

Getallen van Euler, Bernoulli en Springer voor Coxetergroepen en ruimtes van morsificaties: rekenen met slangen

Vladimir I. Arnol'd

12 juni 2004

Dit is een vertaling van :

V.I. Arnold: *Nombres d'Euler, de Bernoulli et de Springer pour les groupes de Coxeter et les espaces de morsification: le calcul des serpents*, Leçons de mathématiques d'aujourd'hui volume 1, présentées par Éric Charpentier et Nicolas Nikolski, Cassini Paris 2000.

Het is een getrouw verslag van een lezing die Arnold gaf aan de Universiteit van Bordeaux op 12 mei 1993.



Vladimir Arnol'd

Eerste deel: de klassieke rij van Euler-Bernoulli

De driehoek van Euler-Bernoulli.

Om te beginnen ga ik spreken over een wiskundig object dat teruggaat tot de tijd van Bernoulli en Euler, maar dat verband houdt met singulariteitentheorie, de topologie van functieruimten, algebraïsche meetkunde, de theorie van Coxeter-groepen, en zelfs met getaltheorie (enkele zeer vreemde eigenschappen van de getallen waarover ik ga spreken zijn pas zeer kort geleden ontdekt). Het is een rij getallen, klassiek, een beetje zoals de rij van Fibonacci, of rekenkundige of meetkundige rijen, enz., en die opduikt in verscheidene problemen. Ik ken hem van buiten, het is de rij

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots$$

Zo begint het. Men kan al raden wat er vervolgens komt: 2. Experts kunnen nog de volgende term raden: zoals in veel rijen komt na de 2 een 5. Na 5 komt in de rij van Catalan-getallen 14, in de rij van Bell-getallen 15, maar hier, deze rij onderscheidt zich door het feit dat na 5 een 16 komt. Dat geeft dus

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 16 \quad \dots$$

Dit begin is nog niet genoeg om met zekerheid de rij te herkennen, maar de volgende term is bijna altijd voldoende: dat is 61. Als je 61 ziet, dat is een zeldzaam getal, je kunt dan bijna zeker zeggen dat het de rij is waarover ik het heb. Maar ik ken echter toch nog twee of drie rijen die zo beginnen. Daar zijn de volgende termen 272 en 1385 (in een kwantumtheorie is het 1378, dan is het een iets andere rij). Ziehier:

$$\begin{array}{cccccc} K_0 = 1 & K_1 = 1 & K_2 = 1 & K_3 = 2 & K_4 = 5 & \\ K_5 = 16 & K_6 = 61 & K_7 = 272 & K_8 = 1385 & \dots & \end{array}$$

Fig. 1: de klassieke rij van Euler-Bernoulli

Dit zijn klassieke getallen die men zou moeten doceren op de basisschool (dat doet men nog niet), of wel in het eerste jaar van de universiteit, omdat, zoals ik zal laten zien, er veel problemen zijn waar je die getallen tegenkomt. Maar helaas, de meeste wiskundigen kunnen deze rij niet herkennen (er zijn natuurlijk experts, maar weinig).

Ik ga beginnen met een klassiek algoritme, zo klassiek dat ik zelfs niet weet wie het bedacht heeft (misschien Euler, misschien Bernoulli, of misschien een Fransman): het is een driehoek die veel lijkt op de driehoek van Pascal.

Het begint dus met 1 en het heeft de vorm van een driehoek zoals die van Pascal, maar het is niet hetzelfde omdat men hier links een 1 zet maar rechts een

0: het is niet symmetrisch.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 0 \end{array}$$

We hoeven alleen maar verder te gaan en jullie kunnen raden hoe ik tewerk ga:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & & & 2 & 2 & 1 & 0 \\ & & 0 & 2 & 4 & 5 & 5 & & \\ 16 & 16 & 14 & 10 & 5 & 0 & & & \\ 0 & 16 & 32 & 46 & 56 & 61 & 61 & & \end{array}$$

Fig. 2: de driehoek van Euler-Bernoulli

Zeker, de meesten van jullie hebben genoeg aan de eerste zes rijen, maar ik zet er toch de zevende bij, om alle twijfel weg te nemen dat je echt aan 61 toekomt. Ieder getal in deze driehoek is gelijk aan de som van de getallen in de rij erboven die links ervan staan, of rechts ervan (dat wisselt elke rij).

Bijvoorbeeld: de 2 op de tweede plaats in de derde rij is gelijk aan $1+1$, de som van de getallen rechts ervan in de rij erboven. De 4 in het midden van de vierde rij is gelijk aan $2+2$ (men rekent niet de 1 mee, die er rechts van staat). De derde rij eindigt met een 0 want daar staat niets rechts boven. En men gaat zo verder door een achtste rij toe te voegen, enz. Het is een driehoek die ik de driehoek van Euler-Bernoulli heb genoemd, omdat Pascal hem niet heeft bekeken, en Euler en Bernoulli evenmin. De rechterkant noem ik de kant van Euler, omdat hij de klassieke getallen van Euler oplevert,

$$(E_n) = 1, 1, 5, 61, \dots$$

De linkerkant, die ik de kant van Bernoulli noem, geeft een rij (T_n) van getallen ("de getallen van de tangens-functie", zie verderop) die nauw verwant zijn aan de klassieke Bernoulli-getallen (B_n) ,

$$(T_n) = 1, 2, 16, \dots$$

De (B_n) zijn rationale getallen, de (T_n) gehele getallen; het zijn niet precies de noemers van de (B_n) maar wel bijna, want

$$B_n = \frac{2nT_{n-1}}{4^n(4^n - 1)} \quad (n \geq 1). \tag{1}$$

En je vindt de rij (K_n) waarover ik het straks had door om de beurt een E_n en een T_n te nemen:

$$\begin{aligned}(K_n) &= E_0, T_0, E_1, T_1, E_2, T_2, E_3, \dots \\ &= 1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, \dots\end{aligned}\tag{2}$$

Deze driehoek geeft een combinatorische definitie van deze getallen. Dat geeft reeds de oplossing van veel interessante problemen. Bijvoorbeeld, dit procede staat je toe onmiddellijk de Taylor-ontwikkeling van de secans- en tangens-functie op te schrijven, en dat is voor studenten nogal moeilijk.

Als je schrijft

$$\sum_{i \geq 0} K_i \frac{t^i}{i!} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{2t^2}{6} + \frac{5t^4}{24} + \dots$$

ja dan is dat echt de som van secans t (d.w.z. $1/\cos t$) en van tangens t :

$$\sum_{i \geq 0} K_i \frac{t^i}{i!} = \frac{1}{\cos t} + \tan t\tag{3}$$

Dat is een stelling van een Fransman, André, uit de negentiende eeuw. Daarmee en met de driehoek van Euler-Bernoulli kun je aan studenten uitleggen hoe ze heel snel de reeksontwikkelingen van secans en tangens kunnen uitrekenen. Ik geef hier geen bewijs, dat is trouwens niet moeilijk (het is een heel mooie opgave); in alles wat ik ga vertellen zou het tamelijk eenvoudig zijn de bewijzen te reconstrueren, en er zijn er bij die nogal interessant zijn.

Slangenrekening

Nu ga ik, om een andere smaak te geven van deze rij (K_n) , een geheel totaal ander probleem beschouwen. We gaan reële functies van één veranderlijke vanuit topologisch gezichtspunt classificeren. Voor iedere functie bestaan (eventueel) kritieke *punten* (ik neem aan dat die allemaal niet-ontaard zijn), er zijn kritieke *waarden* (de waarden van de functie in de kritieke punten), en er zijn ook nog voorwaarden op oneindig. Laten we met n het aantal kritieke punten aangeven.

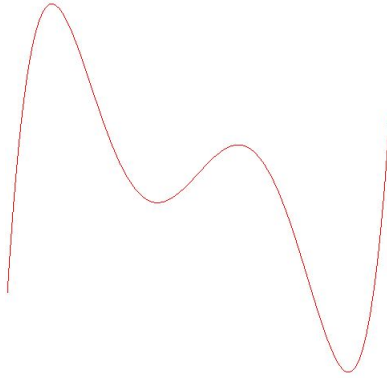


Fig. 3. Een slang (hier $n = 4$).

Zo'n grafiek noem ik een slang (daar begint de "slangenrekening"). De klassificatie gaat op transformatie van (afhankelijke en onafhankelijke) variabelen na, die de oriëntatie niet veranderen. Tenslotte veronderstel ik dat de functie zich op oneindig gedraagt als de veelterm x^{n+1} . Het probleem is het aantal topologische types te bepalen, dus het aantal banen onder de groep van de produkten van diffeomorfismen die de oriëntatie van de x - en de y -as behouden, op de ruimte van functies die alleen maar niet-ontaarde kritieke punten hebben en waarvan alle kritieke waarden verschillend zijn.

Als $n = 0$ is er geen kritiek punt en gaat het op oneindig zoals x , dus is het een functie zoals in Fig. 4,

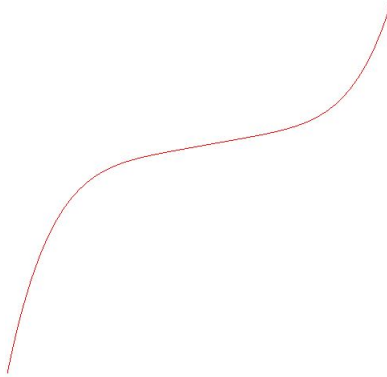


Fig. 4. De slang zonder kritiek niveau.

dus het antwoord (het aantal topologische types) is 1. Als $n = 1$ is er een enkel kritiek punt en op oneindig gaat het zoals x^2 , dus ook daar is er maar één enkele

mogelijkheid

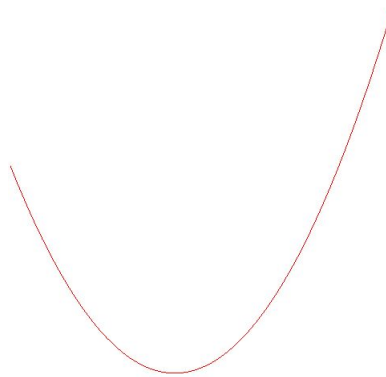


Fig. 5. De slang met één kritiek niveau.

en het antwoord is weer 1.

