\frac{u}{a}).$$

Dit betekent dat een schaling in het tijdsdomein correspondeert met de inverse schaling in het frequentiedomein, dus een rekking wordt een compressie en andersom.

Afgeleiden

We kunnen ons afvragen, of er een eenvoudige manier is om van de Fourier getransformeerde van een functie $f(t)$ naar de Fourier getransformeerde van de afgeleide $f'(t)$ te komen. Laten $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ en $G(u) := \mathcal{F}[f'(t)]$ de Fourier getransformeerden van $f(t)$ en $f'(t)$ zijn, dan geldt met partiële integratie

$$\begin{aligned} G(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iut}\,dt = f(t)e^{-iut}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-iu)e^{-iut}\,dt \\ &= f(t)e^{-iut}\Big|_{-\infty}^{\infty} + iuF(u). \end{aligned}$$

Als we nu veronderstellen dat $f(t) \to 0$ voor $t \to \pm\infty$, valt de eerste term weg en er geldt

$$\mathcal{F}[f'(t)] = iu\mathcal{F}[f(t)].$$

Ook over de afgeleide van de Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ in het frequentiedomein kunnen we iets zeggen. Er geldt $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt$ en als we dit naar u gaan afleiden, mogen we de differentiatie onder zekere voorwaarden (die we hier als gegeven veronderstellen) met de integratie verruilen.

> Denk hierbij aan de integraal als een oneindige som: Ook voor functies die door een oneindige reeks gegeven zijn, hadden we gezien dat we de afgeleide krijgen door de reeks termsgewijs af te leiden.

We hebben dus

$$F'(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-iut})'\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-iut}\,dt = -i\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)e^{-iut}\,dt$$

en de laatste integraal is de Fourier getransformeerde van $tf(t)$. Er geldt dus

$$\mathcal{F}[f(t)]' = F'(u) = -i\mathcal{F}[tf(t)],$$

waarbij we veronderstellen dat de functie $tf(t)$ een Fourier getransformeerde *heeft*, dus dat in het bijzonder de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} tf(t)\,dt$ bestaat.

8.5 Het convolutieproduct

De meest belangrijke operatie bij Fourier transformaties is de vermenigvuldiging van de getransformeerde functies in het frequentiedomein. Het idee hierbij is, bepaalde frequentie intervallen te versterken of af te zwakken door de Fourier getransformeerde met een functie te vermenigvuldigen die voor deze frequenties een grote of kleine waarde heeft. We zullen hier in de volgende les concrete voorbeelden van zien.

Laten $f(t)$ en $g(t)$ twee functies in het tijdsdomein zijn met Fourier getransformeerden $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$ en $\mathcal{F}[g(t)] = G(u)$. Dan is

$$\begin{aligned} F(u) \cdot G(u) &= (\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iu\tau}\,d\tau) \cdot (\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau')e^{-iu\tau'}\,d\tau') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-iu\tau}\,d\tau\right) g(\tau')e^{-iu\tau'}\,d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(\tau')e^{-iu(\tau+\tau')}\,d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

Als de lezer twijfels heeft over de manier hoe de integralen gemanipuleerd worden, is het verstandig om de integralen als oneindige sommen te interpreteren. Hiervoor zijn de omvormingen redelijk voor de hand liggend.

We substitueren nu $t = \tau + \tau'$, dan is $\tau' = t - \tau$ en $d\tau' = dt$. Dit geeft

$$\begin{aligned} F(u) \cdot G(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)e^{-iut}\,d\tau\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau\right) e^{-iut}dt. \end{aligned}$$

We zien dat het resultaat ook weer de Fourier getransformeerde van een functie is, namelijk van de functie

$$h(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

die door de binnenste integraal gegeven is.

Definitie: De functie

$$h(t) := f(t) * g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

heet het *convolutieproduct*, de *convolutie* of de *vouwing* van $f(t)$ en $g(t)$ en wordt genoteerd met een sterretje voor het product.

De cruciale eigenschap van het convolutieproduct $f(t) * g(t)$ is dat hij het gewone product $F(u) \cdot G(u)$ als Fourier getransformeerde heeft, dus dat

$$\mathcal{F}[f(t) * g(t)] = \mathcal{F}[f(t)] \cdot \mathcal{F}[g(t)].$$

Merk op: Het puntsgewijs product $F(u) \cdot G(u)$ van twee functies in het frequentiedomein correspondeert via de Fourier transformatie met het convolutieproduct $\mathcal{F}^{-1}[F(u)] * \mathcal{F}^{-1}[G(u)]$ van de inverse Fourier getransformeerden in het tijdsdomein. Deze samenhang is in feite de hoofdreden om überhaupt naar een zo rare constructie als het convolutieproduct te kijken.

De constructie van het convolutieproduct zal iets minder raar lijken, als we inzien dat het analoog met het product van twee machtreeksen gevormd is. Als we namelijk de twee machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ vermenigvuldigen, krijgen we (door expliciet uitwerken) een reeks $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, waarbij de coëfficiënt c_n gegeven is door $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. We nemen dus voor c_n de som over alle producten van coëfficiënten a_i en b_j waarvoor de som van de indices i en j juist n geeft.

Om de analogie met het convolutieproduct te vinden, moeten we een functiewaarde $f(t)$ interpreteren als de 'coëfficiënt' van een 'reeks' f voor de 'index' t. Het verschil is dat de index niet meer over de discrete waarden $0, 1, 2, \ldots$ loopt, maar over alle reële waarden. Maar dit is juist de overgang die we bij het overstappen van periodieke functies met periode L naar niet-periodieke functies met periode $L = \infty$ hebben genomen.

In analogie met de reeksen vinden we nu de 'coëfficiënt' $h(t)$ als 'som' over alle producten $f(\tau) \cdot g(\tau')$ waarvoor de som $\tau + \tau'$ van de 'indices' gelijk aan t is, dus waarvoor $\tau' = t - \tau$ geldt. Maar omdat de indices continu zijn, is deze som natuurlijk een integraal, namelijk juist de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$.

Belangrijke begrippen in deze les

- Fourier reeksen voor periodieke functies met willekeurige periode
- Fourier integraal identiteit
- Fourier transformatie, inverse Fourier transformatie
- amplitude spectrum, fase spectrum
- Fourier cosinus transformatie, Fourier sinus transformatie
- eigenschappen van de Fourier transformatie
- convolutieproduct

Opgaven

68. Zij $f(t)$ een functie met Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$.

    (i) Toon aan dat $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-u)$. Dit betekent dat een spiegeling in het tijdsdomein ook een spiegeling in het frequentiedomein tot gevolg heeft.

    (ii) Neem nu aan dat $f(t)$ een *reële* functie is. Laat zien dat $F(-u) = \overline{F(u)}$.

69. Toon aan dat voor $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ een verschuiving in het frequentiedomein gegeven is door de formule $F(u - u_0) = \mathcal{F}[f(t)e^{iu_0t}]$.

70. Zij $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ de Fourier getransformeerde van $f(t)$. Bepaal de Fourier getransformeerde van $f(t)\cos(\omega t)$. (De functie $f(t)\cos(\omega t)$ noemt men een *modulatie*.)

71. Ga na dat het convolutieproduct *commutatief* is, d.w.z. dat $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$.

72. We hebben gezien dat voor de Fourier getransformeerden $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ en $G(u) = \mathcal{F}[g(t)]$ geldt, dat $F(u) \cdot G(u) = \mathcal{F}[f(t) * g(t)]$.

    (i) Laat zien dat omgekeerd geldt dat

    $$\mathcal{F}^{-1}[F(u) * G(u)] = 2\pi f(t) \cdot g(t) \text{ en dus } \mathcal{F}[f(t) \cdot g(t)] = \frac{1}{2\pi} F(u) * G(u).$$

    (ii) Bewijs hiermee dat

    $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot G(-u)\, du.$$

    Hint: Bekijk $\mathcal{F}[f(t) \cdot g(t)] = \frac{1}{2\pi} F(u) * G(u)$ voor het speciale geval $u = 0$.

    (iii) Concludeer dat voor een *reële* functie $f(t)$ geldt dat

    $$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2\, du.$$

    Deze relatie heet de *Parseval identiteit*.

Les 9 Voorbeelden en toepassingen van de Fourier transformatie

We hebben in de vorige les de theorie van de Fourier transformatie behandeld en een aantal eigenschappen van de Fourier transformatie bekeken. Tot nog toe is de Fourier transformatie echter een abstracte procedure die aan een functie in het tijdsdomein een functie in het frequentiedomein toewijst. Om enigszins begrip van de Fourier transformatie te krijgen, zullen we in deze les de Fourier getransformeerden van een aantal belangrijke functies expliciet berekenen.

Verder leren we een nieuwe *functie* kennen, die geen functie van de gebruikelijke soort is, namelijk de *Dirac δ-functie*. Deze functie is overal nul, behalve in een enkele punt, waar ze zo groot is (oneindig) dat de integraal over de hele reële as niet de waarde 0 maar 1 geeft. We zullen zien dat deze rare functie in het kader van de Fourier transformatie heel nuttig is.

Ten slotte gaan we in deze les als toepassing van de Fourier transformatie bekijken, hoe high-pass en low-pass filters werken, die de contrasten van een plaatje of geluid aanscherpen of verzachten.

9.1 Belangrijke voorbeelden

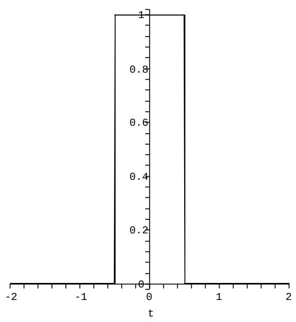
We zullen voor een aantal elementaire functies de Fourier transformaties bepalen. Met behulp van verschuiven, schalen en het optellen van functies laten zich uit deze functies natuurlijk ingewikkeldere functies opbouwen.

Rechthoek impuls

We hebben in de vorige les al de Fourier getransformeerde voor een rechthoek impuls $f(t)$ van sterkte 1 tussen de tijden $-a$ en a bepaald, dus voor de functie

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

(zie Figuur II.11).



Figuur II.11: Rechthoek impuls tussen $t = -\frac{1}{2}$ en $t = \frac{1}{2}$.

We hadden toen gezien dat de Fourier getransformeerde $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ gegeven is door

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\, dt = 2\,\frac{\sin(au)}{u}.$$

Om de Fourier getransformeerden voor verschillende breedten van de impuls goed te kunnen vergelijken, is het handig de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ dt$ op 1 te normeren. Hiervoor moeten we naar een impuls van sterkte $\frac{1}{2a}$ in plaats van 1 kijken.

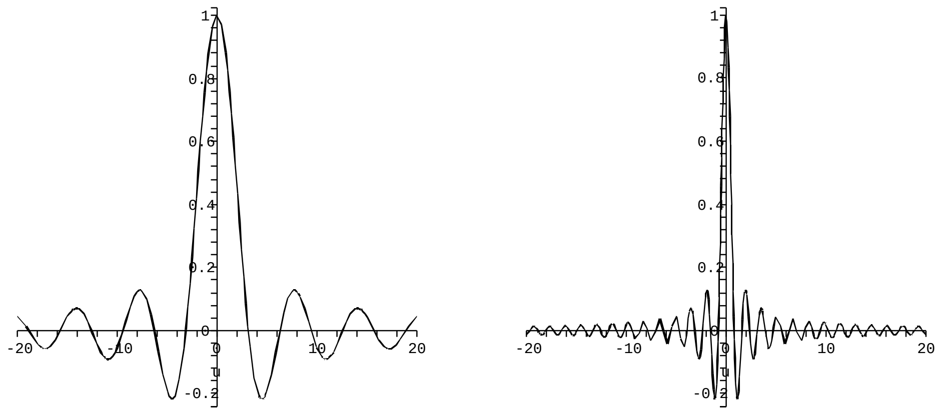
Omdat de Fourier transformatie een lineaire afbeelding is, hoeven we nu niet opnieuw te rekenen, we moeten het resultaat alleen maar met $\frac{1}{2a}$ vermenigvuldigen. De functie $g(t)$ met

$$g(t) := \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{als } |t| \le a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

heeft dus de Fourier getransformeerde

$$G(u) = \mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{2a} \cdot 2\frac{\sin(au)}{u} = \frac{\sin(au)}{au}.$$

We zien dat de parameter a van de rechthoek impuls bij de Fourier getransformeerde de rol van een schaling van de u-as speelt: Als we a verdubbelen, moeten we de u-as met een factor 2 samen schuiven. Dit betekent in het bijzonder dat voor een grotere waarde van a, dus een langere impuls, de Fourier getransformeerde met stijgende frequenties sneller afneemt als voor en kleinere waarde van a. Dit zouden we ook zo verwachten, want een korte impuls geeft een snelle verandering en heeft dus met hogere frequenties te maken.



Figuur II.12: Fourier getransformeerden van genormeerde rechthoek impulsen met $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

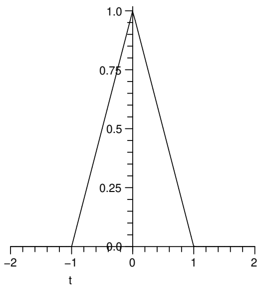
In Figuur II.12 zijn de Fourier getransformeerden van genormeerde rechthoek impulsen voor $a = 1$ en $a = 4$ te zien. Zo als verwacht neemt de getransformeerde van de langere impuls met $a = 4$ duidelijk sneller af dan de getransformeerde van de kortere impuls met $a = 1$.

Driehoek impuls

Zij $f(t)$ een driehoek impuls die tussen de tijden $-a$ en 0 lineair van 0 tot 1 groeit en tussen 0 en a weer lineair naar 0 daalt, dus

$$f(t) := \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a} & \text{als } |t| \le a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

(zie Figuur II.13).



Figuur II.13: Driehoek impuls tussen $t = -1$ en $t = 1$.

De Fourier getransformeerde $F(u)$ van $f(t)$ is

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\,dt = \int_{-a}^{0}(1+\frac{t}{a})e^{-iut}\,dt + \int_{0}^{a}(1-\frac{t}{a})e^{-iut}\,dt.$$

Dit lossen we met partiële integratie op, de primitieve van e^{-iut} is $\frac{1}{-iu}e^{-iut}$ en de afgeleide van $1 \pm \frac{t}{a}$ is $\pm\frac{1}{a}$. Voor de eerste integraal volgt hieruit

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{0}(1+\frac{t}{a})e^{-iut}\,dt &= (1+\frac{t}{a})\frac{1}{-iu}e^{-iut}|_{-a}^{0} - \int_{-a}^{0}\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{-iu}e^{-iut}\,dt \\
&= -\frac{1}{iu} - 0 + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{iu}\int_{-a}^{0}e^{-iut}\,dt = -\frac{1}{iu} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(iu)^2}e^{-iut}|_{-a}^{0} \\
&= -\frac{1}{iu} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u^2} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u^2}e^{iua}
\end{aligned}$$

Net zo krijgen we voor de tweede integraal

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{a}(1-\frac{t}{a})e^{-iut}\,dt &= (1-\frac{t}{a})\frac{1}{-iu}e^{-iut}|_{0}^{a} - \int_{0}^{a}-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{-iu}e^{-iut}\,dt \\
&= 0 + \frac{1}{iu} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{iu}\int_{0}^{a}e^{-iut}\,dt = \frac{1}{iu} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{(iu)^2}e^{-iut}|_{0}^{a} \\
&= \frac{1}{iu} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u^2}e^{-iua} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u^2}
\end{aligned}$$

Als we de twee integralen bij elkaar optellen, krijgen we dus

$$\begin{aligned}
F(u) &= -\frac{1}{iu} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u^2} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u^2}e^{iua} + \frac{1}{iu} - \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u^2}e^{-iua} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{u^2} \\
&= \frac{1}{au^2}(2 - e^{iua} - e^{-iua}).
\end{aligned}$$

Met een klein trucje kunnen we dit nog iets eenvoudiger schrijven, er geldt namelijk

$$(e^{iu\frac{a}{2}} - e^{-iu\frac{a}{2}})^2 = e^{iua} - 2 + e^{-iua} = -(2 - e^{iua} - e^{-iua})$$

Hieruit volgt

$$\sin^2(\frac{a}{2}u) = (\frac{e^{iu\frac{a}{2}} - e^{-iu\frac{a}{2}}}{2i})^2 = -\frac{1}{4}(e^{iu\frac{a}{2}} - e^{-iu\frac{a}{2}})^2 = \frac{1}{4}(2 - e^{iua} - e^{-iua})$$

en als we dit in de gevonden formule van $F(u)$ invullen, krijgen we uiteindelijk:

$$F(u) = \frac{4}{au^2} \cdot \sin^2(\frac{a}{2}u) = \frac{a}{(\frac{a}{2}u)^2} \cdot \sin^2(\frac{a}{2}u) = a \cdot \left(\frac{\sin(\frac{a}{2}u)}{\frac{a}{2}u}\right)^2.$$

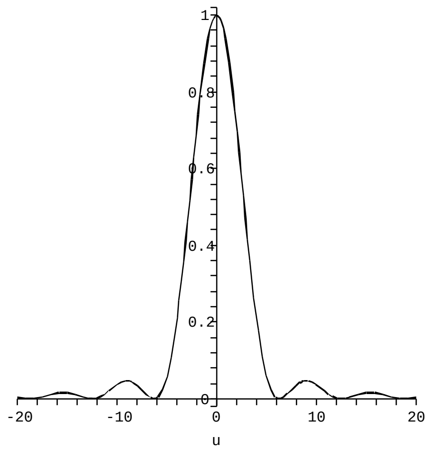
Als we ook bij deze functie de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ op 1 normeren, moeten we $f(t)$ met $\frac{1}{a}$ vermenigvuldigen, dit geeft de functie

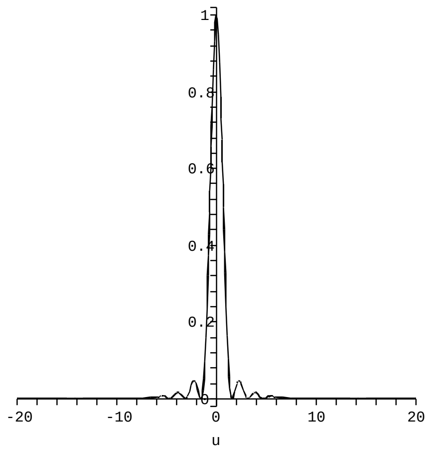
$$g(t) := \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{|t|}{a^2} & \text{als } |t| \leq a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

Deze functie $g(t)$ heeft als Fourier getransformeerde

$$\mathcal{F}[g(t)] = \left(\frac{\sin(\frac{a}{2}u)}{\frac{a}{2}u}\right)^2$$

dus speelt ook hier de parameter a de rol van een schaling van de u-as.



