

Deeltoets 2 (BKI 316)

Het tentamen is *open dictaat*, d.w.z. je mag het dictaat van de cursus (inclusieve je aantekeningen erin) tijdens het tentamen gebruiken.

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen, antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Opgave 1. (10 punten)

De functie $f(t)$ is gegeven door

$$f(t) := 3 \cos(2t) + \sin(3t).$$

- (i) Maak een schets van de functie $f(t)$.
- (ii) Wat is de periode van $f(t)$?
- (iii) Geef de reële en de complexe schrijfwijze van de Fourier reeks van $f(t)$ aan.
(Hint: Dit kan zonder een integraal te berekenen.)

Opgave 2. (15 punten)

Zij $f(t)$ de functie gegeven door

$$f(t) := \begin{cases} 1-t & \text{als } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{als } t < 0 \text{ of } t > 1. \end{cases}$$

- (i) Maak een schets van de functie $f(t)$.
- (ii) Laat zien dat voor de Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ van $f(t)$ geldt dat

$$F(u) = \frac{1}{u^2}(1 - e^{-iu}) - \frac{i}{u}.$$

Opgave 3. (10 punten)

De functie $g(t)$ met $g(t) = t$ op het interval $[0, 1]$ en $g(t) = 0$ elders heeft een nauw samenhang met de functie $f(t)$ uit Opgave 2. Er geldt namelijk dat $g(t) = f(-t+1)$, want $g(t)$ wordt verkregen door $f(t)$ in de y -as te spiegelen en vervolgens om 1 naar rechts te schuiven.

- (i) Stel $f(t)$ is een willekeurige functie en de Fourier getransformeerde $F(u) = \mathcal{F}[f(t)]$ van $f(t)$ is al bekend. Laat zien dat voor de Fourier getransformeerde $G(u) = \mathcal{F}[g(t)]$ van de functie $g(t) := f(-t+1)$ geldt dat

$$G(u) = e^{-iu} \cdot F(-u).$$

- (ii) Bepaal (bijvoorbeeld met behulp van deel (i) en Opgave 2) de Fourier getransformeerde $G(u) = \mathcal{F}[g(t)]$ van de functie

$$g(t) := \begin{cases} t & \text{als } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{als } t < 0 \text{ of } t > 1. \end{cases}$$

Opgave 4. (10 punten)

Voor een geheel getal N neemt de stochast X de waarden $1, 2, \dots, 2N$ volgens een uniforme verdeling aan. De stochast Y is gedefinieerd door $Y = 0$ als de waarde van X even is en $Y = 1$ als de waarde van X oneven is.

(i) Laat zien dat $H(X | Y) = H(X) - 1$ en dat $H(Y | X) = 0$.

(ii) Is het algemeen voor twee stochasten X en Y mogelijk dat geldt:

$$H(X | Y) = H(X) \quad \text{en} \quad H(Y | X) = 0?$$

Zo ja, geef een voorbeeld, zo nee, geef een reden.

(Hint: Voor de voorwaardelijke entropie geldt $H(X | Y) = H(X, Y) - H(Y)$.)

Opgave 5. (15 punten)

We beschrijven twee mogelijke uitkomsten K en M door twee HMM's λ_1, λ_2 met (telkens) twee states. De beginverdelingen voor de states zijn bij beide modellen uniform, dus $\pi = (0.5, 0.5)$. Het model λ_1 heeft de overgangskansen A_1 en emissiekansen B_1 , het model λ_2 de overgangskansen A_2 en emissiekansen B_2 gegeven door:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}, \quad B_1 := \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}; \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad B_2 := \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}.$$

(i) Bepaal voor beide modellen λ_1 en λ_2 de kans $p(O | \lambda)$ op de waarneming $O = KMM$.

(ii) Bepaal voor het model λ_2 de optimale rij q van states voor de waarneming $O = KMM$ en geef de kans $p(O, q | \lambda_2)$ op de waarneming bij deze rij van states aan.

Succes ermee!