Voor $n = 2$ heb je twee kritieke punten, en op oneindig gaat het als x^3 ; naar $-\infty$ is het negatief, naar $+\infty$ is het positief, dus de kritieke waarden zijn: eerst een maximum en daarna een minimum.

Dus daar weer één enkele mogelijkheid:

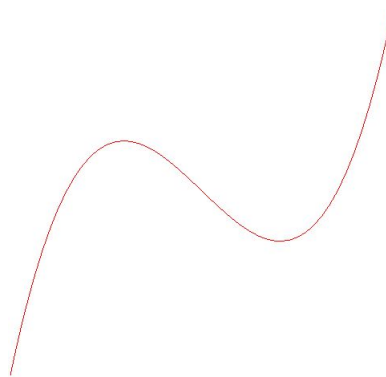


Fig. 6. De slang met twee kritieke niveaus.

Jullie zien, je hebt al:

$$1 \quad 1 \quad 1$$

en je kunt de rest wel raden. We gaan er toch nog een paar doen: we moeten echt een beetje werken. Voor $n = 3$ gaat het op oneindig als bij x^4 , dus de eerste

kritieke waarde is een minimum, dan komt er een maximum. Tot zover is er geen keus. Maar dan komt er een minimum, er daarvoor zijn er twee mogelijkheden: ofwel het ligt hoger dan het eerste, ofwel het ligt lager.

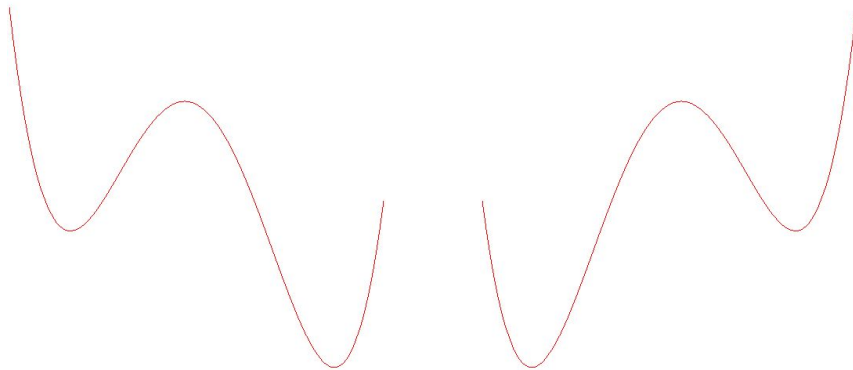


Fig. 7. De twee slangen met drie kritieke niveaus.

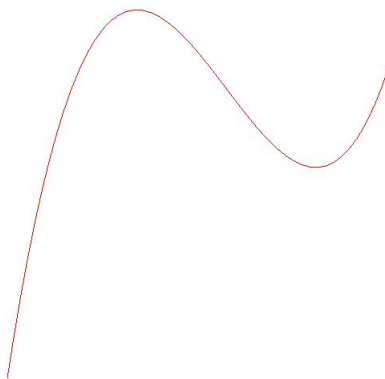
En deze twee mogelijkheden zijn niet equivalent, de ene kan niet in de andere worden getransformeerd door diffeomorfe coördinatentransformaties die de oriëntaties behouden. Dus voor $n = 3$ is het antwoord 2.

We hebben dus al

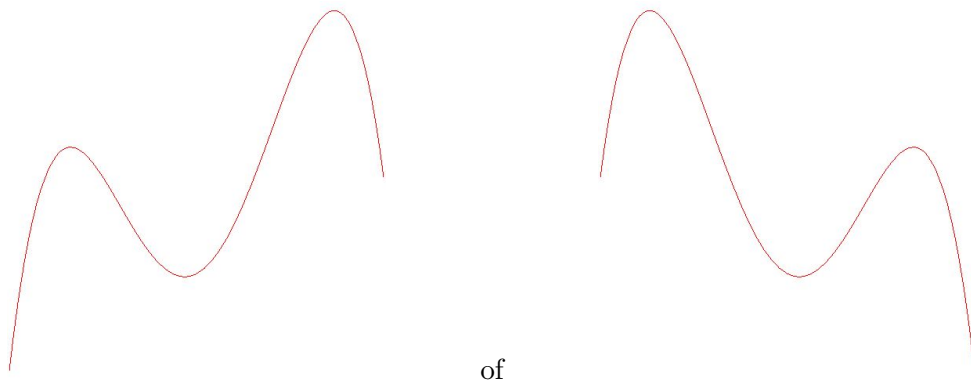
$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 2$$

maar dat is niet genoeg, we moeten nog een paar voorbeelden bekijken.

Voor $n = 4$ begint het als volgt: je komt van $-\infty$ (zoals x^5), dan is er een



maximum, daarna een minimum. Daarna komt er een maximum, en dat geeft al twee mogelijkheden: dat kan hoger of lager liggen dan het vorige.



Na dit maximum komt er een minimum. Als het tweede maximum lager lag dan het eerste zijn er nu twee mogelijkheden voor het tweede minimum (hoger of lager dan het eerste):

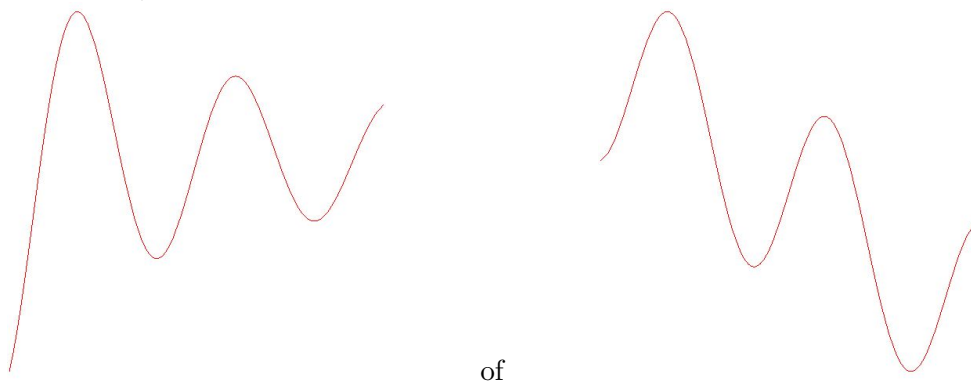


Fig. 8a. Twee slangen met vier kritieke niveaus.

en als het tweede maximum boven het eerste lag zijn er drie mogelijkheden voor het tweede minimum:

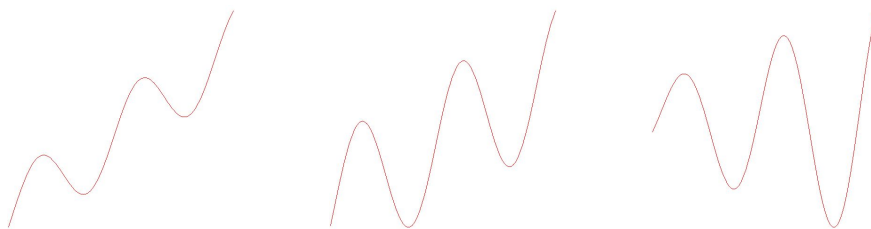


Fig. 8b. De drie andere slangen met vier kritieke niveaus.

Je moet dus zo tellen: 2 gevallen + 3 gevallen = 5 gevallen. Men vindt op dezelfde manier 16 slangen met 5 kritieke punten. We ontdekken zo de volgende *stelling*:

Stelling 1 *Het aantal topologische types wordt gegeven door de rij (K_n) van Euler-Bernoulli.*

Men kan die dus berekenen door de driehoek van Euler-Bernoulli te gebruiken ofwel de genererende functie $\sec t + \tan t$.

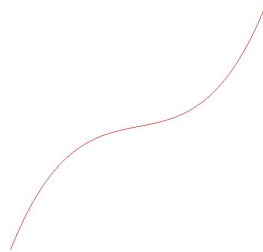
In werkelijkheid is het bewijs niet zo eenvoudig, maar voor alle normale mensen (d.w.z. voor iedereen behalve wiskundigen) is het duidelijk dat het waar is.

Morsificatie.

Nu ga ik een iets algemener probleem formuleren, dat ik trouwens niet kan oplossen. Je kunt het stellen in lokaal of globaal kader. Om deze ideeën uit te leggen aan wie geen ervaring hebben met singulariteitentheorie moet je met het globale probleem beginnen, dat minder fundamenteel is maar gemakkelijker te begrijpen. Stel je hebt een variëteit M , van willekeurige dimensie, en zeg compact. Je bekijkt de vectorruimte E van alle reële functies op M van klasse C^∞ . Om een tekening te maken stel ik hem voor als een schijf (maar in werkelijkheid is hij een hele ruimte en heeft hij oneindige dimensie). De punten van deze schijf zijn functies.