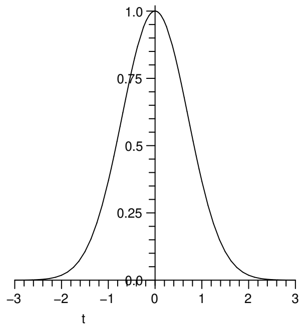


Figuur II.14: Fourier getransformeerden van driehoek impulsen met $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Ook de plaatjes van de Fourier getransformeerden van de driehoek impuls in Figuur II.14 laten duidelijk zien dat bij de kortere impuls voor $a = 1$ de hogere frequenties een grotere rol spelen dan bij de impuls voor $a = 4$.

Gauss functie

Een belangrijke rol bij de Fourier transformaties speelt de Gauss functie $f(t) := e^{-at^2}$ (zie Figuur II.15), die we in verband met de normale verdeling ook in de kansrekening en statistiek tegen komen. De opmerkelijke eigenschap van deze functie ten opzichte van de Fourier transformatie is, dat de Fourier getransformeerde weer een functie van dezelfde soort is.



Figuur II.15: Gauss functie e^{-t^2}.

Om dit na te gaan, hebben we de integraal van $-\infty$ tot ∞ van de Gauss functie nodig, die we in het kader van de integratie van functies van meerdere veranderlijken hebben bepaald:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{en dus} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

waarbij de tweede integraal met behulp van de substitutie $\sqrt{a}\cdot t = x$, $\sqrt{a}\,dt = dx$ uit de eerste volgt.

Voor de Gauss functie $f(t) := e^{-at^2}$ met $a > 0$ geldt voor de Fourier getransformeerde $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\cdot e^{-iut}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t^2+i\frac{u}{a}t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+i\frac{u}{2a})^2}\cdot e^{a(i\frac{u}{2a})^2}\,dt \\ &= e^{-\frac{u^2}{4a}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(t+i\frac{u}{2a})^2}\,dt = e^{-\frac{u^2}{4a}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau^2}\,d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{u^2}{4a}} \end{aligned}$$

waarbij we in de voorlaatste stap de substitutie $\tau = t + i\frac{u}{2a}$, $d\tau = dt$ toepassen. We hebben dus ingezien:

Stelling: De Fourier getransformeerde van een Gauss functie is ook weer een Gauss functie, er geldt:

$$\mathcal{F}[e^{-at^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{-\frac{u^2}{4a}}.$$

De dichtheidsfunctie van een normale verdeling met verwachtingswaarde 0 en standaardafwijking σ is de Gauss functie

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}},$$

dus moeten we $a = \frac{1}{2\sigma^2}$ in ons resultaat invullen. Dit geeft $\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{2\pi}\,\sigma$ en $\frac{u^2}{4a} = \frac{\sigma^2 u^2}{2} = \frac{u^2}{2\sigma^{-2}}$, dus geldt:

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \quad \Rightarrow \quad F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \sqrt{2\pi}\,\sigma \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^{-2}}}.$$

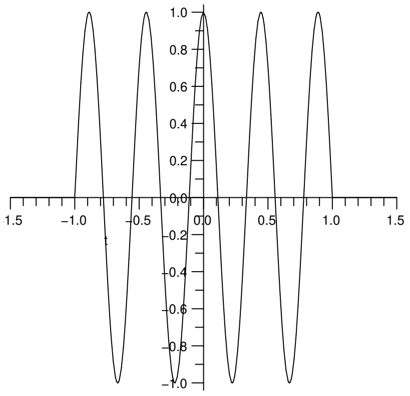
De Fourier getransformeerde van een normale verdeling met standaardafwijking σ is dus een normale verdeling met standaardafwijking $\sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma}$. In het bijzonder is de Fourier getransformeerde van een standaard-normale verdeling (met standaardafwijking 1) zelf ook een standaard-normale verdeling.

Eindige cosinus golf

We kijken naar een cosinus functie op het eindige interval $[-a, a]$, dus

$$f(t) := \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{als } |t| \le a \\ 0 & \text{als } |t| > a \end{cases}$$

zo als in Figuur II.16 afgebeeld.

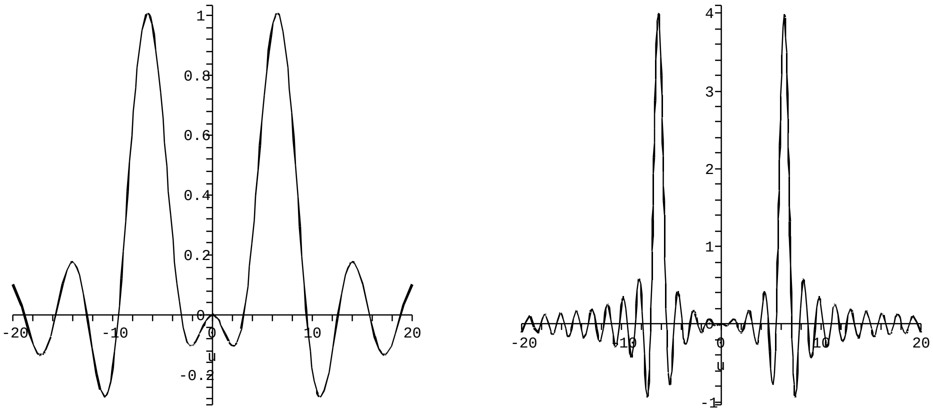


Figuur II.16: Eindige cosinus golf tussen $t = -1$ en $t = 1$.

De Fourier getransformeerde is

$$\begin{aligned}
F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, dt = \int_{-a}^{a} \cos(\omega t) e^{-iut}\, dt = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) e^{-iut}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} e^{-i(u-\omega)t}\, dt + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} e^{-i(u+\omega)t}\, dt \\
&= \frac{1}{-2i(u-\omega)} e^{-i(u-\omega)t}\Big|_{-a}^{a} + \frac{1}{-2i(u+\omega)} e^{-i(u+\omega)t}\Big|_{-a}^{a} \\
&= -\frac{1}{u-\omega} \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{-i(u-\omega)a} - e^{i(u-\omega)a}\right) - \frac{1}{u+\omega} \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{-i(u+\omega)a} - e^{i(u+\omega)a}\right) \\
&= \frac{\sin(a(u-\omega))}{u-\omega} + \frac{\sin(a(u+\omega))}{u+\omega}
\end{aligned}$$

Als we dit resultaat met de Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls vergelijken, zien we dat de Fourier getransformeerde van een eindige cosinus golf de som van twee Fourier getransformeerden van rechthoek impulsen is, waarvan één om ω naar rechts en de andere om ω naar links verschoven is.



Figuur II.17: Fourier getransformeerden van eindige cosinus golven met frequentie $\omega = 2\pi$ op het interval $[-a, a]$ voor $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Dit is in feite niet erg moeilijk om in te zien:

Net zo als een verschuiving om t_0 in het tijdsdomein met een vermenigvuldiging van de Fourier getransformeerde met e^{iut_0} in het frequentiedomein correspondeert, correspondeert een verschuiving van een Fourier getransformeerde om ω in het frequentiedomein met een vermenigvuldiging met $e^{i\omega t}$ in het tijdsdomein. Maar als we een rechthoek impuls met $e^{i\omega t}$ vermenigvuldigen, krijgen we de functie $e^{i\omega t}$ op een eindig interval, en door één keer om ω en één keer om $-\omega$ te verschuiven, krijgen we $e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} = 2\cos(\omega t)$ op een eindig interval, en dit is (tot op de factor 2 na) precies waarmee we zijn begonnen.

Exponentiële daling

Een exponentiële daling wordt door de functie

$$f(t) := \begin{cases} e^{-at} & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases} \qquad \text{met } a > 0$$

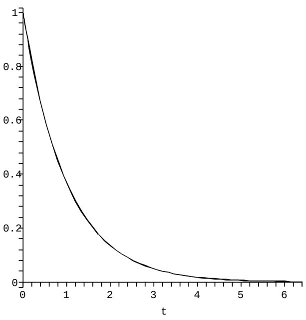
beschreven (zie Figuur II.18). Hierbij is de daling om zo sneller hoe groter de parameter a is.

De Fourier getransformeerde van deze functie $f(t)$ berekenen we als volgt:

$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iut}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-iut}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(iu+a)t}\, dt \\ &= -\frac{1}{iu+a} e^{-(iu+a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{iu+a} = \frac{a-iu}{u^2+a^2} = \frac{a}{u^2+a^2} - i\frac{u}{u^2+a^2} \end{aligned}$$

want voor $t \to \infty$ gaat $e^{-at} \to 0$ en dus ook $e^{-(iu+a)t} = e^{-iut}e^{-at} \to 0$.

Om ook in dit geval verschillende parameters a goed te kunnen vergelijken, normeren we $\int_0^\infty f(t)\, dt$ weer op 1, hiervoor moeten we e^{-at} met a vermenig-



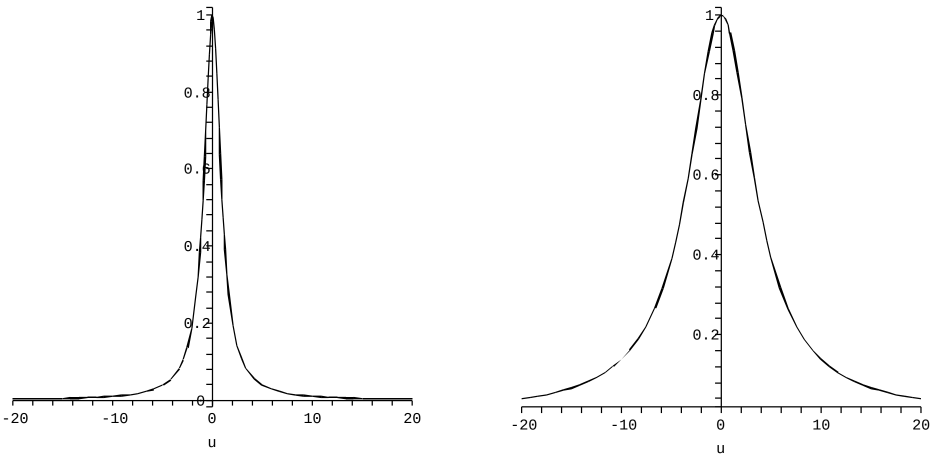
Figuur II.18: Exponentiële daling.

vuldigen, want $\int_0^\infty e^{-at}\,dt = \frac{-1}{a}e^{-at}\Big|_0^\infty = \frac{1}{a}$. De functie

$$g(t) := \begin{cases} ae^{-at} & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases}$$

heeft de Fourier getransformeerde

$$G(u) := \mathcal{F}[g(t)] = \frac{a^2 - iau}{a^2 + u^2} \text{ met reëel deel } \Re(G(u)) = \frac{a^2}{a^2 + u^2}.$$



Figuur II.19: Reëel deel van de Fourier getransformeerden voor een exponentiële daling met $a = 1$ (links) en $a = 4$ (rechts).

Ook hier is in de plaatjes van Figuur II.19 duidelijk te zien dat de snellere daling voor $a = 4$ een grotere bijdrage van hoge frequenties tot gevolg heeft.

Omdat we het hier eigenlijk met een functie te maken hebben, die alleen maar voor positieve tijden gedefinieerd is, is dit een typisch geval om de Fourier cosinus transformatie

$$F_c(u) = \int_0^\infty g(t)\cos(ut)\,dt$$

toe te passen. Hiervoor hebben we weer een partiële integratie nodig:

$$\int ae^{-at}\cos(ut)\,dt = ae^{-at}\frac{1}{u}\sin(ut) - \int(-a)ae^{-at}\frac{1}{u}\sin(ut)\,dt$$
$$= \frac{a}{u}e^{-at}\sin(ut) + \frac{a^2}{u}\int e^{-at}\sin(ut)\,dt$$
$$= \frac{a}{u}e^{-at}\sin(ut) + \frac{a^2}{u}\left(e^{-at}(-\frac{1}{u})\cos(ut) - \int(-a)e^{-at}(-\frac{1}{u})\cos(ut)\,dt\right)$$
$$= \frac{a}{u}e^{-at}\sin(ut) - \frac{a^2}{u^2}e^{-at}\cos(ut) - \frac{a^2}{u^2}\int ae^{-at}\cos(ut)\,dt$$

Met $1 + \frac{a^2}{u^2} = \frac{u^2+a^2}{u^2}$ volgt hieruit

$$F_c(u) = \int_0^\infty ae^{-at}\cos(ut)\,dt = \frac{u^2}{a^2+u^2}\left(\frac{a}{u}e^{-at}\sin(ut) - \frac{a^2}{u^2}e^{-at}\cos(ut)\right)\Big|_0^\infty$$
$$= \frac{1}{a^2+u^2}\left(uae^{-at}\sin(ut) - a^2e^{-at}\cos(ut)\right)\Big|_0^\infty = \frac{a^2}{a^2+u^2}$$

want voor $t \to \infty$ gaat $uae^{-at}\sin(ut) - a^2e^{-at}\cos(ut) \to 0$.

De Fourier cosinus transformatie levert dus inderdaad het reële deel van de complexe Fourier transformatie op, maar eist wel behoorlijk meer rekenwerk.

9.2 De Dirac δ-functie

Een kunstmatige maar uiterst belangrijke en nuttige functie is de *Dirac δ-functie* of *δ-impuls*. Deze functie is overal 0, behalve van een oneindige spits in het nulpunt en is gedefinieerd door de eigenschap dat de integraal van $-\infty$ tot ∞ de waarde 1 heeft. We kunnen dit zien als limiet van een rechthoek impuls op het interval $[-a, a]$ van sterkte $\frac{1}{2a}$, waarbij men $a \to 0$ laat gaan. Deze functie wordt aangegeven met $\delta(x)$. De wezenlijke eigenschappen van de δ-impuls zijn:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx = 1 \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0).$$

De tweede eigenschap gaat men na door de δ-functie door een rechthoek impuls van breedte $2a$ te benaderen en hiervan de limiet $a \to 0$ te bekijken: Een rechthoek impuls van breedte $2a$ rond een punt x_0 is gegeven door de functie

$$r_a(x) := \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{als } x \in [x_0 - a, x_0 + a] \\ 0 & \text{als } x \notin [x_0 - a, x_0 + a] \end{cases}$$

We veronderstellen nu dat we een primitieve van $f(x)$ kennen, dus een functie $F(x)$ met $F'(x) = f(x)$. Er geldt nu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)r_a(x)\,dx = \int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)\frac{1}{2a}\,dx = \frac{1}{2a}F(x)\Big|_{x_0-a}^{x_0+a} = \frac{F(x_0+a) - F(x_0-a)}{2a}$$

Maar de laatste quotiënt is juist de differentiaalquotiënt waardoor de afgeleide van $F(x)$ in het punt $x_0 - a$ gedefinieerd is, dus gaat deze quotiënt voor $a \to 0$ naar $F'(x_0 - a) = F'(x_0) = f(x_0)$.

