

Deeltoets 1 (BKI 316)

Het tentamen is *open dictaat*, d.w.z. je mag het dictaat van de cursus (inclusieve je aantekeningen erin) tijdens het tentamen gebruiken.

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Opgave 1. (15 punten)

Zij $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de functie gegeven door

$$f(x, y) := (x + y) e^{-x^2 - y^2}.$$

- (i) In welke richting neemt $f(x, y)$ vanuit het punt $(x, y) = (1, 0)$ het snelst toe?
- (ii) In welke richting loopt de niveaукromme van $f(x, y)$ in het punt $(x, y) = (1, 0)$ (die dus op de hoogte $f(1, 0) = \frac{1}{e}$ ligt)?
- (iii) Geef de Taylor veelterm van graad 2 van $f(x, y)$ in het punt $(x, y) = (0, 0)$ aan.
- (iv) Bepaal de kritieke punten van $f(x, y)$.
- (v) Laat (bijvoorbeeld met behulp van de Hesse matrix) zien welke van de kritieke punten van $f(x, y)$ een (lokaal) maximum en welke een (lokaal) minimum van de functie zijn.

Opgave 2. (12 punten)

De temperatuur $T = T(x, y, z)$ voor de punten op het oppervlak van een kogel van straal 1 rond de oorsprong $(0, 0, 0)$ (d.w.z. voor de punten (x, y, z) met $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) is gegeven door de functie

$$T(x, y, z) = xz + yz.$$

Bepaal de *hot spots* op de kogel, dus de punten met maxima van de temperatuur.

Merk op: Aan de hand van de functiewaarden gaat men makkelijk na, welke punten maxima en minima van de temperatuur zijn, het is dus niet nodig om de tweede afgeleiden te bepalen.

Opgave 3. (15 punten)

Het zwaartepunt van een halfcirkel moet in twee verschillende coördinaatstelsels bepaald worden. Hiervoor kijken we naar de halfcirkel H van straal 1 die symmetrisch rond de y -as en boven de x -as ligt:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$

- (i) Beschrijf H als normaalgebied in de gewone $x - y$ -coördinaten.
- (ii) Beschrijf H met behulp van poolcoördinaten, d.w.z. geef grenzen voor r en φ aan zo dat de punten (r, φ) de hele halfcirkel doorlopen.

Om symmetrieredenen zal het duidelijk zijn dat het zwaartepunt van H op de y -as ligt en dus x -coördinaat 0 heeft. De y -coördinaat van het zwaartepunt wordt bepaald, door de functie $f(x, y) = \frac{y}{A}$ over H te integreren, waarbij A het oppervlak van H aangeeft.

- (iii) Bepaal de y -coördinaat $\bar{y}$ van het zwaartepunt door de integraal $\bar{y} = \frac{1}{A} \int_H y \, dx \, dy$ in gewone coördinaten uit te werken.
- (iv) Bepaal $\bar{y}$ door de integratie over $\frac{y}{A}$ in poolcoördinaten uit te voeren.

Opgave 4. (10 punten)

Zij $f(z)$ de complexe functie gegeven door

$$f(z) := e^{iz}.$$

- (i) Bepaal **alle** waarden z zo dat $f(z) = i$.
- (ii) Bepaal voor $z = x + iy$ reële functies $u(x, y)$ en $v(x, y)$ zo dat $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$.
- (iii) Ga na dat de functies $u(x, y)$ en $v(x, y)$ uit (ii) voldoen aan de vergelijkingen

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

- (iv) Geef een primitieve functie van $f(z)$ aan, d.w.z. vind een functie $F(z)$ zo dat $F'(z) = f(z)$.

Opgave 5. (8 punten)

Toon (met behulp van de complexe exponentiële functie) aan dat

$$\begin{aligned} \sin(x + y + z) &= \sin(x) \cos(y) \cos(z) + \cos(x) \sin(y) \cos(z) \\ &\quad + \cos(x) \cos(y) \sin(z) - \sin(x) \sin(y) \sin(z). \end{aligned}$$

Hint: Voor de complexe exponentiële functie geldt $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.

Succes ermee!