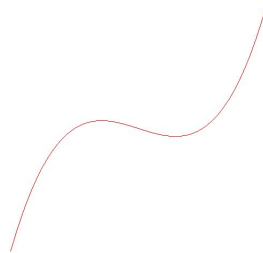
Onder deze functies onderscheidt men de generieke functies van Morse-type en de niet-generieke functies. Een functie is van Morse-type als al zijn kritieke punten (de punten waar de gradiënt van de functie nul is) niet-ontaard zijn (d.w.z. de kwadratische functie die je krijgt door de kwadratische termen in de Taylorreeks in dit punt te beschouwen is niet-ontaard), en als bovendien alle kritieke waarden verschillend zijn (M is compact, dus er is een eindig aantal kritieke waarden voor een functie met niet-ontaarde kritieke punten). Het is welbekend dat de Morsefuncties een open overal dicht deel vormen van de functieruimte E , en het is eveneens bekend dat het complement een hyperoppervlak van E is (“discriminant” geheten), d.w.z een deelvariëteit van E van codimensie 1.

Inderdaad, om een functie als deze,



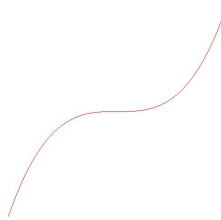
$$y = x^3 + \lambda x, \lambda > 0.$$

continu te transformeren in een functie als deze



$$y = x^3 + \lambda x, \lambda < 0.$$

moet je noodzakelijkerwijs een tussenstadium passeren zoals dit



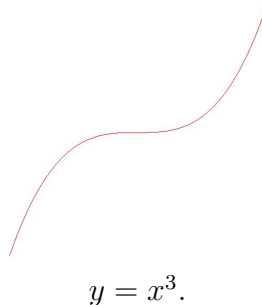
$$y = x^3.$$

dat een dubbel kritiek punt heeft. Dus om van een type Morsefunctie naar een ander over te gaan moet je de discriminant passeren, hetgeen bewijst dat de discriminant een hyperoppervlak is, en dit hyperoppervlak verdeelt de functieruimte in stukken die verzamelingen van Morsefuncties zijn en die ook banen zijn onder

de werking van de groep van diffeomorfismen van M en van de lijn van de functiewaarden. Als men twee punten van de functieruimte E beschouwt die kunnen worden verbonden door een weg die de discriminant niet snijdt, dan zijn die twee functies equivalent omdat men van de ene naar de andere kan komen met kleine stapjes, door homotopie, zelfs door isotopie, en omdat wanneer je een Morsefunctie hebt, en een andere dicht genoeg daarbij, je een diffeomorfisme kunt vinden dat de tweede overvoert in de eerste. Je moet echter wel wat werk verzetten om dat te bewijzen, dat is wat men het Lemma van Morse noemt, en zelfs iets algemeners, maar dat is mogelijk en welbekend.

Dus ons probleem is: de klassificatie van banen onder de werking van de diffeomorfismengroep op de functieruimte; onder deze banen zijn singuliere banen die met de discriminant corresponderen, en er zijn open banen, grote banen. De klassificatie van de grote banen, dat is de klassificatie van de types Morsefuncties waarvan we zojuist een voorbeeld hebben behandeld van functies op \mathbb{R} . In het algemene geval lijkt de discriminant op een algebraïsche variëteit, omdat hij gedefiniëerd wordt door min of meer algebraïsche vergelijkingen in de ruimte van Taylor-reeksen; het is in de grond een algebraïsche variëteit van oneindige dimensie. Maar het is nodig wat preciezer te zijn. Deze discriminant wordt gestratificeerd door het type van de singulariteiten die men tegenkomt.

Er is deze kubische singulariteit:



de eenvoudigste, die correspondeert met een algemeen punt van de discriminant, maar er zijn ook snijpunten van twee takken van de discriminant die corresponderen met functies met twee kubische punten (misschien met verschillende kritieke waarden). Er zijn nog andere typen singulariteiten, zoals bijvoorbeeld $y = x^4$, enz. Er is een hele stratificatie: dat hyperoppervlak, zeg Σ (de discriminant) is samengesteld uit gladde stukken van verschillende dimensies die strata worden genoemd, en deze strata klassificeren de types singulariteiten.

Ik ga een van die types beschouwen. Ik neem een functie, een punt van de discriminant, die correspondeert met wat heet een singulier punt van eindige co-

dimensie, dat wil zeggen hij ligt op een stratum van de discriminant van eindige codimensie in E : dat correspondeert met het feit dat er in dat punt slechts een eindig aantal enkelvoudige punten (Morse-punten) bijeen zijn gekomen. Bijvoorbeeld in het punt x^3 zijn twee enkelvoudige kritieke punten bij elkaar gekomen, voor x^4 zijn dat er drie. Het is net zo voor functies van meer veranderlijken: men kan zeggen dat een functie van meerdere veranderlijken die geen Morse-functie is het resultaat is van het samenklappen van verscheidene Morse-kritieke punten, en dit aantal der kritieke punten die in hetzelfde punt zijn samengesmolten heet het Milnor-getal. Het wordt genoteerd met μ . Men kan het definiëren als de dimensie van het quotient van de algebra van Taylor-reeksen naar het ideaal voortgebracht door de partiële afgeleiden van onze functie:

$$\mathbb{R}[[x]] / \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \simeq \mathbb{R}^\mu. \quad (4)$$

Men neemt de oorsprong van de lokale coördinaten in het beschouwde singuliere punt en men vervangt de ring van kiemen van functies in de oorsprong door de Taylor-reeksen. Ik veronderstel hier dat deze dimensie μ eindig is. Er zijn gevallen waar dat niet zo is: bijvoorbeeld de functie van twee veranderlijken $f(x, y) = x^2$, waarvoor het quotient oneindige dimensie heeft; maar als je er y^3 bij optelt, d.w.z. als je $x^2 + y^3$ neemt, dan is $\mu = 2$ (er zijn twee kritieke punten samengesmolten). Ik zal aannemen dat μ eindig is, en dan bewijst men de volgende stelling (de stelling van versele deformatie: het is een verlate versie van Lemma IV uit het proefschrift van Poincaré): *de structuur van Σ in dat punt is essentiël van eindige dimensie*.

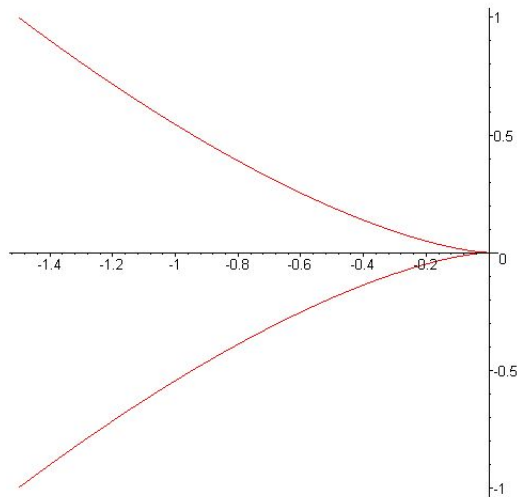
Nauwkeuriger: Σ is in dat punt het Cartesisch produkt van een algebraïsch (hyper)oppervlak in de ruimte \mathbb{R}^μ en een ruimte van oneindige dimensie. Het stratum van Σ in dat punt is het produkt van een stratum in dat eindig-dimensionale oppervlak met de oneindig-dimensionale ruimte, maar langs die oneindig-dimensionale ruimte gebeurt niets interessants. Dus kun je een afbeelding beschouwen van de eindig-dimensionale ruimte naar de functieruimte die transversaal is op Σ , en het spoor van Σ in die afbeelding, een lokale inbedding van \mathbb{R}^μ in de functieruimte, wordt een algebraïsch model voor Σ .

Een afbeelding van een eindig-dimensionale ruimte naar de functieruimte is wat men noemt een familie van functies; de coördinaten op de eindig-dimensionale ruimte heten parameters, en ik noteer ze met $\lambda \in \mathbb{R}^\mu$. De verzameling van de λ -waarden waarvoor de functie $A(\lambda)$ niet een Morse-functie is heet de discriminant van de familie A van functies. In de parameter ruimte (de basisruimte van de familie) heeft men zo een model van de discriminant Σ dat in de oneindig-dimensionale ruimte wordt gereproduceerd door gewoon een product te nemen met iets van oneindige dimensie maar triviaal, glad. Alle topologie is daar, in de basisruimte. $A(\lambda)$ heet een versele deformatie van de gekozen functie.

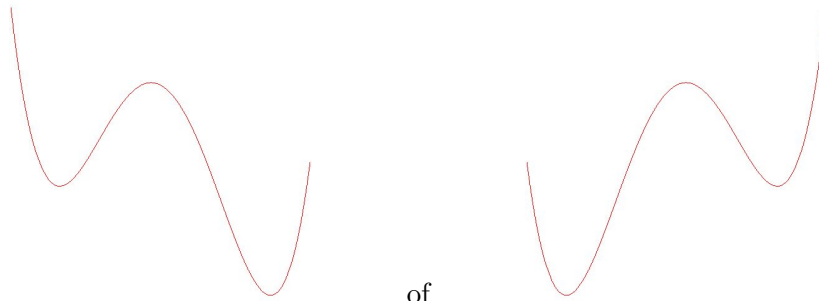
Bijvoorbeeld, voor het eenvoudigste geval, $x \mapsto x^3$, is de versele deformatie $(x, \lambda_1, \lambda_2) \mapsto x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$, een familie met twee parameters (het is nutteloos een term in x^2 toe te voegen, want je kunt die verwijderen door een translatie van de onafhankelijke variabele x , en tot de gegeven vorm terugkomen). Als men translaties langs de rechte der functiewaarden toelaat dan is λ_2 niet van belang en kun je je beperken tot een familie met één parameter $(x, \lambda_1) \mapsto x^3 + \lambda_1 x$. Voor x^4 is de versele deformatie $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$ en die heeft twee parameters.