Een cruciaal gevolg uit de eigenschap $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$ van de δ-functie is dat het *convolutieproduct* van een functie $f(x)$ met de δ-functie $\delta(x)$ in het punt x_0 juist de waarde $f(x_0)$ oplevert: Omdat de δ-functie een even functie is, geldt $\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x)$ en dus is

$$f(x_0) * \delta(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x_0-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0).$$

Merk op: Het convolutieproduct van een functie $f(x)$ met de δ-functie $\delta(x)$ levert in het punt x_0 juist weer de waarde $f(x_0)$ op. Het nemen van het convolutieproduct met de δ-functie verandert dus de functie $f(x)$ niet.

> Het feit dat het convolutieproduct met de δ-functie de functie $f(x)$ niet verandert, betekent dat de δ-functie voor het convolutieproduct dezelfde rol speelt als de constante functie met waarde 1 voor het gewone (puntsgewijs) product $f(t) \cdot g(t)$ van functies.

Uit de eigenschappen van de δ-functie volgt meteen wat de Fourier getransformeerde $\mathcal{F}[\delta(t)]$ is, namelijk:

$$F(u) = \mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-iut}\,dt = e^{-iu\cdot 0} = 1.$$

Dit zegt dat de Fourier getransformeerde de constante functie **1** met waarde 1 voor alle u is (deze functie noteren we met een vet gedrukte **1**).

De inverse Fourier transformatie geeft nu een alternatieve schrijfwijze voor de δ-functie, namelijk

$$\delta(t) = \mathcal{F}^{-1}[\mathbf{1}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{iut}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\,du.$$

Voor de δ-functie $\delta(t-t_0)$ met spits in t_0 vinden we met de formule voor een verschoven functie (of direct) dat

$$\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-iut_0}.$$

De samenhang $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(t)]] = 2\pi f(-t)$ tussen Fourier transformatie en inverse Fourier transformatie geeft nu ook de mogelijkheid om de Fourier transformatie van constante functies te berekenen. We hadden gezien dat $\mathcal{F}[\delta(t)] = \mathbf{1}$, en als we de variabel t tot u hernoemen, volgt hieruit:

$$\mathcal{F}[\mathbf{1}] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta(u)]] = 2\pi\,\delta(-u) = 2\pi\,\delta(u)$$

omdat de δ-functie met spits in $u = 0$ een even functie is.

Als we in de relatie $\mathcal{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-iut_0}$ voor de verschoven δ-functie de variabelen hernoemen tot $t \to u$, $t_0 \to -\omega$, $u \to t$ luidt deze $\mathcal{F}[\delta(u+\omega)] = e^{i\omega t}$ en met hetzelfde argument als boven volgt:

$$\mathcal{F}[e^{i\omega t}] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\delta(u+\omega)]] = 2\pi\,\delta(-u+\omega) = 2\pi\,\delta(u-\omega),$$

waarbij we weer uit symmetrie redenen weten dat $\delta(-u+\omega) = \delta(u-\omega)$.

Samenvattend geeft dit de twee paren van relaties:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(t)] &= \mathbf{1} \qquad & \mathcal{F}[\delta(t-t_0)] &= e^{-iut_0} \\ \mathcal{F}[\mathbf{1}] &= 2\pi\,\delta(u) \qquad & \mathcal{F}[e^{i\omega t}] &= 2\pi\,\delta(u-\omega). \end{aligned}$$

Met de gewone theorie van integralen is het eigenlijk onzin naar een integraal als $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\,du$ te kijken, want de limiet $L \to \infty$ van $\int_{-L}^{L} e^{iut}\,du$ bestaat niet. Om hier wel na te kunnen kijken, moeten we noodzakelijk een nieuwe functie met de eigenschappen van de δ-functie definiëren. Dit is een verder voorbeeld van een definitie die door de wiskundigen (en natuurkundigen) is verzonnen, om uit een doodlopende straat te ontsnappen.

We hadden gezegd dat we de δ-functie als limiet van een rechthoek impuls met oppervlakte 1 kunnen zien. Daarom zouden we kunnen verwachten, dat ook de net gevonden Fourier getransformeerde van de δ-functie interpreteerbaar is als limiet van de Fourier getransformeerden van de rechthoek impulsen.

De Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls van breedte $2a$ rond 0 was $F(u) = \frac{\sin(au)}{au}$. Deze functie heeft voor $u = 0$ de waarde 1 (want $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$) en de nulpunten zijn gegeven door $au = k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$, dus door $u = \frac{k\pi}{a}$. In het bijzonder ligt het kleinste positieve nulpunt bij $u = \frac{\pi}{a}$. Als we nu de limiet $a \to 0$ bekijken, betekent dit dat het eerste nulpunt naar oneindig gaat, dus de heuvel rond $u = 0$ wordt steeds breder en in de limiet wordt de heuvel helemaal plat en wordt de functie $F(u)$ de constante functie 1.

Omgekeerd laten we nu eens voor een rechthoek impuls van sterkte 1 en breedte $2a$ de parameter $a \to \infty$ lopen. Deze rechthoek impuls heeft de Fourier getransformeerde $F(u) = 2\frac{\sin(au)}{u} = 2a\frac{\sin(au)}{au}$. Voor $a \to \infty$ wordt de functie $\frac{\sin(au)}{au}$ en spits van hoogte 1 in het nulpunt, dus wordt $F(u)$ inderdaad een δ-functie. (Dat de constanten hierbij kloppen moet men met een integratie nagaan.)

We zien dus dat de definitie van de δ-functie als limiet van rechthoek impulsen ten opzichte van de Fourier transformatie de gewenste eigenschappen heeft.

Periodieke functies

Met behulp van de δ-functie kunnen we nu ook de Fourier transformaties van periodieke functies bepalen. Een periodieke functie $f(t)$ met periode L en grondfrequentie $\omega = \frac{2\pi}{L}$ kunnen we schrijven als Fourier reeks

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega k t}.$$

Uit de lineariteit van de Fourier transformatie en de resultaten voor de δ-functie volgt

$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}[e^{i\omega kt}] = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \delta(u - \omega k)$$

(waarbij we ons geen zorgen over de oneindige som maken). Dit betekent dat we een periodieke functie beschrijven door een som van δ-functies met spitsen op de veelvouden van de grondfrequentie en geschaald volgens de Fourier coëfficiënten. In feite is deze beschrijving van een periodieke functie niets anders dan de beschrijving door de Fourier reeks.

Als we nu nog eens terug kijken naar de Fourier transformaties van eindige cosinus golven in Figuur II.17, zien we dat de functie voor $a = 4$ al twee duidelijke spitsen heeft. Als we het interval $[-a, a]$ van de cosinus golf nu laten groeien, worden deze spitsen steeds geprononceerder en voor $a \to \infty$ krijgen we uiteindelijk de som van twee δ-functies met spitsen in ω en $-\omega$.

Sprongfunctie

Nu dat we de δ-functie kennen en de Fourier getransformeerde hiervan hebben bepaald, kunnen we ook naar functies met een sprong kijken. Het eenvoudigste voorbeeld hiervan is de *Heaviside functie* $H(t)$, gegeven door

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{als } t < 0 \\ 1 & \text{als } t \geq 0. \end{cases}$$

Omdat voor de Dirac δ-functie geldt dat $\int_{-\infty}^{t} \delta(x)\ dx = 0$ als $t < 0$ en $\int_{-\infty}^{t} \delta(x)\ dx = 1$ als $t > 0$, is $H(t)$ een primitieve van de δ-functie. Omgekeerd betekent dit dat $H'(t) = \delta(t)$. Dit is een verdere motivatie om een functie zo als de δ-functie te definiëren.

We hadden in de vorige les gezien dat $\mathcal{F}[f'(t)] = iu\mathcal{F}[f(t)]$, maar hierbij hadden we verondersteld dat $\lim f(t) = 0$ voor $t \to \pm\infty$ en dit is voor de Heaviside functie $H(t)$ zeker niet het geval. Als we de formule niettemin op $H(t)$ toepassen, krijgen we $\mathcal{F}[H(t)] = \frac{1}{iu}\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{iu}$. Maar we zien hier ook waar het probleem zit: Als we op de Heaviside functie een constante C optellen, is de afgeleide nog steeds $(H(t)+C)' = \delta(t)$, maar nu is $\mathcal{F}[H(t)+C] = \mathcal{F}[H(t)] + \mathcal{F}[C] = \mathcal{F}[H(t)] + C\delta(u)$. Het optellen van een constante leidt dus tot een verschil om een veelvoud van de δ-functie bij de Fourier getransformeerde.

Uit deze discussie volgt dat we hooguit kunnen verwachten dat $\mathcal{F}[H(t)]$ van de vorm $\mathcal{F}[H(t)] = \frac{1}{iu} + c\delta(u)$ is.

Dat dit inderdaad het geval is, kunnen we op een andere manier onderbouwen: We hebben eerder in deze les aangetoond dat de functie

$$f(t) := \begin{cases} e^{-at} & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases} \qquad \text{met } a > 0$$

de Fourier getransformeerde $\mathcal{F}[f(t)] = \frac{a}{u^2+a^2} - i\frac{u}{u^2+a^2}$ heeft. Maar in de limiet $a \to 0$ geeft $f(t)$ juist de Heaviside functie weer, want hoe kleiner a is, hoe langzamer neemt de functie af, en in de limiet $a \to 0$ neemt de functie helemaal niet meer af.

Als we nu voor $u \neq 0$ de limiet $a \to 0$ van $\mathcal{F}[f(t)]$ bepalen, krijgen we $\lim_{a\to 0} \mathcal{F}[f(t)] = \frac{0}{u^2} - i\frac{u}{u^2} = \frac{1}{iu}$ en dit klopt inderdaad met onze gok dat $\mathcal{F}[H(t)] = \frac{1}{iu} + c\delta(u)$.

We moeten dus alleen maar nog de waarde van $\mathcal{F}[H(t)]$ voor $u = 0$ bepalen. Dit doen we als volgt: Er geldt $H(t) + H(-t) = \mathbf{1}$ (behalve voor $t = 0$). Hieruit volgt dat

$$\mathcal{F}[H(t)] + \mathcal{F}[H(-t)] = \mathcal{F}[\mathbf{1}] = 2\pi\delta(u).$$

Maar voor $F(u) = \mathcal{F}[H(t)]$ geldt dat $\mathcal{F}[H(-t)] = F(-u)$, dus hebben we $F(u) + F(-u) = 2\pi\delta(u)$ en dus $F(0) = \pi\delta(u)$.

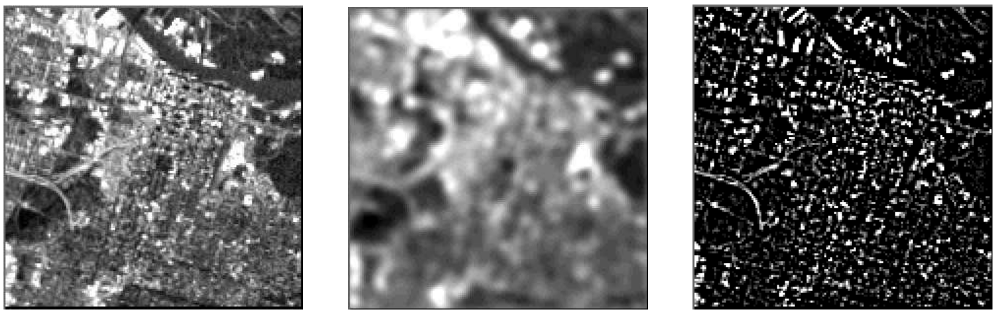
Bij elkaar genomen hebben we dus voor de sprong functie $H(t)$ aangetoond dat

$$\mathcal{F}[H(t)] = \pi\delta(u) + \frac{1}{iu}.$$

9.3 Toepassing: Filters

Het idee bij een filter is dat we zekere frequentieaandelen in een signaal willen versterken en andere onderdrukken. Dit gebeurt typisch door de Fourier getransformeerde met een geschikte functie te vermenigvuldigen en het resultaat met de inverse Fourier transformatie terug naar het tijdsdomein te transformeren:

Principe van een filter: Een functie $f(t)$ met $\mathcal{F}[f(t)] = F(u)$ wordt in het frequentiedomein met behulp van de filter functie $H(u)$ tot de nieuwe functie $G(u) = F(u) \cdot H(u)$ veranderd. Hieruit wordt met behulp van de inverse Fourier transformatie het *gefilterde signaal* $g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(u)] = f(t) * h(t)$ verkregen, waarbij $h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(u)]$ de inverse Fourier getransformeerde van $H(u)$ is.



Figuur II.20: Origineel, low-pass en high-pass gefilterd versie van een satelliet foto.

In Figuur II.20 is een voorbeeld van de toepassing van een low-pass en een high-pass filter op een satelliet opname te zien. Bij een low-pass filter worden de lage frequenties doorgelaten en de hoge onderdrukt en bij een high-pass filter is het omgekeerd, de lage frequenties worden onderdrukt en de hoge doorgelaten. Het effect is, dat met een low-pass filter het grove patroon van een signaal hetzelfde blijft, maar de scherpe contrasten tot een meer geleidelijke overgang verzacht worden. Omgekeerd benadrukt een high-pass filter alleen maar de scherpe contrasten, terwijl bijvoorbeeld de informatie over de intensiteit van het signaal verloren gaat. Zo is in het rechterplaatje niet meer te achterhalen of een gebied in het origineel licht of donker grijs is, maar wel heel duidelijk waar de grijstonen sterk veranderen.

Belangrijke typen en voorbeelden van filters zijn:

(1) Low pass filter: De lage frequenties corresponderen met de grove kenmerken over grotere gebieden. Een filter die deze frequenties benadrukt en hogere frequenties onderdrukt heet een *low-pass filter*. In de beeldverwerking zal zo'n filter een zachter beeld tot gevolg hebben, waarbij de scherpe contrasten afgezwakt zijn. In het bijzonder kunnen hierdoor kleine fouten (zo als een kleine spot op een plaatje of een korte *beep* in een muziekopname) onderdrukt worden.

(2) High pass filter: De hoge frequenties corresponderen met snelle veranderingen. Een filter die lage frequenties onderdrukt en hoge frequenties benadrukt heet *high-pass filter*. Bij de beeldverwerking worden hierdoor scherpe contrasten, zo als knikken benadrukt en hierdoor kan een beeld scherper lijken.

Figuur II.21: Origineel, low-pass en high-pass gefilterd versie van een eenvoudig plaatje.

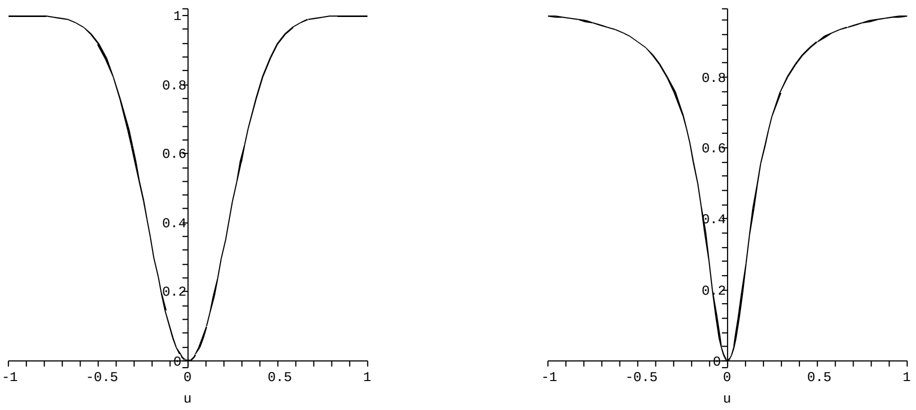
(3) Gauss filter: We hebben gezien dat een Gauss functie de mooie eigenschap heeft dat ook zijn Fourier getransformeerde weer een Gauss functie is. Dit maakt het omschakelen tussen tijd en frequentiedomein bijzonder eenvoudig.

Met $H(u) = A \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$ krijgt men een low-pass filter waarbij de parameter σ (de standaardafwijking) aangeeft, hoe breed de filter is, d.w.z. voor een grotere σ worden meer frequenties doorgelaten, terwijl een kleine σ bijna alle frequenties wegdraait.