De discriminant correspondeert dan met de waarden van (λ_1, λ_2) waarvoor er hetzij ontaarde kritieke punten zijn, hetzij twee gelijke kritieke waarden. Laten we eens zien wat dat betekent in het (λ_1, λ_2) -vlak:

Allereerst is x een kritiek punt: $4x^3 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$; vervolgens moet, opdat dit kritieke punt ontaard is, de volgende afgeleide er nul zijn: $12x^2 + 2\lambda_1 = 0$, dus $\lambda_1 = -6x^2$ en $\lambda_2 = 8x^3$ en men krijgt in het (λ_1, λ_2) -vlak een half-kubische parabool als volgt:



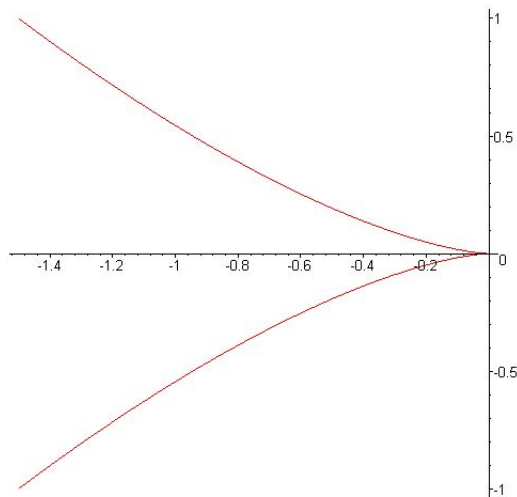
Anderzijds, voor $8\lambda_1^3 + 27\lambda_2^2 < 0$ is de grafiek van de functie



of

en de conditie dat de kritieke waarden gelijk zijn is natuurlijk dat de lineaire term, die de symmetrie verbreekt, er niet is, d.w.z. dat $\lambda_2 = 0$: dat is de halve negatieve λ_1 -as.

Dus voor het geval van de familie $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2$ ga je in het (λ_1, λ_2) -vlak kijken, en in dat vlak is de discriminant



(op de positieve λ_1 -as is ook een bifurcatie maar in het complexe kader, niet in het reële kader).

Ieder punt van het vlak stelt een functie voor en men kan er de grafiek van tekenen. De gedaante van de grafiek is dezelfde voor alle punten in elk van de gebieden die door de discriminant worden begrensd (zie fig. 9).

Voor een gegeven kritiek punt (een functie die tot Σ behoort) heten de punten die in het inwendige van de componenten van het complement van de discriminant liggen de *morsificaties* van dit kritieke punt. Het zijn de Morse-functies dichtbij deze niet-generieke functie.

Bijvoorbeeld: als ik de oorsprong van het (λ_1, λ_2) -vlak neem (dat is de functie x^4 , de meest ontaarde), dan zijn zijn morsificaties de functies $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2$ met (λ_1, λ_2) dicht bij 0 en buiten (het model van) de discriminant: in dit voorbeeld zijn er drie types van (drie types morsificaties). Onder deze morsificaties zijn er die het maximale aantal kritieke punten hebben (in dit voorbeeld is dat drie). Die noemt men M-morsificaties, “M” voor maximum.

Dit is de definitie die door Petrovski is ingevoerd in de theorie van reëel algebraïsche krommen voor het 16e Hilbert-probleem, waar het gaat om het klassificeren van ovals (dat lijkt veel op wat hier gebeurt, behalve dat het hier niet om

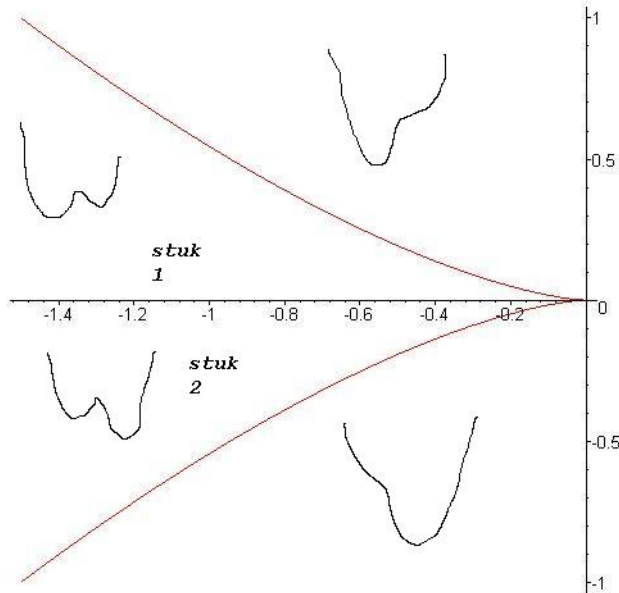


Fig. 9: De discriminant en de topologische typen van de versele deformatie van x^4

krommen maar om functies gaat).

In ons geval zijn er twee types M-morsificaties, corresponderend met de stukken 1 en 2 (morsificaties met drie kritieke punten). Gebied nummer 3 correspondeert met morsificaties met een enkel kritiek punt: de twee andere zijn complex, dus je ziet ze niet. (De M-morsificaties zijn die waarvoor de μ kritieke punten allemaal in het reële domein zichtbaar zijn).

Men verkrijgt in dit voorbeeld het volgende resultaat: het aantal verschillende M-morsificaties voor x^4 is gelijk aan 2. Net zo kan men de hele rij van functies x^{n+1} (van één variabele) beschouwen, en de rij van aantallen M-morsificaties van deze rij is de rij (K_n) .

Ik kan nu het algemene probleem formuleren dat ik beloofd heb te stellen. In de singulariteitentheorie heeft men een classificatie van de singulariteiten van functies van meerdere veranderlijken (niet slechts van één veranderlijke). Tewerkgaand als straks kan men aan een willekeurige singulariteit van een functie van meerdere veranderlijken die van eindige codimensie is (d.w.z. men neemt een functie f in n veranderlijken en een punt zodanig dat de dimensie van de algebra $\mathbb{R}[[x_1, \dots, x_n]] / \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ over \mathbb{R} in dat punt eindig is) een getal toekennen, het aantal van zijn maximale morsificaties. Probleem: dat aantal (M-morsificaties) vinden voor een willekeurig stratum, d.w.z. voor elke singulariteit van eindige co-

dimensie.

Het blijkt dat de klassificatie van de singulariteiten van functies van meerdere veranderlijken verband houdt met veel objecten uit verscheidene delen van de wiskunde: met de klassificatie van simpele Lie-algebra's, ofwel van simpele Lie-groepen, of ook nog van Coxeter-groepen, en met heel veel andere dingen (die ik in het vervolg een beetje zal uitleggen). Bijvoorbeeld, de functie x^{n+1} correspondeert met de Lie-groep $SL(n+1)$, d.w.z. met het eenvoudigste Dynkin-diagram



$SL(n+1)$ (of $SU(n+1)$)

ofwel met de overeenkomstige Coxeter-groep, die de symmetriegroep van een simplex is. Men kan ook rechtstreeks een getal toekennen aan iedere simpele Lie-groep of aan iedere Coxetergroep enz.: ik ga straks zeggen hoe. De rij (K_n) hoort dan bij de unitaire groep, ofwel bij de speciale lineaire groep, dus bij de A -serie van de Liegroepen. Als men de symmetriegroepen van andere objecten bekijkt heeft men ook interessante rijen, met opmerkelijke eigenschappen, en dat geeft andere driehoeken van Euler-Bernoulli type, andere getallen waarvoor men analoge eigenschappen heeft aan alles wat ik heb gezegd over de getallen van Euler-Bernoulli. Wat zijn die getallen?

Samenvattend: men heeft zoals tevoren die functieruimte E , en in die functieruimte heeft men die discriminant Σ , men heeft een klassificatie van strata, en voor elk stratum van Σ bestaat een geheel getal, het aantal maximale morsificaties, dat ik het gegeneraliseerde Euler-Bernoulli-getal van een functie noem. En als je begint met de functies van type A , $x_1^{n+1} \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2$ (hetgeen correspondeert met $SL(n+1)$), voor die functies krijg je de rij (K_n) die ik als heb gepresenteerd, maar voor de andere singulariteiten (die met andere groepen corresponderen) krijg je andere getallen, die generalisaties zijn van de getallen van Euler-Bernoulli, waarover ik na de pauze ga spreken.

Tweede deel: de Euler-Bernoulli-getallen van Coxetergroepen

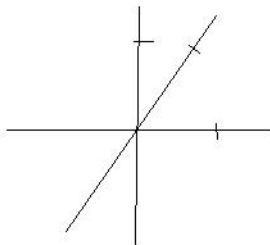
Coxeter-groepen.

Ik ga nu uitleggen wat de Euler-Bernoulli-getallen van Lie-groepen zijn. Na enig overleg heb ik besloten dat ik niets bekend mocht veronderstellen, en ik begin met de definities. Ik ga het niet hebben over Lie-groepen, dat is te ingewikkeld, en ook niet over (Lie-)algebra's, dat is nog steeds te ingewikkeld.

Ik ga het hebben over Coxeter-groepen, dat is veel gemakkelijker uit te leggen. We werken in de Euclidische ruimte \mathbb{R}^n , met de gebruikelijke Euclidische structuur. Een *spiegeling* in de Euclidische ruimte is een orthogonale involutie gedefiniëerd door een hypervlak dat door de oorsprong gaat; de punten van dat hypervlak, dat spiegel heet, blijven op hun plaats:



Welnu, als men verscheidene spiegels heeft,



bringen de spiegelingen een groep voort, die eindig of oneindig kan zijn. Als die groep eindig is noemt men hem een Coxetergroep: een Coxetergroep is een eindige groep voortgebracht door spiegelingen in een Euclidische ruimte.

Bijvoorbeeld, voor $n = 2$ is de volledige classificatie van die groepen de classificatie van regelmatige veelhoeken.

De symmetriegroep van dit type wordt voortgebracht door de spiegelingen in twee spiegels. Als de hoek een rationaal veelvoud van 2π is is het een eindige



groep, het is de symmetriegroep van een k -hoek. Voor $n = 2$ is er dus een oneindig aantal Coxetergroepen, het zijn de symmetriegroepen van de k -hoeken, en er zijn geen andere.

In de driedimensionale ruimte wordt dat interessanter. Er zijn reducibele groepen, die product zijn van irreducibele groepen; het is voldoende de irreducibele objecten te klassificeren. In de driedimensionale ruimte zijn drie irreducibele groepen, genoteerd met A_3 , B_3 en H_3 . Het zijn de symmetriegroepen van de regelmatige veelvlakken: A_3 voor het simplex (regelmatig tetraëder), B_3 voor de kubus en H_3 voor de icoesaëder.

Er is een algemene klassificatie: in \mathbb{R}^n heb je vier groepen A_n , B_n , C_n , D_n die behoren tot vier series A , B , C , D ; in feite zijn B en C hetzelfde (in wezen de symmetriegroepen van kubussen en octaëders). Elk van die groepen behoudt een rooster van dimensie n (men noemt ze kristallografische groepen). Dat is het geval voor A_3 en B_3 , voor H_3 is dat niet zo (H_3 is niet kristallografisch). B_n en C_n zijn dus dezelfde groep maar gezien als symmetrieën van verschillende roosters. Dat geeft vier series van kristallografische groepen: A_n , B_n , C_n , D_n . In de theorie van Lie-algebra's zijn het de Weyl-groepen van $SL(n+1)$ (of $SU(n+1)$): dat hangt ervan af of men de complexe of de compacte versie wil) voor A_n , de symplectische groep $Sp(2n)$ voor C_n , en de orthogonale groepen van een even of oneven aantal variabelen: $O(2n)$ voor D_n en $O(2n+1)$ voor B_n .

Maar er zijn nog uitzonderingsgevallen: G_2 in dimensie 2, F_4 in dimensie 4, en E_6 , E_7 , E_8 in respectievelijk dimensie 6, 7 en 8. Dat is de volledige lijst van de kristallografische groepen (dus die een volledig rooster behouden). Er is nog de lijst van de niet-kristallografische Coxeter-groepen:

$$I_2(p), \quad p = 5, 7, \dots$$

(voor $p = 2, 3, 4, 6$ zitten die al in de lijst, bijvoorbeeld $I_2(4) = B_2$), en dan moet H_3 er nog bij, en ook H_4 die de symmetriegroep is van een polyeder. Dat is trouwens een interessante, dat polyeder, het is een voorwerp dat ik niet in de

gebruikelijke literatuur gevonden heb, hoewel Coxeter het al lang geleden heeft beschreven. Het komt niet voor in de “Groupes et Algèbres de Lie” van Bourbaki. Dit polyeder leeft in de ruimte van dimensie 4, het lijkt op de icosaeëder, ik noem het hypericosaeëder. Het heeft 120 hoekpunten.

Om het te construeren beschouwt men de groep van draaiingen die de gewone icosaeëder behouden. Dat is een ondergroep van $SO(3)$, zeg Γ_{60} , die 60 elementen heeft. De fysici weten dat er een groep van spins, $Spin(3)$, bestaat, die ook $SU(2)$ wordt genoemd: het is de dubbele overdekking van $SO(3)$ die tevens de reële projectieve ruimte is, en $SU(2)$ is de sfeer van dimensie 3 in \mathbb{R}^4 (het is de sfeer van de quaternionen van lengte 1). Ik vat dat alles samen in dit diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{\Gamma}_{120} & \hookrightarrow & SU(2) & \simeq & S^3 & \subset & \mathbb{R}^4 \\ \downarrow & & \downarrow 2 & & \downarrow & & \\ \Gamma_{60} & \hookrightarrow & SO(3) & \simeq & \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) & & \end{array}$$

Boven Γ_{60} , in de dubbele overdekking, ligt een groep $\tilde{\Gamma}_{120}$ met 120 elementen natuurlijk (twee keer zoveel als Γ_{120}), en die de binaire icosaeëdergroep heet. De inclusie $\tilde{\Gamma}_{120} \hookrightarrow S^3$ definiëert 120 punten op de sfeer in de ruimte \mathbb{R}^4 . Zij vormen de hoekpunten van een regelmatig polyeder dat leeft in de ruimte van dimensie 4; dat is de hypericosaeëder.

De symmetriegroep van deze hypericosaeëder wordt voortgebracht door Euclidische spiegelingen: het is de groep H_4 . In feite wordt de groep H_4 gevormd door de werkingen van de groep $\tilde{\Gamma}_{120}$ op zichzelf aan de linker- en aan de rechterkant. Het is $\tilde{\Gamma}_{120} \times \tilde{\Gamma}_{120}$ (die op $\tilde{\Gamma}_{120}$ werkt door links- en rechtsvermenigvuldigingen): dus $\tilde{\Gamma}_{120} \times \tilde{\Gamma}_{120}$ werkt op de 120 hoekpunten en dat geeft isometrieën van \mathbb{R}^4 , er zijn er $120^2 = 14400$ en dat is de Coxetergroep H_4 .

Met elk van deze groepen:

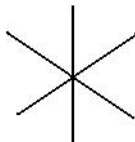
$$A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, I_2(p), H_3, H_4,$$

gaan we een getal verbinden. (Men kan er vele getallen mee verbinden; er zijn Coxeter-getallen, er zijn gewichten, enz. Er zijn vele varianten. De fysici hanteren in de Kwantum-Theorie Velden van gegeneraliseerde Coxeter-getallen, die weer anders zijn, en zij gebruiken trouwens ook de betrekking tussen deze classificatie met de functies, maar ik heb geen tijd om dat alles te bespreken.)

Nu ga ik uitleggen hoe aan elk van deze gevallen het Euler-Bernoulli-getal toe te kenne. Voor de serie A_n zullen we de klassieke rij (K_n) krijgen, en voor de andere gevallen zullen we verschillende rijen krijgen. Ik ga de algemene constructie uitleggen.

De Springer-getallen

Men neemt een Coxeter-groep, laten we bijvoorbeeld A_2 nemen, de groep voortgebracht door de spiegelingen in twee spiegels die een hoek van 60° met elkaar maken (dus er zijn in totaal 3 spiegels):



Het is de symmetriegroep van een driehoek. Algemener is A_n de symmetriegroep van een regelmatig simplex in de n -dimensionale ruimte (de index is steeds de dimensie van de ruimte). Voor A_2 is het de regelmatige (gelijkzijdige) driehoek, en de symmetriegroep heeft zes elementen. De spiegels verdelen de ruimte in delen die Weyl-kamers worden genoemd, omdat Weyl ze niet heeft beschouwd, geloof ik. Hun aantal is gelijk aan het Coxeter-getal. Hier, voor A_2 , zijn er zes. Als ik vertrek vanuit een punt, no. 1, binnen in een kamer, wel dan laat ik het door alle spiegelingen toe te passen alle kamers bezoeken (hij gaat over naar 2, naar 3, enz., vervolgens komt hij terug in 1):

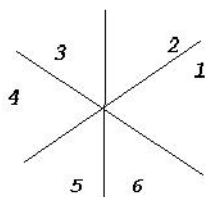


Fig. 10. De 3 spiegels van A_2 en het bezoek aan de 6 kamers door een gespiegeld punt

De baan van een generiek punt (een punt dat zich in het inwendige van een Weyl-kamer bevindt) heet precies zes elementen (zes opeenvolgende posities). In het algemeen is het $(n + 1)!$ voor A_n .

Nu doet voort men de volgende constructie uit. Men beschouwt een Weyl-kamer. Een Weyl-kamer is steeds een simpliciale kegel, en dus is het aantal “wanden” van deze kamer gelijk aan n . De muren zijn geen hypervlakken, het zijn stukken van hypervlakken (het zijn convexe kegels), maar we gaan ze uitbreiden tot volledige hypervlakken. Dat geeft n transversale hypervlakken in de ruimte

van dimensie n . Dus men heeft een verdeling van de n -dimensionale ruimte in delen, de “octanten”. Het aantal octanten is gelijk aan 2^n , en elk octant is een simpliciale kegel, die ik Springer-kegel ga noemen, omdat Springer deze kegels niet heeft bekeken.

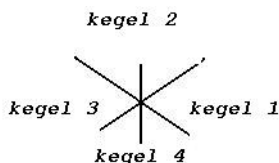


Fig. 11. De vier Springer-kegels van A_2 (kegel 1 is de gekozen Weyl-kamer)

Eén van deze kegels is de Weyl-kamer die men heeft gekozen. De kegel daartegenover is ook een Weyl-kamer. De twee andere kegels zijn geen kamers: het zijn verenigingen van kamers. Kegels 2 en 4 zijn tegenover elkaar (en zijn opponent, kegel 3, ook). Het totale aantal kamers, $(n + 1)!$, is gelijk aan twee maal een som van 2^{n-1} getallen, de aantallen Weyl-kamers in de Springer-kegels, omdat er net zoveel kamers liggen in een kegel als in de tegenoverliggende kegel. Bijvoorbeeld: hier is $6 = 2(1 + 2)$. Algemener is voor A_n ,

$$(n + 1)! = 2(1 + \dots) \quad (2^{n-1} \text{ termen}) \quad (5)$$

Nog algemener kan men voor elke Coxeter-groep W een formule opschrijven zoals

$$|W| = 2(1 + \dots) \quad (2^{n-1} \text{ termen}) \quad (6)$$

waar $|W|$ de orde van de Coxeter-groep is. (Interessant, die notaties van wiskundigen: met de letter W de groepen van *Coxeter* noteren.) In deze som: $1 + \dots$ heb je het getal 1, dat correspondeert met de oorspronkelijke kamer, en verder nog een heleboel getallen, ik schrijf ze op in stijgende volgorde, en ik interesseer me voor de laatste, de grootste.