Een Gauss high-pass filter krijgt men in het eenvoudigste geval als verschil van een constante functie en een Gauss low-pass filter, namelijk als

$H(u) = A(1 - e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}})$. Algemener neemt men vaak het verschil van twee Gauss functies met parameters σ en ρ: $H(u) = A \cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} - B \cdot e^{-\frac{u^2}{2\rho^2}}$.

(4) Notch filter: In het punt $u = 0$ geeft de Fourier getransformeerde het gemiddelde $F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt$ van de functie $f(t)$ aan. Door dit op 0 te zetten, wordt bijvoorbeeld de helderheid van plaatjes genormeerd. De hiervoor benodigde filter heeft in het frequentiedomein de functie $H(0) = 0$ en $H(u) = 1$ voor $u \neq 0$, maar deze functie is natuurlijk niet continu. Om wel met een continue functie te kunnen werken moeten we rond $u = 0$ een scherpe dip hebben. In principe kunnen we hiervoor een high-pass filter nemen, die alleen maar de frequenties heel dicht bij $u = 0$ onderdrukt. Een mogelijkheid hiervoor is een Gauss high-pass filter $H(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}$ met een kleine waarde van σ. Maar ook een functie zo als $H(u) = \frac{(au)^2}{1+(au)^2}$ met een grote waarde van a is geschikt.



Figuur II.22: Notch filters: links Gauss high-pass filter, rechts high-pass filter met functie $\frac{(au)^2}{1+(au)^2}$.

Voorbeeld: Rechthoek impuls

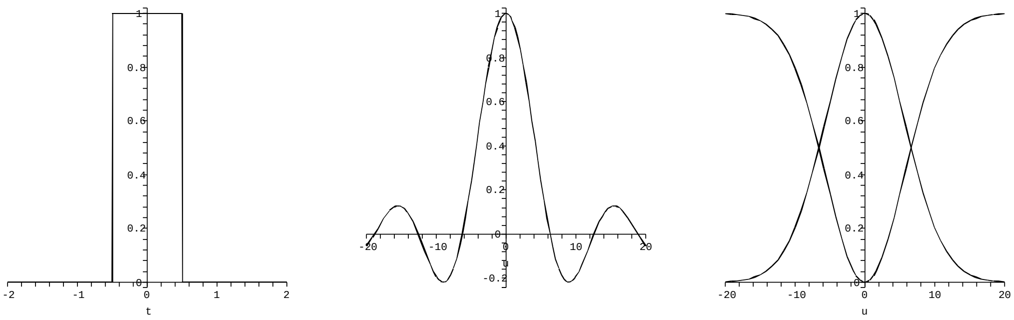
We kijken naar een rechthoek impuls $f(t)$ van breedte 1 en sterkte 1. Voor deze functie hebben we in de vorige les al de Fourier getransformeerde bepaald, namelijk

$$F(u) = \frac{\sin(\frac{1}{2}u)}{\frac{1}{2}u}.$$

De kleinste positieve nulpunt van $F(u)$ is 2π, zo als ook in het middelste plaatje van Figuur II.23 te zien is.

We gaan nu een Gauss low-pass en high-pass filter op dit signaal toepassen en kiezen hiervoor (enigszins willekeurig) de filter functie

$$H_l(u) = e^{-\frac{u^2}{20\pi}}.$$



Figuur II.23: Rechthoek impuls, Fourier getransformeerde en Gauss low-pass en high-pass filters

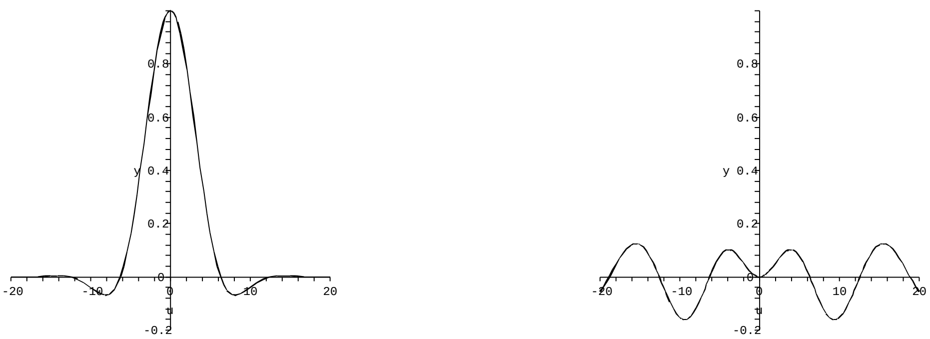
De breedte van de Gauss functie $H_l(u)$ is zo gekozen, dat bij het minimum van $F(u)$ op $u = 3\pi$ de filter functie ongeveer bij 0.5 zit.

Als high-pass filter kiezen we

$$H_h(u) = 1 - H_l(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{20\pi}}.$$

De twee filter functies zijn in het rechterplaatje van Figuur II.23 te zien.

Zo als gezegd is het idee bij een filter dat we zekere frequenties onderdrukken en andere gewoon doorlaten, hiervoor vermenigvuldigen we de Fourier getransformeerde van het signaal met de filter functie. Voor de low-pass filter krijgen we zo de functie $G_l(u) = F(u) \cdot H_l(u)$ en voor de high-pass filter $G_h(u) = F(u) \cdot H_h(u)$. De functies $G_l(u)$ en $G_h(u)$ zijn in Figuur II.24 te zien en het is duidelijk hoe de low-pass filter de heuvels in de Fourier getransformeerde $F(u)$ onderdrukt, behalve van de hoofdspits in $u = 0$. Omgekeerd verdwijnt bij de high-pass filter deze hoofdspits helemaal, terwijl de andere maxima en minima voor hogere frequenties duidelijk zichtbaar blijven.



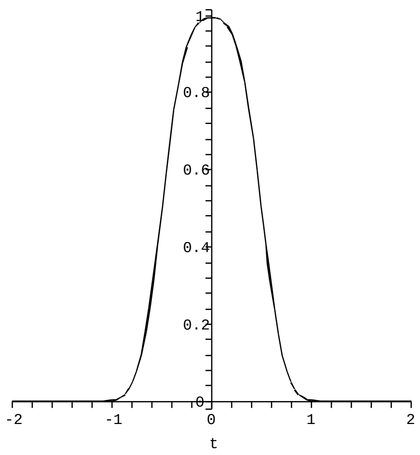
Figuur II.24: Product van Fourier getransformeerde met Gauss low-pass en high-pass filters

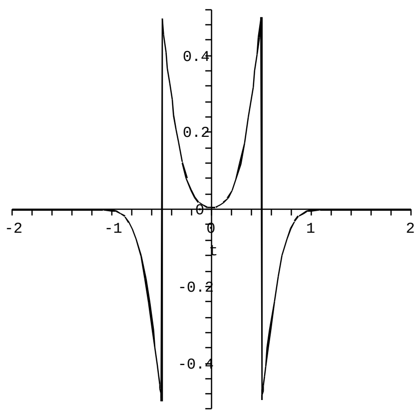
Het gefilterde signaal krijgen we nu door de inverse Fourier transformatie op het product van de Fourier getransformeerde en de filter functie in het frequentiedomein toe te passen, het low-pass gefilterde signaal is dus

$$f_l(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_l(u)]$$

en het high-pass gefilterde signaal is

$$f_h(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_h(u)].$$





Figuur II.25: Inverse Fourier transformatie van het product met de filter functies geeft de gefilterde signalen

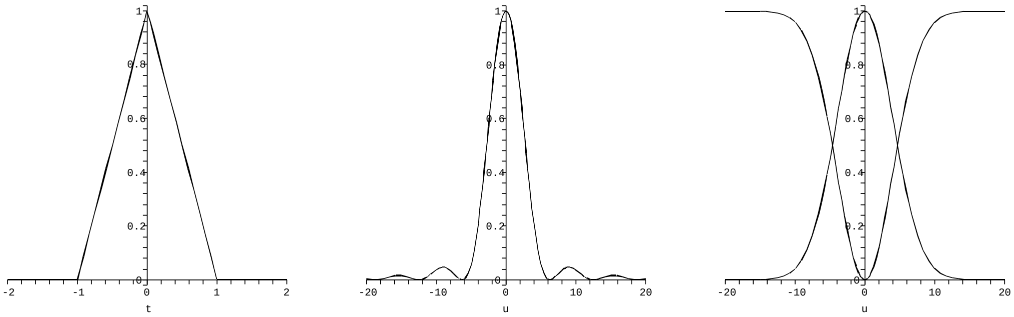
Deze signalen zijn in Figuur II.25 te zien. Het is duidelijk dat de low-pass filter het signaal grofweg bewaart, maar de scherpe knikken tot ronde bochten verzacht. In tegenstelling hiermee geeft het high-pass gefilterde signaal aan, waar het signaal sterk verandert, namelijk in de punten $t = \pm 0.5$ van de knikken. In het punt $t = 0$ waar het signaal de grootste intensiteit heeft, geeft de high-pass filter zelf de waarde 0, want hier veranderd het signaal niet. Dit is in overeenstemming met de waarnemingen bij Figuur II.20: Als de grijs-intensiteit op een gebied nauwelijks veranderd, geeft de high-pass filter steeds eenzelfde grijs-kleuring, onafhankelijk of het origineel in dit gebied licht of donker grijs is.

Het feit dat in dit voorbeeld $H_l(u) + H_h(u) = 1$ geldt, heeft tot gevolg dat $F(u) = F(u) \cdot H_l(u) + F(u) \cdot H_h(u)$ en hieruit volgt dat $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_l(u)] + \mathcal{F}^{-1}[F(u) \cdot H_h(u)]$. Dit betekent dat in dit voorbeeld het originele signaal de som van het low-pass gefilterde signaal en het high-pass gefilterde signaal is.

Voorbeeld: Driehoek impuls

We kijken op een soortgelijke manier naar het voorbeeld van een driehoek impuls $f(t)$ tussen -1 en 1 die in $t = 0$ de sterkte 1 heeft. Zo als eerder in deze les gevonden, heeft $f(t)$ de Fourier getransformeerde

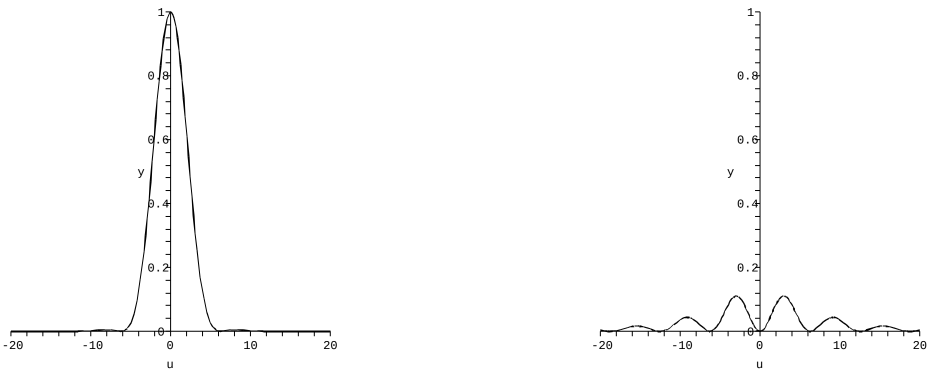
$$\mathcal{F}[f(t)] = F(u) = \left(\frac{\sin(\frac{1}{2}u)}{\frac{1}{2}u} \right)^2 .$$



Figuur II.26: Driehoek impuls, Fourier getransformeerde en Gauss low-pass en high-pass filters

In dit geval passen we een scherpere low-pass filter toe, die al op de frequentie $u = 2\pi$ waar $F(u)$ het kleinste positieve nulpunt heeft een waarde van ongeveer 0.5 heeft. De high-pass filter definiëren we weer als verschil $H_h(u) := 1 - H_l(u)$:

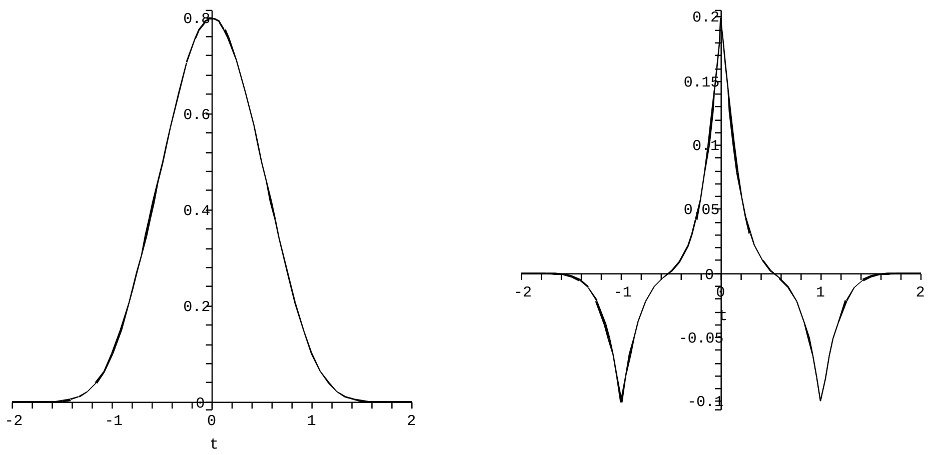
$$H_l(u) = e^{-\frac{u^2}{10\pi}}, \quad H_h(u) = 1 - H_l(u) = 1 - e^{-\frac{u^2}{10\pi}}.$$



Figuur II.27: Product van Fourier getransformeerde met Gauss low-pass en high-pass filters

Als we in dit geval naar de producten van de Fourier getransformeerde $F(u)$ met de filter functies kijken, zien we duidelijk dat de low-pass filter alleen maar de hoofdspits doorlaat en de rest van de Fourier getransformeerde onderdrukt. Interessant is hier het product met de high-pass filter. De functie $F(u)$ heeft het eerste positieve maximum bij $u = 3\pi$, maar in het rechterplaatje van Figuur II.27 is duidelijk te zien dat het product $F(u) \cdot H_h(u)$ in $u = \pi$ al een maximum heeft. Met het blote oog is dit verschil tussen de hoofdspitsen van $F(u)$ en $F(u) \cdot H_l(u)$ nauwelijks te zien omdat de absolute hoogte van de spits overweegt. Maar de inverse Fourier transformatie van de producten in het frequentiedomein maakt duidelijk dat de subtiele verschillen een belangrijke effect op het signaal hebben.

Bij de gefilterde signalen in Figuur II.28 zien we in het linkerplaatje dat de low-pass filter de vorm van de driehoek impuls ongeveer bewaart, maar wel de knikken behoorlijk verzacht. Dit is het gevolg van onze keuze van een relatief scherpe low-pass filter. Het high-pass gefilterde signaal in het rechterplaatje laat duidelijk de drie knikken van de driehoek impuls bij $t = -1$, $t = 0$ en $t = 1$ zien.



Figuur II.28: Inverse Fourier transformatie van het product met de filter functies geeft de gefilterde signalen

Belangrijke begrippen in deze les

- Fourier getransformeerde van rechthoek impuls
- Fourier getransformeerde van Gauss functies zijn Gauss functies
- Dirac δ-functie
- low-pass en high-pass filters

Opgaven

73. Zij $f(t)$ de functie gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} 1 - t^2 & \text{als} \quad |t| \leq 1 \\ 0 & \text{als} \quad |t| > 1. \end{cases}$$

(i) Maak een schets van de functie.
(ii) Bepaal de Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ van $f(t)$.
(iii) Maak een schets van de Fourier getransformeerde $F(u)$.

74. Bepaal de Fourier getransformeerde van de functie

$$f(t) := e^{-a|t|} \quad \text{met } a > 0.$$

75. Bepaal de Fourier getransformeerden van

(i) $f(t) := e^{iat^2}$;
(ii) $f(t) := \cos(at^2)$;
(iii) $f(t) := \sin(at^2)$.

(Hint: Zonder afleiding mag je de oneindige integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\; dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ en $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\; dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ gebruiken.)

76. Bepaal de Fourier getransformeerden van

(i) $f(t) := \cos(\omega t)$;
(ii) $f(t) := \sin(\omega t)$.

77. Laat zien dat voor de *signum functie*, gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} -1 & \text{als} \quad t < 0 \\ 1 & \text{als} \quad t > 0 \end{cases}$$

geldt, dat $\mathcal{F}[f(t)] = \dfrac{2}{iu}$.

Les 10 Discrete Fourier transformatie

We hebben in de vorige lessen gezien hoe we met behulp van de Fourier transformatie voor een in het tijdsdomein gegeven signaal een alternatieve beschrijving in het frequentiedomein kunnen berekenen. Helaas hebben we het in de praktijk bijna nooit met signalen te maken die zich door eenvoudige combinaties van simpele continue functies zo als $\cos(\omega t)$ of $\sin(\omega t)$ of door rechthoek of driehoek impulsen laten beschrijven. Meestal kunnen we zelfs de functiewaarden $f(t)$ van een signaal alleen maar door een meting bepalen omdat het signaal a priori onbekend is. Dit maakt het natuurlijk onmogelijk, de Fourier getransformeerde van $f(t)$ volgens de (theoretische) formule

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iut}\, dt$$

uit te rekenen, waarbij we het nog niet eens over de oneindige grenzen hebben.

Het idee om uit dit dilemma te ontsnappen is, de functie door voldoende metingen zo goed te beschrijven, dat we niettemin belangrijke informatie over de functie in het tijds- en frequentiedomein krijgen.

10.1 Discretisering

Het beschrijven van een functie door meten van de functiewaarden op bepaalde tijdstippen noemt men *sampling*, het resultaat van een sampling is een *discretisering* van de functie. Het is hierbij gebruikelijk dat de tijdelijke afstanden tussen de metingen altijd hetzelfde zijn.

Als men een tijdsinterval Δt en het aantal N van metingen kiest, beschrijft men een functie $f(t)$ op de tijdstippen $t_k := k \cdot \Delta t$ voor $k = 0, 1, \ldots, N-1$ door de N discrete waarden $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$ gegeven door

$$f_0 := f(0 \cdot \Delta t), \ldots, f_k := f(k \cdot \Delta t), \ldots, f_{N-1} := f((N-1) \cdot \Delta t).$$

> **Merk op:** Het feit dat we steeds met $t_0 = 0$ beginnen is geen echte beperking, want we kunnen door een verschuiving in het tijdsdomein steeds ervoor zorgen dat de eerste meting op het tijdstip $t = 0$ plaats vindt.

Met betrekking tot de Fourier transformatie kijkt men nu ook naar een discrete versie van de Fourier getransformeerde in het frequentiedomein. We hebben N metingen met een afstand van Δt, dus metingen over een tijdsinterval van $T = N \cdot \Delta t$. Het beste dat we zouden kunnen verwachten is dat de functie $f(t)$ periode T heeft, want dan kunnen we elke functiewaarde $f(t)$ identificeren met een functiewaarde in het interval $[0, T]$ en vervolgens deze functiewaarde door de dichtstbij liggende meting benaderen.

Als we nu eens veronderstellen, dat $f(t)$ inderdaad periodiek met periode T is, dan kunnen we $f(t)$ in een Fourier reeks $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ ontwikkelen waarbij $\omega = \frac{2\pi}{T}$ de grondfrequentie is.

De frequenties die een rol in de Fourier reeks van $f(t)$ spelen, hebben dus een verschil van veelvouden van $\frac{2\pi}{T}$ en dit interpreteren we als *afstand* $\Delta\omega$ van de frequenties waarover we informatie uit $f(t)$ kunnen halen.

Dit idee veralgemenen we nu naar functies $f(t)$ die niet periodiek zijn en definiëren de discrete frequenties ω_j door $\omega_j := j \cdot \Delta\omega = j \cdot \frac{2\pi}{T}$. Tenslotte beslissen we nog dat het aantal discrete waarden in het frequentiedomein even groot moet zijn als het aantal tijdstippen in het tijdsdomein, dus juist N. Het interval in het frequentiedomein dat we zo overdekken is $N \cdot \Delta\omega = \frac{2\pi N}{T} = \frac{2\pi}{\Delta t}$.

Definitie: Een *discretisering* van een functie $f(t)$ op N tijdstippen t_k met afstand Δt is gegeven door de functiewaarden

$$f_k := f(t_k) = f(k \cdot \Delta t) \text{ met } t_k := k \cdot \Delta t \text{ voor } k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Voor de discretisering in het frequentiedomein zij

$$T := N \cdot \Delta t \text{ en } \Delta\omega := \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{N} \cdot \frac{2\pi}{\Delta t},$$

dan zijn de discrete frequenties ω_j gegeven door

$$\omega_j := j \cdot \Delta\omega = j \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{j}{N} \cdot \frac{1}{\Delta t} \text{ voor } j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Door deze definities krijgen we in het bijzonder de relatie

$$N \cdot \Delta t \cdot \Delta\omega = 2\pi$$

die zegt dat we bij een constant aantal N van metingen een kleinere tijdelijke afstand Δt in het tijdsdomein moeten compenseren door een grotere afstand $\Delta\omega$ in het frequentiedomein, en andersom.

10.2 De discrete Fourier transformatie

In analogie met de Fourier reeks en de Fourier transformatie proberen we nu de waarden $f(t_k)$ op de discrete tijdstippen $t_k = k \cdot \Delta t$ te beschrijven door informatie voor de frequenties $\omega_j = j \cdot \Delta\omega$ in het frequentie domein.

Fourier reeks: Als $f(t)$ een periodieke functie met periode T en $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ was, konden we $f_k = f(t_k)$ schrijven als

$$f_k = f(t_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\Delta\omega t_k}.$$

Fourier transformatie: Voor de Fourier transformatie geldt dat

$$f_k = f(t_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iut_k}\, du.$$

Bij de discretisering moeten we ons beperken tot informatie over de discrete frequenties $\omega_j = j \cdot \Delta\omega$ voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$, dus moeten we de Fourier reeks en de Fourier transformatie als volgt veranderen:

- In de Fourier reeks kan j alleen maar van 0 tot $N-1$ lopen.
- De integraal in de Fourier transformatie moet vertaald worden naar een som over de termen e^{iut_k} met $u = \omega_j = j\Delta\omega$ voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Uit beide invalshoeken komen we tot de conclusie dat we $f_k = f(t_k)$ moeten schrijven als lineaire combinatie van de termen

$$e^{i(j\Delta\omega)t_k} = e^{i(j\Delta\omega)(k\Delta t)} = e^{ijk\Delta\omega\Delta t}$$

met *geschikte coëfficiënten* F_j voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Dit geeft al de formele opzet voor de discrete Fourier transformatie, preciezer gezegd voor de inverse discrete Fourier transformatie, namelijk

$$f_k = f(t_k) := f(k \cdot \Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \, e^{ij\Delta\omega t_k} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \, e^{ijk\Delta\omega\Delta t}.$$

Hierbij is de factor $\frac{1}{N}$ net als bij de Fourier reeks en de Fourier transformatie een normeringsfactor die enigszins willekeurig op de Fourier transformatie en de inverse Fourier transformatie opgedeeld zal moeten worden.

De vraag is nu hoe we de coëfficiënten F_j kunnen bepalen. Hiervoor zijn er verschillende mogelijkheden, die gelukkig alle tot hetzelfde resultaat lijden namelijk:

$$F_j = \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \, e^{-i\,j\Delta\omega\, l\Delta t}.$$

Als we dit in de boven aangegeven formule voor de inverse discrete Fourier transformatie invullen, krijgen we de discrete versie van de Fourier integraal formule en dit geeft aanleiding tot het volgende resultaat over de discrete Fourier transformatie:

Discrete Fourier transformatie

De *discrete Fourier integraal formule* luidt

$$f_k = f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \, e^{-i\,j\Delta\omega\, t_l} \right) e^{i\,j\Delta\omega\, t_k}.$$

De *discrete Fourier transformatie* is gegeven door

$$F_j = \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \, e^{-i\,j\Delta\omega\, t_l} = \sum_{l=0}^{N-1} f_l \, e^{-i\,jl\,\Delta\omega\,\Delta t}$$

en de *discrete inverse Fourier transformatie* door

$$f_k = f(t_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \, e^{i\,j\Delta\omega\, t_k} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} F_j \, e^{i\,jk\,\Delta\omega\,\Delta t}.$$

Merk op: Vaak wordt een gesampelde functie en zijn discrete Fourier transformatie gewoon als rij van waarden aangegeven, bijvoorbeeld in de vorm

$$\{f_0, \ldots, f_k, \ldots, f_{N-1}\} \quad \text{en} \quad \{F_0, \ldots, F_j, \ldots, F_{N-1}\}.$$

Voor de geïnteresseerde lezer geven we nu drie manieren aan, hoe dit resultaat afgeleid kan worden:

(1) middels projecties op een orthogonaal stelsel van functies;

(2) middels trigonometrische interpolatie;

(3) middels de Dirac δ-functie.

Afleiding 1: Projectie op een orthogonaal stelsel van functies

Het idee bij de Fourier reeks was in principe, een orthogonaal stelsel van functies (met betrekking tot een geschikt inproduct) te kiezen en de orthogonale projecties van de functie $f(t)$ op deze functies te berekenen. Iets soortgelijks gebeurt in principe ook bij de discrete Fourier transformatie. Als de tijdstippen $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}$ vast gekozen zijn, kunnen we een inproduct voor complexe functies definiëren door

$$\langle f(t), g(t) \rangle := \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \cdot \overline{g(t_k)}.$$

We laten nu zien dat de functies $e^{ij\Delta\omega t}$ voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$ een orthogonaal stelsel met betrekking tot dit inproduct vormen.

Hulpstelling: Door uitschrijven van het product ziet men algemeen dat

$$(1-a)(1+a+a^2+\ldots+a^{N-1}) = 1-a^N$$

en hieruit volgt dat

$$\sum_{k=0}^{N-1} a^k = 1+a+a^2+\ldots+a^{N-1} = \begin{cases} \frac{1-a^N}{1-a} & \text{als} \quad a \neq 1 \\ N & \text{als} \quad a = 1 \end{cases}$$

Deze hulpstelling passen we nu op het inproduct van de functies $e^{ij\Delta\omega t}$ en $e^{il\Delta\omega t}$ toe, er geldt:

$$\langle e^{ij\Delta\omega t}, e^{il\Delta\omega t} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} e^{ij\Delta\omega t_k} \cdot e^{-il\Delta\omega t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{i(j-l)\Delta\omega t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t})^k.$$

Merk op dat we $\Delta\omega$ zo hebben gekozen dat $\Delta\omega\Delta t \cdot N = 2\pi$, dus $\Delta\omega\Delta t = \frac{2\pi}{N}$. Hieruit volgt dat

$$(e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t})^N = e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t N} = (e^{2\pi i})^{j-l} = 1.$$

Aan de andere kant is

$$e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t} = e^{i(j-l)\frac{2\pi}{N}} = e^{2\pi i\frac{j-l}{N}} \begin{cases} \neq 1 & \text{als} \quad j \neq l \\ = 1 & \text{als} \quad j = l \end{cases}$$

omdat j en l van 0 tot $N-1$ lopen en dus $j-l$ nooit een veelvoud van N kan zijn. Bij elkaar genomen volgt hieruit met de hulpstelling dat

$$\langle e^{ij\Delta\omega t}, e^{il\Delta\omega t}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} (e^{i(j-l)\Delta\omega\Delta t})^k = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad j \neq l \\ N & \text{als} \quad j = l. \end{cases}$$

Net als bij de Fourier reeks vinden we nu coëfficiënten c_j met $f(t_k) = \sum_{j=0}^{N-1} c_k e^{ij\Delta\omega t_k}$ door

$$c_j = \frac{\langle f(t), e^{ij\Delta\omega t}\rangle}{\langle e^{ij\Delta\omega t}, e^{ij\Delta\omega t}\rangle} = \frac{1}{N}\langle f(t), e^{ij\Delta\omega t}\rangle$$

dus is de coëfficiënt F_j van $e^{ij\Delta\omega t_k}$ in $f(t_k) = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{ij\Delta\omega t_k}$ gegeven door

$$F_j = \langle f(t), e^{ij\Delta\omega t}\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega t_k} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, e^{-ijk\,\Delta\omega\,\Delta t}.$$

Als controle vullen we dit eens in:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} F_j e^{ij\Delta\omega t_k} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) e^{-ij\Delta\omega t_l} \right) e^{ij\Delta\omega t_k} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) e^{-ij\Delta\omega l\Delta t} \right) e^{ij\Delta\omega k\Delta t} \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \left(\sum_{j=0}^{N-1} e^{ij\Delta\omega(k-l)\Delta t} \right) \\
&= \sum_{l=0}^{N-1} f(t_l) \left(\sum_{j=0}^{N-1} (e^{i(k-l)\Delta\omega\Delta t})^j \right) \\
&= f(t_k) \cdot N.
\end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we weer de hulpstelling toegepast die zegt dat de som $\sum_{j=0}^{N-1}(e^{i(k-l)\Delta\omega\Delta t})^j$ alleen maar voor $l = k$ ongelijk aan 0 is en in dit geval de waarde N heeft. Van de som over l blijft dus alleen maar de term voor $l = k$ over en hiervoor krijgen we juist de waarde $f(t_k) \cdot N$.

Afleiding 2: Trigonometrische interpolatie

Een alternatieve formulering van deze toegang tot de discrete Fourier transformatie zit in de *trigonometrische interpolatie*. We weten dat er voor N verschillende x-waarden $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ met bijhorende y-waarden $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$ een eenduidige veelterm $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{N-1} x^{N-1}$ van graad $N-1$ bestaat, zo dat $p(x_k) = y_k$ voor alle $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Met noemt $p(x)$ de interpolatie van de gegeven punten, omdat de grafiek van $p(x)$ de punten (x_k, y_k) verbindt. Het idee achter het bewijs is simpel: De N paren van $x - y$-waarden geven N lineaire vergelijkingen voor de N coëfficiënten van $p(x)$, en omdat de functies x^j lineair onafhankelijk zijn, heeft het bijhorende stelsel lineaire vergelijkingen een eenduidige oplossing.

Als men nu de functies $x^0, \ldots, x^j, \ldots$ door de functies $(e^{i\omega x})^0, \ldots, (e^{i\omega x})^j, \ldots$ vervangt die ook lineair onafhankelijk zijn, krijgt men een analoge uitspraak voor de interpolatie met behulp van deze functies. Wegens de relatie $e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$ spreekt men hierbij van *trigonometrische interpolatie*.

We noemen nu de variabel x weer t en vervangen ω door $\Delta\omega$, dan luidt het idee, de functie $f(t)$ te benaderen door de trigonometrische interpolatie $\tilde{f}(t) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ij\Delta\omega t}$ die gedefinieerd is door de eigenschappen dat $\tilde{f}(t_k) = f(t_k)$ voor $k = 0, \ldots N-1$. Als men hierop de orthogonaliteitsrelaties voor de functies $e^{ij\Delta\omega t}$ toepast, vindt men weer dat de coëfficiënten c_j voldoen aan

$$c_j = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ijk\Delta\omega\Delta t}.$$

Afleiding 3: Dirac δ-functie

Omdat we bij de Fourier transformatie de Dirac δ-functie behandeld hebben, kunnen we nog een andere motivatie voor de coëfficiënten van de discrete Fourier transformatie geven die hierop gebaseerd is.

We weten van de functie $f(t)$ alleen maar de waarden die we op de tijdstippen $t_k = k \cdot \Delta t$ voor $k = 0, 1, \ldots, N-1$ gemeten hebben, dus de functiewaarden $f_k = f(t_k)$. We vervangen de functie $f(t)$ nu door de *gesampelde functie*

$$f_s(t) := \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \cdot \delta(t - t_k)$$

die uit (oneindige) spitsen op de tijdstippen t_k bestaat die de gemeten waarden $f(t_k)$ als gewichten hebben.

De gesampelde functie $f_s(t)$ heeft in het bijzonder de volgende twee eigenschappen:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f_s(t)\, dt = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)$, d.w.z. de integraal over de gesampelde functie is gelijk aan de som van de gemeten functiewaarden;

(2) de relatieve intensiteiten van de spitsen zijn evenredig met de gemeten functiewaarden.

Omdat we uit de vorige les weten dat de δ-functie $\delta(t - t_k)$ de Fourier getransformeerde e^{-iut_k} heeft, kunnen we de Fourier getransformeerde van de gesampelde functie $f_s(t)$ makkelijk berekenen, er geldt

$$F_s(u) = \mathcal{F}[f_s(t)] = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-iut_k}.$$

Als we de functiewaarden van $F_s(u)$ nu voor de discrete frequenties $u = \omega_j = j \cdot \Delta\omega$ bepalen, krijgen we

$$F_s(\omega_j) = f(t_k)e^{-ij\Delta\omega t_k} = F_j.$$

De coëfficiënten F_j van de discrete Fourier transformatie zijn dus juist de functiewaarden van de Fourier getransformeerde $F_s(u)$ van de gesampelde functie $f_s(t)$ op de discrete frequenties ω_j.