Definitie 1. Ik noem *voornaamste Springer-kegel* de grootste Springer-kegel, en Springer-getal het aantal Weyl-kamers in deze voornaamste kegel.

Dus

$$|W| = 2(1 + \dots + \text{Springer-getal}). \quad (6bis)$$

Daar ligt een klein probleem: noch Euler, noch Bernoulli hebben zich bezig gehouden met de driehoek van Euler-Bernoulli, Weyl heeft geen Weyl-kamers bekeken, Springer heeft geen Springer-kegels bekeken, tot zover ging alles goed, maar

hier, werkelijk, heeft Springer dit Springer-getal berekend. Hij heeft het echter niet in dit verband bekeken, en zijn definitie ervan was geheel en al anders..

Toen ik de morsificaties bestudeerde van de functies die corresponderen met Coxeter-groepen, heb ik mijn rijtjes aan Springer laten zien, en ik heb hem gevraagd of hij die getallen kende, of men ze tegenkomt in andere delen van de algebra. En hij zei: 61, dat ken ik. Zijn definitie was anders, maar in wezen kan die worden teruggebracht tot die welke hierboven is beschreven. Welzeker, hij had het over iets heel abstracts: zijn definitie bevat geen reële getallen, geen verdeling in kegels, geen topologie; het is pure getaltheorie. In zijn artikel, “Over een combinatorisch probleem” geheten, wil hij pijltjes zetten in Dynkin-diagrammen, en hij voegt een getal toe aan elke gerichte graaf die men uit het Dynkin-diagram krijgt. Het grootste van die getallen in het klassieke A-geval heet in de combinatoriek het aantal permutaties van updown-type. Springer heeft geraden hoe je dit klassieke combinatorische begrip moet generaliseren naar het geval van algemene Dynkin-diagrammen. Maar als men een beetje nadenkt wat hij gedaan heeft, dan is het in de grond zoals wat ik hierboven heb gedaan.

Ik ga de onderverdeling van de Springer-kegels in kamers tekenen voor het geval van dimensie 3. Er zijn drie gevallen: A_3 , B_3 , H_3 . In elk van deze gevallen worden de Springer-kegels begrensd door drie vlakken. We moeten ze tekenen. Dat is een probleem uit de ruimtemeetkunde, een beetje schools, maar zelfs in het geval A_3 is het niet zo gemakkelijk. Ik heb het niet in Bourbaki gevonden. Misschien heb ik slecht gezocht.

In de driedimensionale ruimte heb je drie vlakken, die de ruimte verdelen in acht octanten (8 Springer-kegels) en 24 Weyl-kamers. Het totale aantal spiegels is het aantal combinaties van 2 elementen uit 4 elementen, dus dat is 6; dat geeft zes vlakken door de oorsprong van \mathbb{R}^3 die elkaar snijden en daardoor 24 simpliciale kegels vormen, en je moet je voorstellen hoe dat gaat: dat is niet erg eenvoudig, en ik kan het niet op het bord tekenen. Maar het moet, dus ga ik een truc toepassen: ik ga de driedimensionale ruimte vervangen door het projectieve vlak. Alle spiegels gaan door de oorsprong, en dus krijgt men in het projectieve vlak lijnen, zes lijnen, wat niet al te lastig te tekenen is. Als je op het projectieve vlak overgaat identificeer je de overstaande vlakken, dus heb je geen 24 driehoeken meer, maar nog maar 12; we gaan het projectieve vlak onderverdelen in 12 driehoeken, met 6 lijnen.

Het is een configuratie van lijnen in het projectieve vlak die correspondeert met A_3 . Ik begin met deze Weyl-kamer (het grijze gebied): dat is een driehoek in het projectieve vlak. Om het omplement beter te kunnen zien (dat is wat we nodig hebben) is het beter de Weyl-kamer zo te kiezen dat hij de rechte op oneindig snijdt. En als men de muren verlengt krijgt men slecht drie rechte lijnen.

De Springer-kegels, acht in getal, zijn hier voorgesteld als vier driehoeken: 1, 2, 3, 4. Een van de driehoeken (nummer 1) is de Weyl-kamer.

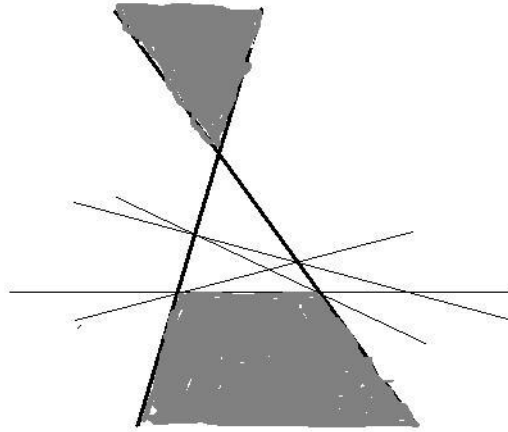


Fig. 12. De spiegels van A_3 voorgesteld in het projectieve vlak.

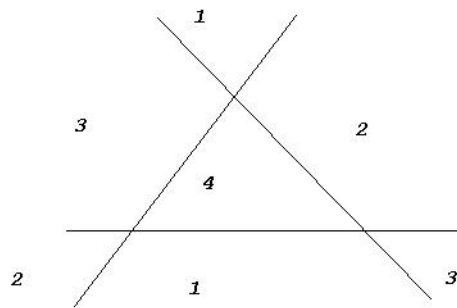


Fig. 13. De Springer-kegels van A_3 in het projectieve vlak voorgesteld

Nu moeten we het aantal Weyl-kamers in iedere kegel uitrekenen. In het grijze gebied is het 1, welzeker, omdat dat deel zelf een Weyl-kamer is. De Weyl-kamers worden voorgesteld door kleine driehoeken, het zijn de componenten van de onderverdeling. In de grote driehoek nummer 2 moet je er drie tellen (en geen vijf, want het is een driehoek in het *projectieve* vlak).

In de grote driehoek nummer 3, ook drie stukken. Er blijft over de centrale driehoek nummer 4, waarvan het aantal delen vijf is.

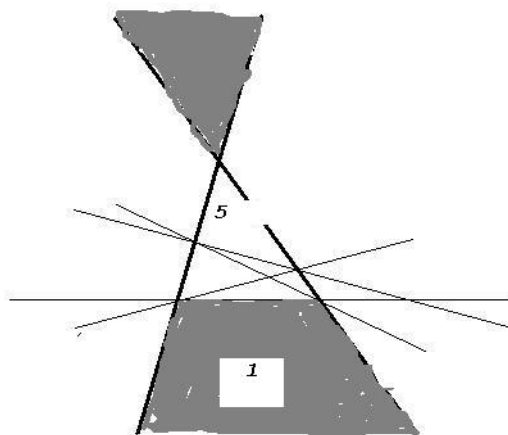


Fig. 14. Aantallen Weyl-kamers in de verschillende Springer-kegels van A_3 .

Dus de formule die het aantal Weyl-kamers geeft is

$$24 = 2(1 + 3 + 3 + 5) \tag{7}$$

en het Springer-getal van A_3 is 5. Je herinnert je wel, dat in de rij (K_n) die 5 voorkwam. Dus men ontdekt de

Stelling 2 *De rij van de Springer-getallen van de serie A_n is de klassieke rij (K_n) .*

Maar er is meer. Men kan die toevalligheid uitleggen, en dat ga ik nu doen.

Hoe je de slangen in de kamers moet leggen.

In de theorie die ik in het eerste deel heb uitgelegd is het getal 5 het getal dat we hebben gekregen door de vijf krommen van Fig. 8 te tekenen,

Het is het aantal slangen met vier kritieke niveau's. En die slangen, die kan men beschrijven in termen van versele deformatie van een functie. Er zijn vier

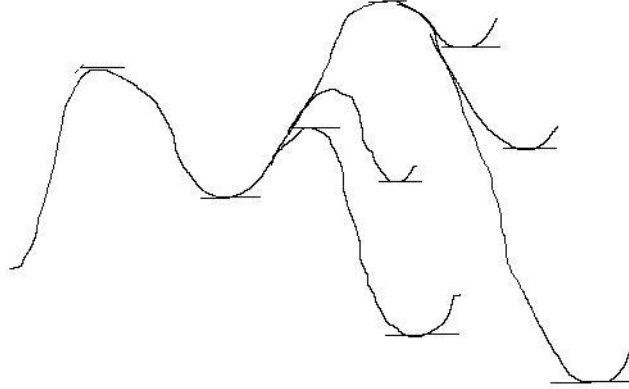


Fig. 15. De vijf slangen met vier kritieke niveau's

kritieke punten, dus die functie is x^5 . De versele deformatie is in dat geval

$$x^5 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x$$

(de term met x^4 kan worden verwijderd door een translatie langs de x -as en de constante term door een translatie langs de y -as, de as van de functiewaarden: meetkundig verandert dit niets).