Boven hebben we al gezien hoe we omgekeerd de discrete functiewaarden $f(t_k)$ uit de discrete waarden $F_s(\omega_j) = F_j$ van de Fourier getransformeerde kunnen reproduceren, namelijk juist met de discrete inverse Fourier transformatie.

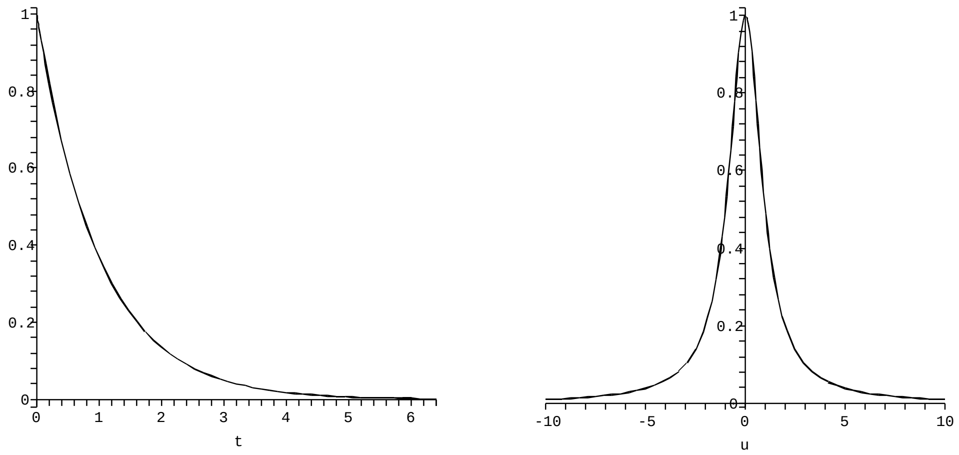
10.3 Voorbeeld van een discrete Fourier transformatie

We gaan nu eens een voorbeeld van een discrete Fourier transformatie bekijken. Hiervoor kiezen we de functie

$$f(t) := \begin{cases} e^{-t} & \text{als} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{als} \quad t < 0 \end{cases}$$

die een exponentiële daling beschrijft. De Fourier getransformeerde van $f(t)$ hebben we al eerder bepaald, er geldt

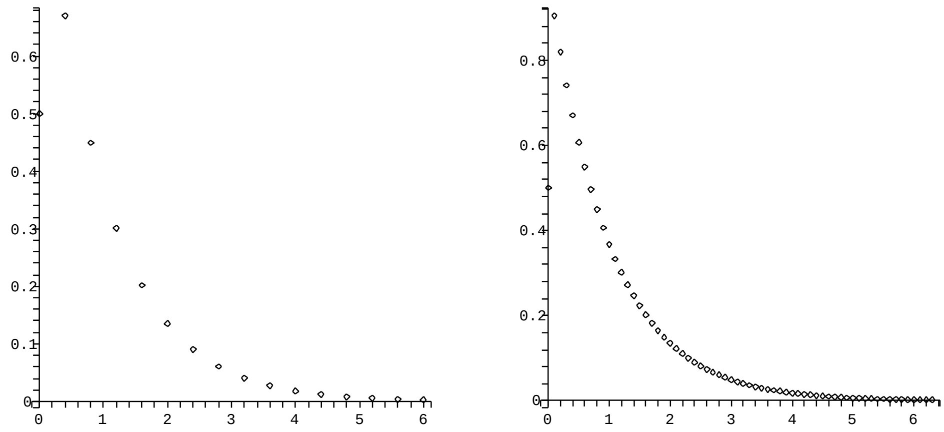
$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{1+iu} = \frac{1-iu}{1+u^2} \quad \text{met} \quad \Re(F(u)) = \frac{1}{1+u^2}.$$



Figuur II.29: Exponentiële daling $f(t) = e^{-t}$ en reëel deel van de Fourier getransformeerde.

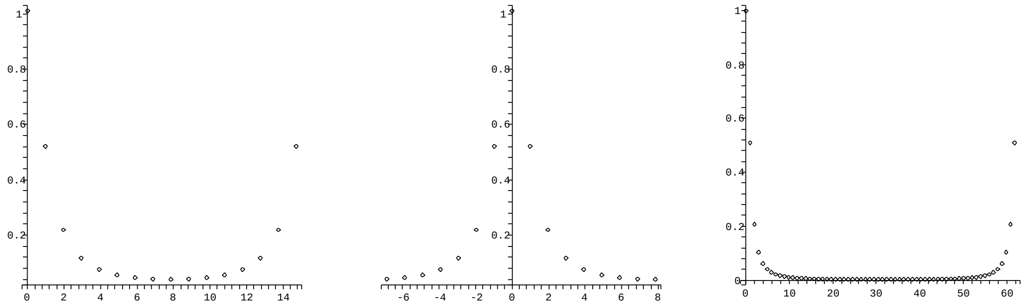
We sampeln de functie $f(t)$ op twee manieren: Een keer met $N = 16$ punten op een afstand van $\Delta t = 0.4$ en een keer met $N = 64$ punten op een afstand van $\Delta t = 0.1$. Dit is in Figuur II.30 te zien. Merk op dat de t-as net zo geschald is als bij de continue versie, dus met $k \cdot \Delta t$. In beide gevallen is $N \cdot \Delta t = 6.4$ en dus $\Delta\omega = \frac{2\pi}{6.4}$. In het eerste geval is $T = N \cdot \Delta\omega = 5\pi$, in het tweede geval is

$N \cdot \Delta\omega = 20\pi$, we overdekken dus bij een sampling met vier keer zo veel punten over hetzelfde tijdsinterval $[0, T]$ een vier keer zo groot interval in het frequentie domein.



Figuur II.30: Discretisering van een exponentiële daling met 16 (links) en 64 punten (rechts).

De discrete Fourier transformaties van de twee gesampelde versies van de exponentiële daling zijn in Figuur II.31 afgebeeld.



Figuur II.31: Discrete Fourier transformatie van een exponentiële daling gesampeld met 16 (links en midden) en 64 punten (rechts).

Als we het linker en het rechter plaatje in Figuur II.31 met de continue Fourier getransformeerde vergelijken, zien we dat we de discrete Fourier transformatie iets anders moeten interpreteren. Eigenlijk hoort namelijk (net zo als bij de Fourier reeks) bij elke coëfficiënt F_j met $j > 0$ ook een coëfficiënt met $j < 0$. Deze vinden we als volgt: We kunnen de definitie

$$F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega k \Delta t}$$

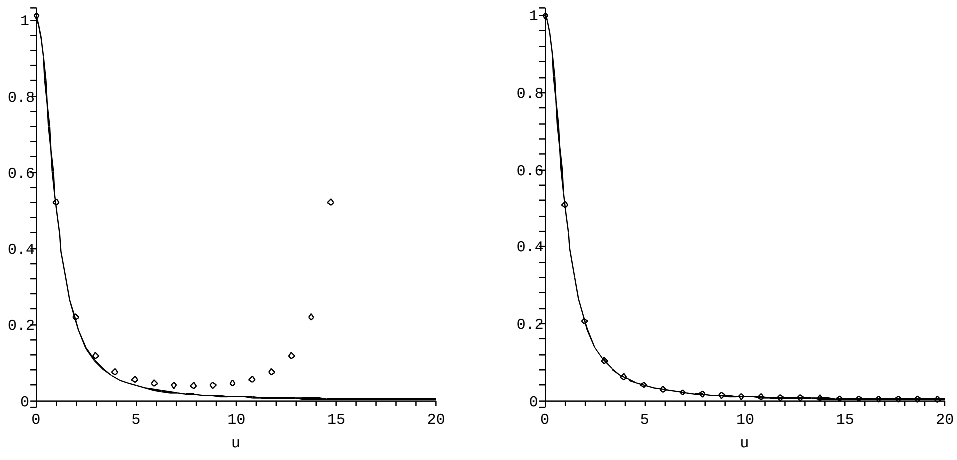
ook lezen voor j buiten het interval $[0 \ldots N-1]$, en omdat $\Delta\omega\Delta t \cdot N = 2\pi$ en dus $e^{-iN\Delta\omega\Delta t} = 1$ is, geldt

$$F_{j+N} = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-i(j+N)\Delta\omega k\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} = F_j.$$

In het bijzonder betekent dit dat $F_{-j} = F_{N-j}$ en we moeten de coëfficiënten $F_{\frac{N}{2}}, \ldots, F_{N-1}$ dus eigenlijk lezen als de coëfficiënten $F_{-\frac{N}{2}}, \ldots, F_{-1}$.

Voor het gemak laten we in de plaatjes niettemin j van 0 tot $N-1$ lopen en denken ons bij het vergelijken met de continue Fourier transformatie het plaatje van de discrete Fourier getransformeerde in het midden door geknipt en de rechter helft van het plaatje links aan de linker helft geplakt. De zo veranderde versie van de discrete Fourier transformatie met 16 punten is in het middelste plaatje van Figuur II.31 te zien.

Ten slotte vergelijken we de discrete Fourier transformatie met de continue. In Figuur II.32 zijn de waarden van de coëfficiënten F_j als punten naast de grafiek van de continue Fourier getransformeerde $F(u)$ te zien. Ook in dit geval is de u-as zo geschald, dat de coëfficiënt F_j op de frequentie $u = j \cdot \Delta\omega$ terecht komt. Het is duidelijk dat bij een sampling met te grote tijdsintervallen de discrete Fourier getransformeerde al snel (en duidelijk voor de helft van de sampling frequenties) behoorlijk van de continue Fourier getransformeerde afwijkt. Een verhoging van het aantal metingen op hetzelfde tijdsinterval lijdt echter tot een duidelijk verbeterde benadering. Merk op dat in het rechter plaatje niet eens de helft van de 64 discrete frequentie waarden afgebeeld zijn.



Figuur II.32: Vergelijk van continue en discrete Fourier transformatie van de exponentiële daling.

10.4 Eigenschappen van de discrete Fourier transformatie

In principe heeft de discrete Fourier transformatie dezelfde eigenschappen als de gewone Fourier transformatie. Om deze aan te geven, houden we de volgende notaties aan:

Zij $f(t)$ een functie, die we op N punten $t_k = k \cdot \Delta t$ met een tijdelijke afstand van Δt sampeln. We definiëren $f_k := f(t_k)$, dan zijn voor $j = 0, 1, \ldots, N-1$ de coëfficiënten F_j van de discrete Fourier getransformeerde van $f(t)$ voor de frequenties $j \cdot \Delta\omega$ gegeven door $F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t}$. Hierbij geldt $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta t}$ en dus $\Delta\omega\Delta t = \frac{2\pi}{N}$.

Voor verdere functies $g(t)$ en $h(t)$ nemen we aan dat deze met dezelfde N en Δt gediscretiseerd zijn en de waarden $g_k = g(t_k)$ en $h_k = h(t_k)$ hebben. De discrete Fourier getransformeerden van deze functies geven we met G_j en H_j aan.

Lineariteit

Omdat we functies puntsgewijs optellen, is de discrete Fourier getransformeerde van $f_k + g_k$ gelijk aan $F_j + G_j$.

Analoog geldt voor de vermenigvuldiging met een factor, dat $a \cdot f_k$ de discrete Fourier getransformeerde $a \cdot F_j$ heeft.

Verschuiving

Als de sampling waarden g_k van $g(t)$ om l posities tegenover de sampling waarden van $f(t)$ verschoven zijn, dus als $g_k = f_{k-l}$ is, dan geldt

$$G_j = F_j \, e^{-ijl\Delta\omega\Delta t} = F_j \, e^{-i\frac{2\pi}{N}jl},$$

waarbij we met F_j en G_j de discrete Fourier getransformeerden van f_k en g_k noteren. Dit gaat men als volgt na:

$$\begin{aligned} G_j &= \sum_{k=0}^{N-1} f_{k-l} \, e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} = \sum_{k=l}^{l+N-1} f_{k-l} \, e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{-ij\Delta\omega(k+l)\Delta t} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{-ij\Delta\omega k\Delta t} \right) e^{-ij\Delta\omega l\Delta t} = F_j \, e^{-ijl\Delta\omega\Delta t}. \end{aligned}$$

Op een soortgelijke manier laat zich aantonen (zie opgaven), dat voor een verschoven functie $G_j = F_{j-l}$ in het frequentiedomein geldt, dat de discrete inverse Fourier getransformeerde g_k van G_j uit de getransformeerde f_k van F_j wordt verkregen door

$$g_k = f_k \, e^{ikl\Delta\omega\Delta t} = f_k \, e^{i\frac{2\pi}{N}kl}.$$

Convolutie

Het convolutieproduct $h_k = f_k * g_k$ van twee gediscretiseerde functies f_k en g_k is juist zo gedefinieerd als of f_k en g_k de coëfficiënten van de term x^k in twee veeltermen zijn en h_k de coëfficiënt van de term x^k in het product van deze veeltermen is. Dit geeft voor het convolutieproduct de definitie

$$h_k := \sum_{l=0}^{N-1} f_l \, g_{k-l} =: f_k * g_k.$$

In deze formule moeten we voor de coëfficiënten g_{k-l} met index $k - l < 0$ de coëfficiënt g_{k-l} met g_{N+k-l} identificeren, dus we moeten N bij de index optellen. We waren namelijk bij de definitie van de discrete Fourier transformatie ervan uit gegaan dat de gediscretiseerde functie periodiek met periode $T = N \cdot \Delta t$ is.

De belangrijke eigenschap van het convolutieproduct is nu net als in het continue geval, dat de discrete Fourier getransformeerde H_j van het convolutieproduct $h_k = f_k * g_k$ gelijk is aan het gewone product $F_j \cdot G_j$ van de discrete Fourier getransformeerden van f_k en g_k, dus dat

$$H_j := \sum_{k=0}^{N-1} h_k \, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f_l \, g_{k-l} \right) e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} = F_j \cdot G_j$$

voor $F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k \, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t}$ en $G_j = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t}$. Dit ziet men als volgt in:

$$\begin{aligned} H_j &= \sum_{k=0}^{N-1} h_k \, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \, g_{k-l} \, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} f_l \, e^{-ijl\Delta\omega\Delta t} (\sum_{k=0}^{N-1} g_{k-l} \, e^{-ij(k-l)\Delta\omega\Delta t}) \\ &=_{k'=k-l} (\sum_{l=0}^{N-1} f_l \, e^{-ijl\Delta\omega\Delta t}) (\sum_{k'=0}^{N-1} g_{k'} \, e^{-ijk'\Delta\omega\Delta t}) \\ &= F_j \cdot G_j. \end{aligned}$$

In de voorlaatste stap maken we hierbij gebruik ervan dat de gesampelde waarden periodiek met periode N zijn, dus dat $g_k = g_{k+N}$ is. Hiermee volgt dat met k ook $k - l$ over alle waarden van 0 t/m $N - 1$ loopt.

Op een soortgelijke manier (zie opgaven) laat zich aantonen dat het gewone product in het tijdsdomein met het convolutieproduct in het frequentiedomein correspondeert, hierbij komt echter nog een factor N te voorschijn. Voor gediscretiseerde functies f_k en g_k met discrete Fourier transformaties F_j en G_j geldt dat het gewone product $h_k := f_k \cdot g_k$ de getransformeerde $H_j = \frac{1}{N} F_j * G_j$ heeft, dus dat

$$H_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k g_k \, e^{-ijk\Delta\omega\Delta t} = \frac{1}{N} F_j * G_j = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} F_l \, G_{j-l}.$$

10.5 Snelle (discrete) Fourier transformatie (FFT)

Om bij een gesampelde functie $(f_0, \ldots, f_{N-1})$ de coëfficiënten F_j van de discrete Fourier transformatie te berekenen, zijn er voor elke coëfficiënt N vermenigvuldigingen nodig, voor alle coëfficiënten dus N^2 vermenigvuldigingen. Bij een typische waarde van bijvoorbeeld $N = 1024$ is dit al behoorlijk veel rekenwerk, omdat bij veranderlijke signalen vaak opnieuw gesampeld moet worden.

Een nauwkeurige analyse van het rekenwerk laat immers zien, dat men door een slimme opzet het rekenwerk behoorlijk kan reduceren, namelijk tot slechts $N \cdot {}^2\log(N)$ in plaats van N^2 vermenigvuldigingen. Deze manier om de discrete Fourier transformatie uit te rekenen noemt men *snelle Fourier transformatie*, afgekort met *FFT* voor *fast Fourier transformation.* Bij $N = 1024$ scheelt de FFT bijvoorbeeld een factor van $\frac{N}{{}^2\log(N)} = \frac{1024}{10} \approx 100$ in het rekenwerk.

We gaan vanaf nu ervan uit dat N even is (meestal is zelfs $N = 2^m$ een macht van 2) en definiëren

$$z := e^{-i\Delta\omega\Delta t} = e^{-i\frac{2\pi}{N}}.$$

Merk op: Wegens $z^N = e^{-2\pi i} = 1$ geldt dat $z^{jk} = z^{j(k+N)}$.

Met deze notatie ziet de discrete Fourier transformatie er zo uit:

$$F_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^{jk}$$

en dit laat zich ook met een matrix schrijven, namelijk als

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & z & z^2 & \ldots & z^{N-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z^{N-1} & z^{2(N-1)} & \ldots & z^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Een coëfficiënt F_{2j} met even index schrijven we nu iets anders, want voor $k' \geq \frac{N}{2}$ kunnen we k' schrijven als $k' = k + \frac{N}{2}$, dan is

$$f_{k'} z^{2jk'} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2j(k+\frac{N}{2})} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2jk} z^{jN} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2jk}.$$

Hieruit volgt voor coëfficiënten met even index:

$$F_{2j} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^{2jk} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_k + f_{k+\frac{N}{2}}) z^{2jk}.$$

Op een soortgelijke manier behandelen we ook de coëfficiënten F_{2j+1} met oneven index. Voor $k' \geq \frac{N}{2}$ schrijven we weer $k' = k + \frac{N}{2}$, dan is

$$f_{k'} z^{(2j+1)k'} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{(2j+1)(k+\frac{N}{2})} = f_{k+\frac{N}{2}} z^{2jk} z^k z^{jN} z^{\frac{N}{2}} = -f_{k+\frac{N}{2}} z^k z^{2jk},$$

want $z^{\frac{N}{2}} = e^{-\pi i} = -1$. Hieruit volgt voor coëfficiënten met oneven index:

$$F_{2j+1} = \sum_{k=0}^{N-1} f_k z^{(2j+1)k} = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (f_k - f_{k+\frac{N}{2}}) z^k z^{2jk}$$

Met behulp van deze formules kunnen we de coëfficiënten met even en oneven indices apart door matrices beschrijven, het aardige daarbij is dat de matrices nu alleen maar nog half zo groot zijn, dus $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ in plaats van $N \times N$:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & \dots & (z^2)^{\frac{N}{2}-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z^{N-2} & z^{2(N-2)} & \dots & (z^2)^{(\frac{N}{2}-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 + f_{\frac{N}{2}} \\ f_1 + f_{1+\frac{N}{2}} \\ \vdots \\ f_{\frac{N}{2}-1} + f_{N-1} \end{pmatrix}$$

en

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & \dots & (z^2)^{\frac{N}{2}-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & z^{N-2} & z^{2(N-2)} & \dots & (z^2)^{(\frac{N}{2}-1)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 - f_{\frac{N}{2}} \\ z(f_1 - f_{1+\frac{N}{2}}) \\ \vdots \\ z^{\frac{N}{2}-1}(f_{\frac{N}{2}-1} + f_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Om deze reductie herhaald toe te kunnen passen is het wenselijk dat N een macht van 2 is, dus van de vorm $N = 2^m$. Dit bereikt men meestal door N gewoon zo te kiezen, maar soms ook door aanvullen van de waarden met nullen. Er zijn ook versies van de FFT ontwikkeld, waarbij dit niet nodig is.

Om de methode beter toe te lichten, gaan we eens een voorbeeld met $N = 8$ expliciet uitwerken. De berekening die we eigenlijk moeten uitvoeren is

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 & z^3 & z^4 & z^5 & z^6 & z^7 \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 & z^8 & z^{10} & z^{12} & z^{14} \\ 1 & z^3 & z^6 & z^9 & z^{12} & z^{15} & z^{18} & z^{21} \\ 1 & z^4 & z^8 & z^{12} & z^{16} & z^{20} & z^{24} & z^{28} \\ 1 & z^5 & z^{10} & z^{15} & z^{20} & z^{25} & z^{30} & z^{35} \\ 1 & z^6 & z^{12} & z^{18} & z^{24} & z^{30} & z^{36} & z^{42} \\ 1 & z^7 & z^{14} & z^{21} & z^{28} & z^{35} & z^{42} & z^{49} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

In de eerste reductiestap gaat dit over in de twee vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_2 \\ F_4 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 \\ 1 & z^4 & z^8 & z^{12} \\ 1 & z^6 & z^{12} & z^{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 + f_4 \\ f_1 + f_5 \\ f_2 + f_6 \\ f_3 + f_7 \end{pmatrix}$$

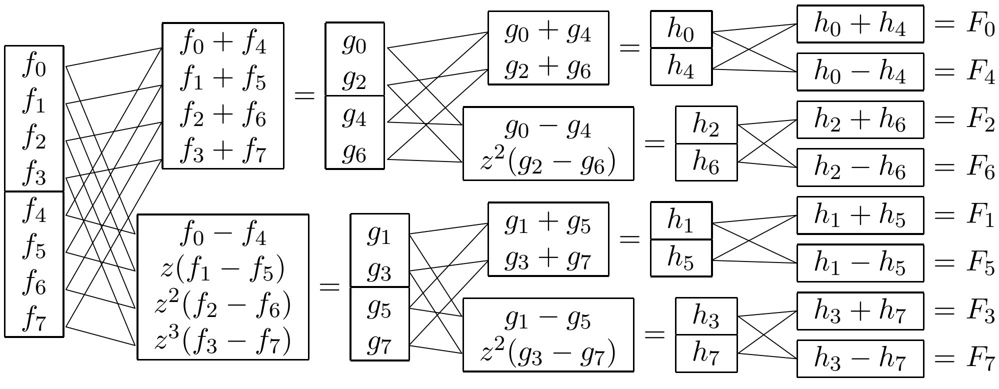
$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_3 \\ F_5 \\ F_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & z^2 & z^4 & z^6 \\ 1 & z^4 & z^8 & z^{12} \\ 1 & z^6 & z^{12} & z^{18} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_0 - f_4 \\ z(f_1 - f_5) \\ z^2(f_2 - f_6) \\ z^3(f_3 - f_7) \end{pmatrix}$$

en in de tweede stap krijgen we de vier vergelijkingen

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 + f_4) + (f_2 + f_6) \\ (f_1 + f_5) + (f_3 + f_7) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 + f_4) - (f_2 + f_6) \\ z^2((f_1 + f_5) - (f_3 + f_7)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 - f_4) + z^2(f_2 - f_6) \\ z(f_1 - f_5) + z^3(f_3 - f_7) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & z^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (f_0 - f_4) - z^2(f_2 - f_6) \\ z^2(z((f_1 - f_5) - (f_3 - f_7))) \end{pmatrix}$$

De grap is nu dat we dit iets anders uitrekenen, namelijk beginnend met de vector $(f_0, \ldots, f_7)$ de stappen op één vector toepassen, die uiteindelijk (tot op volgorde na) de vector $(F_0, \ldots, F_7)$ wordt. We vermijden zo, dat we uitdrukkingen zo als $(f_0 + f_4)$ of $z(f_1 - f_5)$ die herhaald voorkomen meerdere keren berekenen. Dit gebeurt volgens het schema in Figuur II.33. In de laatste stap maken we hierbij gebruik ervan dat $z^{\frac{N}{2}} = z^4 = -1$.



Figuur II.33: Schema van FFT voor $N = 8$ punten

Merk op dat we de indices van de g_i en h_i zo hebben aangepast dat deze met de goede index van F_i corresponderen. Dit is in de praktijk niet nodig, want de volgorde van de F_i kunnen we makkelijk achterhalen, als we de indices binair schrijven. De goede volgorde van de F_i krijgen we, door de binaire schrijfwijzen voor de getallen $0, \ldots, N-1$ te spiegelen (d.w.z. van rechts naar links te lezen). Hierbij schrijven we een getal n binair als een keten $n = a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0$ met $a_i \in \{0, 1\}$ zo dat $n = a_m \cdot 2^m + a_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + a_1 \cdot 2 + a_0$. Bijvoorbeeld schrijven we het getal 42 binair als 101010. Om duidelijk te maken dat een getal een binaire schrijfwijze is, voegt men soms een index 2 aan het getal toe, bijvoorbeeld $42 = 101010_2$.

In het voorbeeld met $N = 8$ krijgen we op deze manier de volgorde van de

F_i als volgt:

$$\text{indices} \begin{array}{c} 0 = 000_2 \\ 1 = 001_2 \\ 2 = 010_2 \\ 3 = 011_2 \\ 4 = 100_2 \\ 5 = 101_2 \\ 6 = 110_2 \\ 7 = 111_2 \end{array} \text{ van } f_i \text{ worden gespiegeld } \begin{array}{c} 000_2 = 0 \\ 100_2 = 4 \\ 010_2 = 2 \\ 110_2 = 6 \\ 001_2 = 1 \\ 101_2 = 5 \\ 011_2 = 3 \\ 111_2 = 7 \end{array} \text{ de indices van } F_i$$

In de praktijk zijn er verschillende manieren om de FFT te implementeren, de meest bekende zijn de *Cooley-Tukey* en de *Sande-Tukey* methode.

In principe heeft pas de ontwikkeling van de FFT de doorbraak van de Fourier transformatie in de signaalverwerking veroorzaakt, want eerder was het berekenen van de Fourier getransformeerde voor interessante toepassingen gewoon ondoenlijk. Inmiddels heeft men overigens achterhaald dat het idee van de FFT al rond het jaar 1800 door C.F. Gauss werd toegepast.

10.6 Shannon's aftast-theorema

Een belangrijke vraag die we ons bij het sampling van een signaal moeten stellen, is hoe veel informatie we door het sampling eigenlijk verliezen. In de signaalverwerking komen we dit probleem bijvoorbeeld bij de digitalisering van analoge signalen tegen, zo als bij een CD-opname van een concert. De vraag is of we het oorspronkelijke signaal uit de digitale informatie, die in de discrete samples zit, kunnen reconstrueren.

In het algemeen is dit natuurlijk onmogelijk, als we maar een keer per seconde een sample hebben kunnen we bijna niets erover zeggen, wat tussendoor gebeurd is. Maar als we met een hogere frequentie sampeln, kunnen we wel verwachten dat we meer informatie terug kunnen vinden.

Intuïtief kunnen we verwachten dat het resultaat ermee te maken heeft, welke frequenties in het signaal voorkomen. Om hoge frequenties te kunnen reconstrueren, moeten we zeker ook met een hogere frequentie sampeln. Hoe het hiermee precies zit, zegt het *aftast-theorema* dat door Claude E. Shannon 1949 werd bewezen. Hierbij gaat het om signalen met een begrensde *bandbreedte*, d.w.z. om signalen waarin alleen frequenties uit een begrensd interval een rol spelen. In de taal van de Fourier transformatie kunnen we dit zo uitdrukken, dat de Fourier getransformeerde van het signaal alleen maar op een begrensd interval ongelijk aan 0 is.

Het concept van begrensde bandbreedte is iets redelijk gewoons, het meest belangrijke voorbeeld is het menselijke oor, dat bij kinderen frequenties tot hooguit 25000 Hz kan verwerken en bij oudere mensen al bij frequenties van 12000 - 15000 Hz ophoudt. Om deze reden zijn ook de meeste HiFi-toestellen zo gebouwd, dat ze alleen maar frequenties tussen 20 Hz en 25 kHz verwerken. Nog beperkter is de bandbreedte van de telefoon, hier worden alleen maar frequenties tussen 300 Hz en 3500 Hz over gebracht.

Het *aftast-theorema* van Shannon beweert nu dat we een signaal minstens met de dubbele frequentie moeten sampeln die in het signaal een rol speelt:

Shannon's aftast-theorema (sampling/scanning theorem):
Zij $f(t)$ een signaal met Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ waarvoor geldt dat $F(u) = 0$ voor alle u met $|u| > u_m = 2\pi f_m$.

Als voor het aftast-interval Δt en de aftast-frequentie $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$ geldt dat

$$\omega \geq 2u_m \text{ en dus } \Delta t \leq \frac{1}{2f_m},$$

dan laat zich het signaal $f(t)$ volledig uit de discrete samples $f_k := f(k \cdot \Delta t)$ met $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ reconstrueren.

De minimale frequentie $2f_m$ heet ook de *Nyquist-frequentie*, het interval $\Delta t = \frac{1}{2f_m}$ het *Nyquist-interval*. Let op dat er in de literatuur verschillende definities voor de Nyquist-frequentie en het Nyquist-interval gegeven worden, die soms om de factor 2 van elkaar afwijken.

Voor een CD-opname met een bandbreedte van 22 kHz hebben we dus een sampling frequentie van minstens 44 kHz nodig, terwijl voor een telefoon gesprek een sampling frequentie van 8 kHz voldoende is.

Reconstructie van een signaal uit gesampelde waarden

De interessante vraag is nu, hoe we een continu signaal $f(t)$ uit de discrete waarden f_k kunnen reconstrueren. De oplossing hiervoor is heel simpel, we maken gewoon een interpolatie van continue functies van een bepaalde vorm, te weten functies van de vorm $\frac{\sin(x)}{x}$, die we als Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls al eerder zijn tegengekomen.

Er laat zich aantonen dat men onder de voorwaarde van Shannon's aftast-theorema het oorspronkelijke signaal $f(t)$ terug vindt met behulp van de formule

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \frac{\sin(\frac{\omega}{2}(t - k\Delta t))}{\frac{\omega}{2}(t - k\Delta t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \frac{\sin(\frac{t}{\Delta t}\pi - k\pi)}{\frac{t}{\Delta t}\pi - k\pi}.$$

Hoe men tot deze formule komt en hoe het proces van sampling en interpolatie in zijn werk gaat, zullen we nu aan de hand van een voorbeeld toelichten.

Voorbeeld: Als voorbeeldfunctie bekijken we de functie

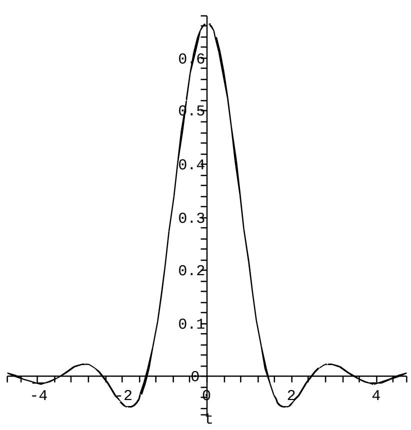
$$f(t) = \frac{2\sin(\pi t) - 2\pi t\cos(\pi t)}{\pi^3 t^3}$$

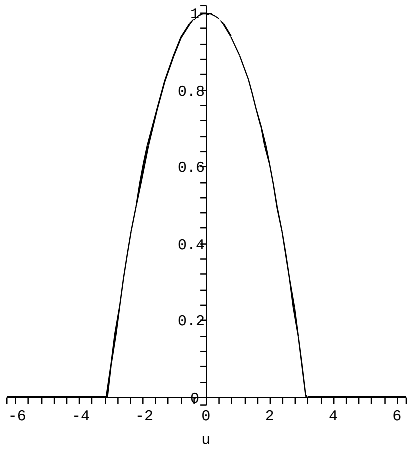
dan heeft $f(t)$ de Fourier getransformeerde

$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \begin{cases} 1 - (\frac{u}{\pi})^2 & \text{als} \quad |u| \leq \pi \\ 0 & \text{als} \quad |u| > \pi. \end{cases}$$

De functie $f(t)$ is natuurlijk verkregen als inverse Fourier transformatie van een functie die alleen maar op een eindig interval ongelijk aan 0 is.

In Figuur II.34 zijn de grafieken van $f(t)$ en $\mathcal{F}[f(t)]$ te zien.





Figuur II.34: Functie met Fourier getransformeerde van begrensde bandbreedte.

Als we $f(t)$ met tijdelijke afstanden van Δt sampeln, krijgen we de discrete waarden $f_k = f(k \cdot \Delta t) = f(t_k)$. De discrete functiewaarden f_k beschrijven we nu door de *sampling functie* van $f(t)$, namelijk

$$f_s(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \, \delta(t - t_k)$$

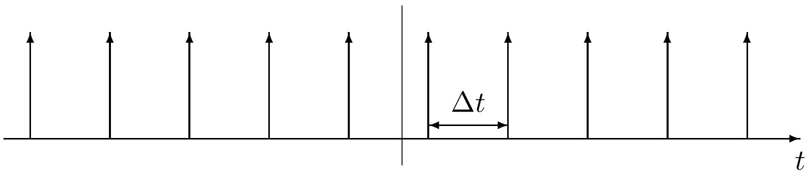
die op de tijdstippen t_k Dirac δ-functies met intensiteit $f_k = f(t_k)$ heeft.