Dit is dus een versele deformatie van dimensie 3. De ruimte waarin we zitten is de ruimte \mathbb{R}^3 van de coördinaten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, en de discriminant, die in de functie-ruimte leeft, induceert een discriminant $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$: dat is een oppervlak. Dan doet zich het probleem voor dat oppervlak te bestuderen en te tekenen, een probleem dat reeds lang geleden in de singulariteitentheorie is opgelost, door Kronecker.

Het oppervlak dat hij kreeg heet de zwaluwstaart. Ik geloof dat die naam niet van hem komt, maar waarschijnlijk van Thom. Trouwens, Thom zal wel niet geweten hebben dat Kronecker dat oppervlak al had bestudeerd. De Duitsers hebben reeds van oudsher modellen gemaakt, en in oude universiteiten – ik weet niet of de universiteit van Bordeaux oud genoeg is – had je grote meetkundige modellen, waar je temidden van andere zaken modellen van dit oppervlak vond; maar moderne wiskundigen zijn al die voorwerpen van de klassieke wiskunde vergeten. In feite zijn er in de wiskunde maar weinig fundamentele voorwerpen: de ellips, de hyperbool, de sfeer, en dit oppervlak – dat is bijna alles.

Ik laat jullie het genoeg zelf te ontdekken dat wat ik ga tekenen waar is.

We beginnen met de snijkromme van Σ met het vlak $\lambda_1 = -1$ (Fig. 16a).

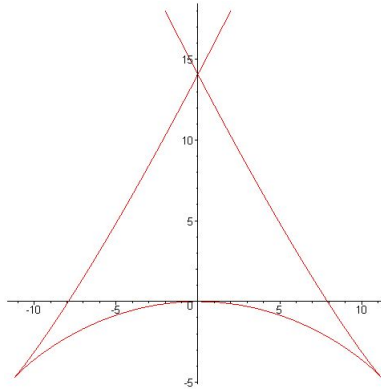


Fig. 16a. Snede van de zwaluwstaart ($\lambda_1 = -1$)

De snijkromme van Σ met het vlak $\lambda_1 = 0$ is een parabool van orde $4/3$, dus het topologische aanzien is dat van Fig. 16b (de kromme $\lambda_3 = \lambda_2^{4/3}$):

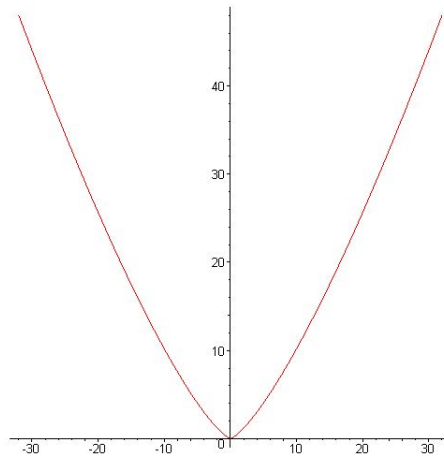


Fig. 16b: Sectie van de zwaluwstaart: verdwijning van de driehoek ($\lambda_1 = 0$).

Als je van het ene geval naar het andere overgaat, dan verdwijnt dit type driehoek

Σ is een oppervlak waarvan de snijkrommen met evenwijdige vlakken $\lambda_1 = c < 0$ eruitzien als voor $\lambda_1 = -1$ maar de driehoek wordt steeds kleiner, en dan klapt hij helemaal samen voor $\lambda_1 = 0$ (hij wordt tot een punt gereduceerd) en vervolgens, voor $\lambda_1 > 0$ is hij er niet meer. Alvorens verder te gaan over de zwaluwstaart ga ik nog een keer de discriminant van de versele deformatie van $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$

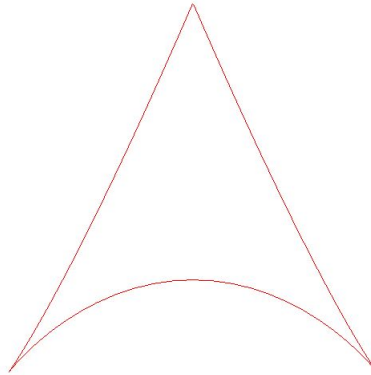
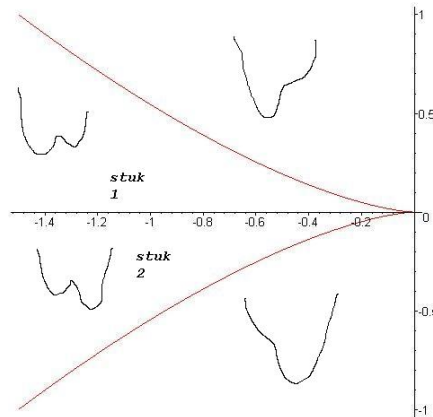


Fig. 16c. De verdwijnende driehoek.

tekenen, in het (λ_1, λ_2) -vlak, met de twee M-morsificaties. Weet je wel, dat zag er zo uit:



Nog eens fig. 9, met de caustiek en het Maxwell-stratum

In deze discriminant had je twee stukken. Een stuk correspondeerde met de punten die functies geven met ontaarde kritieke punten. Dat deel noemt men de caustiek. Een ander stuk correspondeerde met de punten die functies geven met niet-ontaarde kritieke punten, maar met ontaarde kritieke waarden (d.w.z. die niet twee aan twee verschillend zijn). Dat deel heet het Maxwell-stratum, omdat het overeenkomt met de Maxwell-conventie voor het diagram van Van der Waals in de thermodynamica. Zo zat het met de versele deformatie van x^4 , maar nu terug naar die van x^5 .

De zwaluwstaart correspondeert alleen met het brandvlak, en nu moeten we er nog de (gestratificeerde) verzameling van Maxwell bijzetten. En de Maxwell-verzameling blijkt in dit geval ook een zwaluwstaart te zijn. Dat is een feit, dat is een stelling, waarvan ik de diepe oorzaak niet zie, hoewel ik de bewijzen ken en generalisaties van dit opmerkelijke feit (maar de bewijzen zijn even opmerkelijk als het feit).

Deze zwaluwstaart is geïnverteerd met betrekking tot de caustiek,

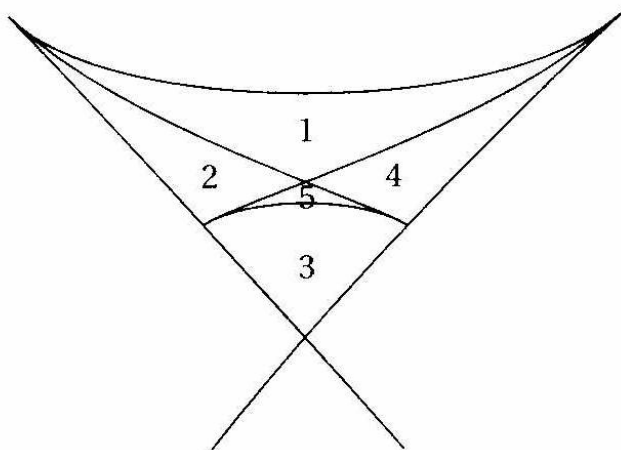


Fig. 17. De discriminant van de versele deformatie van x^5 .

Ik interesseer me alleen in het deel waar alle kritieke punten reëel zijn. Dat is het inwendige van de driehoek van de caustiek. En in dat deel (die driehoek) is die Maxwell-verzameling die hem in verscheidene deelverzamelingen verdeelt. Iedere deelverzameling correspondeert met een verschillend (topologisch) type M-morsificatie. Er zijn 5 M-morsificaties die getekend zijn in Fig. 15, en hier, in de driehoek van Fig. 17 zijn 5 gebieden.

Men kan tekenen in welk gebied elk van de 5 types woont, zoals in Fig. 9, maar ik laat het aan jullie over dat te doen omdat je om te begrijpen zelf een beetje moet werken. Er zijn vijf afbeeldingen en je moet de over de vijf “dozen” verdelen.

Stelling 3 *De onderverdeling van de ruimte der M-morsificaties door de Maxwell-verzameling (decompositie in banen onder de groep van diffeomorfismen, of anders gezegd, in strata van de verzameling van Morse-functies met een maximaal aantal kritieke punten) enerzijds, en de onderverdeling van de maximale Springer-kegel door de spiegels anderzijds, zijn homeomorf.*

Het diagram van Fig. 18

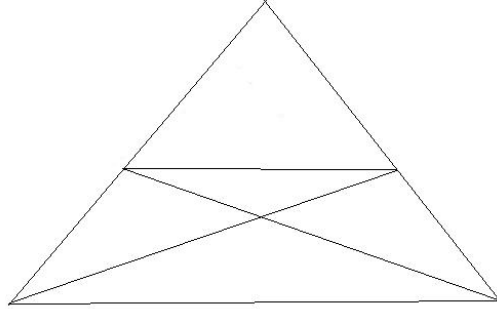


Fig. 18. Beeld van de maximale Springer-kegel van de groep A_3 , in het projectieve vlak

en dat van Fig. 19

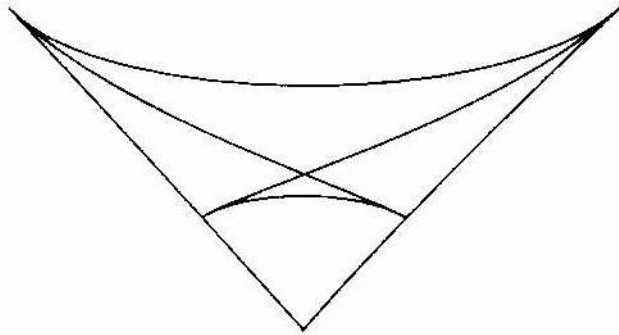


Fig. 19. Snede van de driehoek van de M-morsificaties voor de versele deformatie van x^5

zijn duidelijk homeomorf (de snede $\lambda_1 = -1$ correspondeert precies met overgaan naar het projectieve vlak).