We berekenen nu eerst de Fourier getransformeerde van de zogeheten Ш-functie, de speciale functie gegeven door

$$Ш(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k)$$

die op afstanden Δt gewone δ-functies met intensiteit 1 heeft (zie Figuur II.35).

Het symbool Ш voor de speciale functie Ш(t) is de cyrillische hoofdletter *Sja*. Deze wordt (blijkbaar) gekozen omdat hij uiterlijk op een rij van drie impulsen lijkt.



Figuur II.35: De speciale functie $\text{Ш}(t)$.

De functie $\text{Ш}(t)$ is periodiek met periode Δt en heeft dus een Fourier reeks van de vorm

$$\text{Ш}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}, \text{ waarbij } \omega = \frac{2\pi}{\Delta t} \text{ is.}$$

Voor de coëfficiënten c_k geldt

$$c_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \text{Ш}(t) e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\frac{\Delta t}{2}}^{\frac{\Delta t}{2}} \delta(t) e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{1}{\Delta t}.$$

Hieruit volgt dat

$$\text{Ш}(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega t}.$$

Uit de vorige les weten we dat de functie $e^{ik\omega t}$ de Fourier getransformeerde $2\pi\delta(u - k\omega)$ heeft, bij elkaar genomen volgt hieruit (met nog steeds $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$):

$$\mathcal{F}[\text{Ш}(t)] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(u - k\omega) = \omega \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega).$$

Omdat $f_s(t) = \text{Ш}(t) \cdot f(t)$ is, kunnen we de Fourier getransformeerde $F_s(u)$ van de gesampelde functie $f_s(t)$ nu met behulp van een convolutieproduct berekenen, waarbij we met $F(u) := \mathcal{F}[f(t)]$ de (niet bekende) Fourier getransformeerde van $f(t)$ noteren:

$$\begin{aligned} F_s(u) := \mathcal{F}[f_s(t)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[\text{Ш}(t)] * \mathcal{F}[f(t)] &= \left(\frac{\omega}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega) \right) * F(u) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(u - k\omega) * F(u) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(u - k\omega) \end{aligned}$$

omdat $\delta(u - k\omega) * F(u) = F(u - k\omega)$.

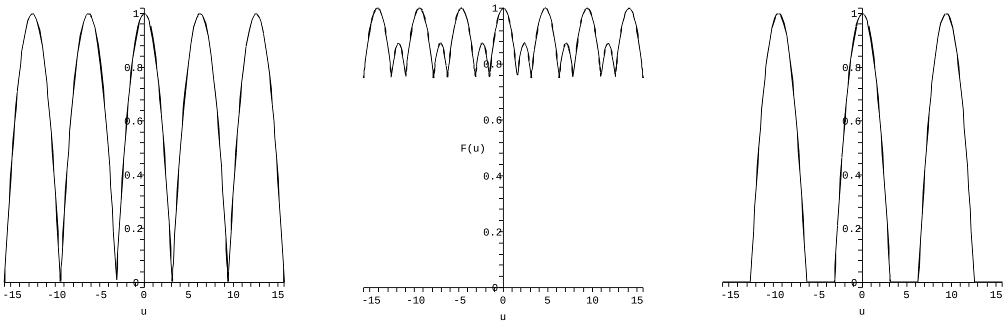
Dit betekent dat de functie $F_s(u)$ de som is van periodieke herhalingen van de functie $F(u)$ (geschaald met een factor $\frac{1}{\Delta t}$), waarbij de periode tussen de herhalingen juist ω is.

Als het nu lukt om $F(u)$ uit $F_s(u)$ te reconstrueren, dan kunnen we met behulp van de inverse Fourier transformatie ook $f(t)$ weer reconstrueren. Hier is het punt waar de Nyquist-frequentie in het spel komt: Als de periodieke herhalingen van $F(u)$ niet overlappen, dan kunnen we $F(u)$ inderdaad door vermenigvuldiging van $F_s(u)$ met een rechthoek-filter functie terug vinden. Hiervoor hebben we echter nodig, dat $\omega \geq 2u_m$ is, want dit is de lengte van het interval waarop $F(u) \neq 0$ is. Maar dit is precies de voorwaarde die in Shannon's aftast-theorema gegeven wordt.

De plaatjes in Figuur II.36 laten het effect van verschillende aftast-frequenties op de Fourier getransformeerde $F_s(u)$ zien. In het linker plaatje wordt precies met de Nyquist-frequentie gesampeld, en we zien dat de functie $F_s(u)$ juist uit kopieën van de Fourier getransformeerde $F(u)$ bestaat, zo als die in Figuur II.34 te zien is. Het is duidelijk dat zich de functie $F(u)$ uit $F_s(u)$ laat reconstrueren, door $F_s(u)$ met een geschikte rechthoek functie te vermenigvuldigen.

Hetzelfde geldt voor het rechter plaatje, waar met een frequentie hoger dan de Nyquist-frequentie gesampeld wordt. Hierdoor vallen tussen de kopieën van de functie $F(u)$ gaten waar $F_s(u) = 0$ is. Dit effect noemt men *oversampling*.

In het middelste plaatje is daarentegen het geval van *undersampling* te zien, de verschillende kopieën van $F(u)$ overlappen en worden gedeeltelijk bij elkaar opgeteld. De oorspronkelijke Fourier getransformeerde $F(u)$ is uit deze functie niet meer terug te vinden.



Figuur II.36: Effect van verschillende aftast-frequenties op de Fourier getransformeerde $F_s(u)$: aftasten met Nyquist-frequentie (links), undersampling (midden) en oversampling (rechts).

In het geval dat met een voldoende hoge frequentie gesampeld is, dus met $\omega \geq 2u_m$, vermenigvuldigen we $F_s(u)$ met de rechthoek-filter functie

$$r(u) := \begin{cases} 1 & \text{als} \quad |u| \leq \frac{\omega}{2} \\ 0 & \text{als} \quad |u| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Dan is $F(u) = \Delta t \cdot F_s(u) \cdot r(u)$ en dus volgens de eigenschap van het convolutieproduct:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(u)] = \Delta t \cdot \mathcal{F}^{-1}[F_s(u)] * \mathcal{F}^{-1}[r(u)].$$

We hadden $F_s(u)$ zo gedefinieerd dat $\mathcal{F}^{-1}[F_s(u)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\delta(t - t_k)$. Met behulp van de relatie $\mathcal{F}^{-1}[f(u)] = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f(-u)]$ tussen inverse Fourier transformatie en Fourier transformatie kunnen we ook de inverse Fourier transformatie van $r(u)$ makkelijk berekenen, dit hebben we in feite eerder al gedaan, het gaat om de Fourier getransformeerde van een rechthoek impuls van breedte $\omega = \frac{2\pi}{\Delta t}$:

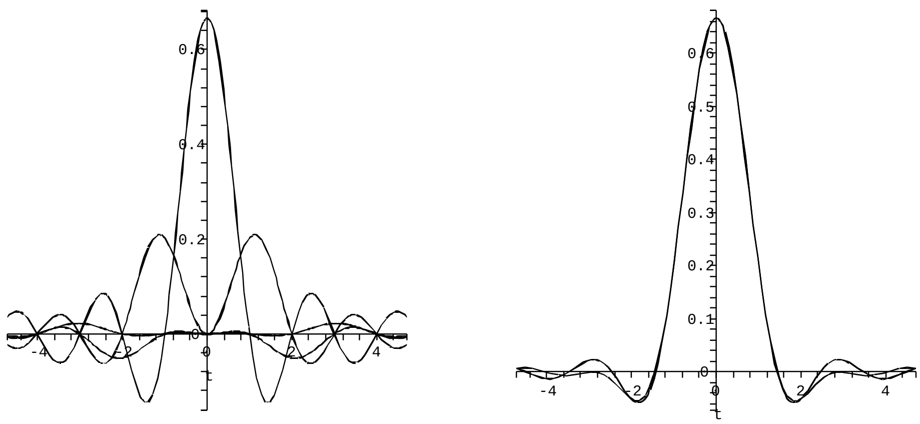
$$\mathcal{F}^{-1}[r(u)] = \frac{2}{2\pi}\frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{t} = \frac{\frac{\omega}{2}}{\pi}\frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t} = \frac{1}{\Delta t}\frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t}.$$

Als we alles samenvoegen en een beetje vereenvoudigen, krijgen we hieruit

$$\begin{aligned} f(t) = \Delta t \cdot \mathcal{F}^{-1}[F_s(u)] * \mathcal{F}^{-1}[r(u)] &= \Delta t \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k)\delta(t - t_k) \right) * \frac{1}{\Delta t}\frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \left(\delta(t - t_k) * \frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t} \right). \end{aligned}$$

De bijzondere eigenschap van de δ-functie met betrekking tot het convolutieproduct was dat $\delta(t - t_k) * f(t) = f(t_k)$, dus het convolutieproduct met een δ-impuls op tijdstip t_k reproduceert de functiewaarde van $f(t)$ op het tijdstip t_k. Hiermee vinden we uiteindelijk de boven aangegeven interpolatie formule voor de reconstructie van de functie $f(t)$ uit de gesampelde waarden $f(t_k)$:

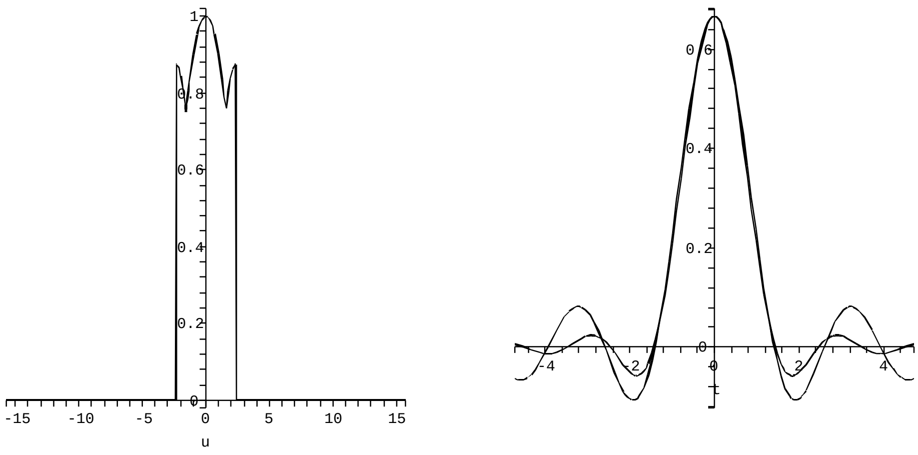
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t_k) \left(\delta(t - t_k) * \frac{\sin(\frac{\omega}{2}t)}{\frac{\omega}{2}t} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \, \frac{\sin(\frac{\omega}{2}(t - t_k))}{\frac{\omega}{2}(t - t_k)}.$$



Figuur II.37: Interpolerende functies en reconstructie door som van interpolerende functies.

In Figuur II.37 zijn de interpolerende functies $f(t_k)\frac{\sin(\frac{\omega}{2}(t-t_k))}{\frac{\omega}{2}(t-t_k)}$ voor $k = -3, \ldots, 3$ te zien, waarbij de functies voor k en $-k$ bij elkaar opgeteld zijn om symmetrische functies te krijgen. Het rechterplaatje laat de benadering van de originele functie $f(t)$ door de som van de interpolerende functies voor $k = -2, \ldots, 2$ zien. Het is duidelijk dat al voor deze lage waarde van k een erg goede benadering bereikt wordt die met groeiende k steeds beter wordt.

Wat gebeurt er nu als we een signaal met een te lage aftast-frequentie sampeln, dus bij undersampling? In dit geval worden de bijdragen van de frequenties boven $\frac{\omega}{2} = \frac{\pi}{\Delta t}$ afgebeeld op lagere frequenties en dit resulteert in een verandering van de functie $F_s(u)$ en dus ook van het gereconstrueerde signaal. Dit effect noemt men *aliasing*.



Figuur II.38: Aliasing in het frequentie domein en reconstructie bij undersampling.

In Figuur II.38 is de functie $f(t)$ uit het voorbeeld met de te lage frequentie $\frac{3}{2}u_m$ in plaats van de Nyquist-frequentie $2u_m$ gesampeld. Dit heeft tot gevolg dat de functie $F_s(u)$ zo als in het middelste plaatje van Figuur II.36 verandert, en het vermenigvuldigen met de rechthoek-filter lijdt tot een functie $\Delta t \cdot F_s(u) \cdot r(u)$ met te hoge waarden voor de lage frequenties, omdat hogere frequenties op deze lage frequenties afgebeeld worden. Als effect hiervan levert de reconstructie van de oorspronkelijke functie middels inverse Fourier transformatie een functie die niet snel genoeg afneemt, wat we duidelijk aan het te grote tweede maximum van de gereconstrueerde functie in het rechter plaatje van Figuur II.38 kunnen zien. Ook met een grotere waarde voor het aantal k van interpolerende functies wordt in dit geval geen betere benadering bereikt.

Om het *aliasing effect* te vermijden, worden signalen die met behulp van de discrete Fourier transformatie verwerkt moeten worden vooraf meestal door een low-pass filter gestuurd die te hoge frequenties (met betrekking tot de beoogde aftast-frequentie) wegsnijdt.

Belangrijke begrippen in deze les

- sampling, discretisering
- discrete Fourier transformatie

- trigonometrische interpolatie
- FFT: snelle Fourier transformatie
- Shannon's aftast-theorema
- Nyquist-frequentie, undersampling, oversampling

Opgaven

78. Bereken de coëfficiënten F_j van de discrete Fourier getransformeerde voor de volgende gesampelde waarden van de functie $f(t)$. In elk geval is $\Delta t = 1$.

(i)

k	0	1	2	3
$f(t_k)$	1	2	3	4

(ii)

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(t_k)$	1	2	3	4	0	0	0	0

79. Een sampling van de functie $f(t)$ met $N = 8$ en $\Delta t = 1$ geeft de volgende waarden:

$$f_k = f(t_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0, 4 \\ 1 & k = 1, 2, 3 \\ 0 & k = 5, 6, 7 \end{cases}$$

(i) Bepaal de coëfficiënten F_j van de discrete Fourier getransformeerde van $f(t)$.

(ii) Stel dat $f(t)$ periodiek met periode 8 is en dat de functie $g(t)$ gegeven is door $g(t) := f(t-3)$. Wat zijn de sampling waarden $g_k = g(t_k)$ van $g(t)$ voor $k = 0, 1, \ldots, 7$?

Bepaal de coëfficiënten G_j van de discrete Fourier getransformeerde van $g(t)$.

80. Zij $\{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ een gesampelde functie en zij $\{F_0, \ldots, F_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerde hiervan.

(i) Laat zien dat de (in $t = 0$) gespiegelde functie $\{f_{N-0}, \ldots, f_{N-(N-1)}\}$ de (in $\omega = 0$) gespiegelde Fourier getransformeerde $\{F_{N-0}, \ldots, F_{N-(N-1)}\}$ heeft.

(ii) Laat zien dat de complex geconjugeerde functie $\{\overline{f_0}, \ldots, \overline{f_{N-1}}\}$ de complex geconjugeerde en gespiegelde Fourier getransformeerde $\{\overline{F_{N-0}}, \ldots, \overline{F_{N-(N-1)}}\}$ heeft.

81. Zij $\{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ een gesampelde functie met *reële* waarden en zij $\{F_0, \ldots, F_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerde hiervan. Laat zien dat voor de discrete Fourier transformatie de volgende versie van de *Parseval identiteit* geldt:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |F_j|^2.$$

82. Zij $\{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ een gesampelde functie en zij $\{F_0, \ldots, F_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerde hiervan. We verschuiven F_j in het frequentiedomein om l posities, dit geeft de functie $G_j := F_{j-l}$. Laat zien dat $\{G_0, \ldots, G_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerde van de functie $\{g_0, \ldots, g_{N-1}\}$ is met

$$g_k = f_k \, e^{ikl\Delta\omega\Delta t} = f_k \, e^{i\frac{2\pi}{N}kl}.$$

83. Laten de gesampelde functies $\{f_0, \ldots, f_{N-1}\}$ en $\{g_0, \ldots, g_{N-1}\}$ de discrete Fourier getransformeerden $\{F_0, \ldots, F_{N-1}\}$ en $\{G_0, \ldots, G_{N-1}\}$ hebben. Laat zien dat het convolutieproduct

$$H_j := F_j * G_j = \sum_{l=0}^{N-1} F_l \, G_{j-l}$$

de discrete Fourier getransformeerde van de functie $h_k := N \cdot f_k \, g_k$ is.