Een dergelijk resultaat is waar voor alle singulariteiten, voor alle Coxeter-groepen: het is een volstrekt algemeen feit. Bovendien bestaat er een natuurlijk homeomorfisme, in feite gegeven door algebraïsche functies, van type $x^{1/3}$. Dat is geen diffeomorfisme, maar zijn beperking tot het inwendige van elk stratum is er wel een. En als men naar de rand van het stratum gaat kan dat diffeomorfisme worden voortgezet tot een homeomorfisme dat niet meer differentiërbaar

is (op de rand). Als men de analytische voortzetting maakt krijgt men in het complexe geval een vertakte overdekking met een eindig aantal bladeren, die de Tschirnhausen-transformatie heet. Een dergelijke vertakte overdekking is voor de andere Coxeter-groepen gedefiniëerd en heet in het algemene geval de afbeelding van Lyashko-Looijenga, die klassiek is in de singulariteitentheorie. (Het deel van deze theorie dat correspondeert met de exceptionele gevallen E_6 , E_7 , E_8 volgt alleen uit berekeningen gedaan door Deligne, met een computer. Men moet enkele miljoenen combinatorische gevallen bekijken, en het lukt, maar ik geloof dat die berekeningen, die beschreven worden in een brief van Deligne aan Looijenga, zelfs niet gepubliceerd zijn.) Ik ga het verder niet over die problemen in het complexe geval hebben. Wat ons hier interesseert is dat er een homeomorfisme is in het reële kader. Ik ga de bewijzen niet geven, die zijn niet gemakkelijk. Ik ga er slechts dit over zeggen: het belangrijkste ingrediënt waar ik bij het bewijzen van die zaken niet buiten kan is de stelling van Riemann over de uniciteit van de conforme structuur op de sfeer S^2 . De bewijzen hangen af van de analyse van de combinatorische structuren gegeven door de oppervlakken van Riemann, dat is complexe analyse. Hoewel ik het reële feit op geheel en al elementaire wijze heb geformuleerd zit er in de bewijzen complexe analyse waar ik niet buiten kan.

Het geval van de andere Coxetergroepen

Nu zal ik jullie de getallen laten zien die men krijgt voor de andere groepen. Allereerst kan men de diagrammen voor B_3 en voor H_3 tekenen. Dat ga ik doen. B_3 is de symmetriegroep van de kubus, en de tekening is als volgt (Fig. 20).

In dit geval geef ik er de voorkeur aan de rechte op oneindig op te nemen onder de rechten die de Weyl-kamer (in het grijs) begrenzen. Nu moeten we de driehoeken tellen.

Voor A_3 hadden we

$$24 = 2(1 + 3 + 3 + 5)$$

Voor B_3 heb je:

$$48 = 2(1 + 5 + 7 + 11) \tag{8}$$

Ik heb geen goede formule voor al die termen, ik heb alleen maar een formule voor de laatste, het grootste (het Springer-getal). Voor H_3 is het resultaat

$$120 = 2(1 + 11 + 19 + 29) \tag{9}$$

Ik heb die getallen opgeschreven om jullie een stelling te laten zien waarvan ik het bewijs ga geven, hoewel ik er niets van begrijp. Voor iemand die aan Coxeter-groepen gewend is zijn de getallen in de onderverdeling van H_3 : 1, 11, 19, 29 niet zomaar willekeurige getallen, het zijn heel bekende getallen: het zijn bijna de

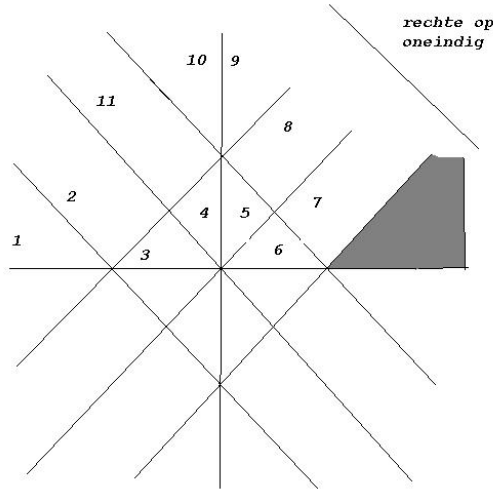


Fig. 20. Spiegels en Weyl-kamers van B_3 , met de 11 kamers van de voornaamste Springer-kegel.

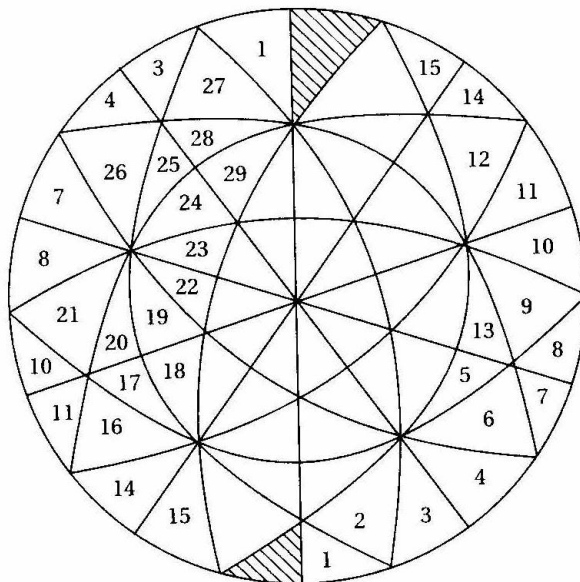
graden van de invarianten van de groep H_4 . De graden van de invarianten zijn 2, 12, 20 en 30. Ze zijn gerelateerd aan de eigenwaarden van de Coxeter-operator voor H_4 . Als men het aantal kamers in de Springer-kegels voor H_3 berekent en er 1 bij optelt, dan krijgt men de graden van de invarianten van H_4 .

Als je hetzelfde doet met B_3 krijg je de graden van de invarianten van F_4 . De aantallen kamers in de Springer-kegels zijn 1, 5, 7 en 11. Als je er 1 bij optelt krijg je 2, 6, 8, 12: dat zijn inderdaad de graden van de invarianten van F_4 . En als je weer hetzelfde doet, maar beginnend met A_3 , krijg je: 2, 4, 4, 6 en dat zijn de graden van de invarianten van D_4 . Dus we hebben de volgende stelling bewezen:

$$\frac{D_4}{A_3} = \frac{F_4}{B_3} = \frac{H_4}{H_3} \quad (10)$$

Dat is een verhouding waarvoor ik geen duidelijke reden zie, en waarvoor ik geen generalisatie heb naar hogere dimensie. Ik begrijp er niets van, maar het is een feit, jullie zien het bewijs: het gebruikt de tekening voor H_3 , die een beetje moeilijker is, er zijn veel rechte lijnen, maar je kunt het doen, ik heb het gedaan, ik heb gerekend en daar is het resultaat.

De graden van de niet-kwadratische invarianten van D_4 , F_4 , H_4 zijn de aantallen hoekpunten, zijvlakken en ribben van de regelmatige veelvlakken (tetraëder voor D_4 , octaëder voor F_4 , icsaëder voor H_4). Men krijgt dus ook nog de ver-



De Springer-kegels voor H_3 .

houdingen

$$\frac{D_4}{E_6} = \frac{F_4}{E_7} = \frac{H_4}{E_8}$$

want de singulariteiten E_6 , E_7 , E_8 beschrijven de relaties (“syzygieën”) tussen de invarianten van de binaire groepen van de regelmatige veelvlakken in \mathbb{R}^3 .

Voor H_4 heeft de Weyl-groep, zoals ik al gezegd heb, orde $120^2 = 14400$ (weet je wel, het is de werking van een groep van 120 elementen op zichzelf links en rechts), en ik vind de volgende onderverdeling:

$$14400 = 2(1 + 119 + 599 + 601 + 719 + 1199 + 1681 + 2281). \quad (11)$$

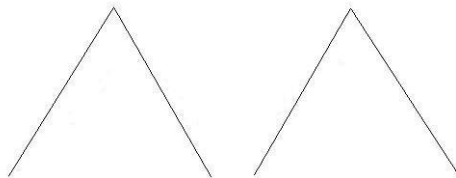
En voor die getallen heb ik geen theorie. De laatste, 2281, is het Springer-getal van H_4 , dat trouwens niet door Springer op combinatorische manier is berekend. In feite is het de berekening van de inhoud van een simplex, op de bol (het is sferische driehoeksmeting). Men weet dat op de tweedimensionale sfeer het door de formule van Gauss-Bonnet heel gemakkelijk is dat te doen, maar in het geval van hogere dimensie kan men het volume niet expliciet vinden als men de hoeken van de simplices kent: het is een functie van de hoeken maar het is geen elementaire functie (er komen polylogarithmen in voor). Maar voor het bijzondere geval van de simplices die gegeven worden door de Springer-kegels is een expliciete berekening

altijd mogelijk: het is een integreerbaar probleem. Ik weet niet waarom die integralen, die in het algemeen niet door elementaire functies van de hoeken kunnen worden uitgedrukt, in dit speciale geval waar het de hoeken van Springer-kegels zijn, wel zo zijn uit te drukken, maar het is een feit. En dus kan men al die getallen berekenen en men krijgt de getallen die ik heb beschreven. En waar ik jullie aandacht op wil vestigen, dat is dat als je 1 wilt optellen bij 199, bij 599, bij 719, bij 1199, dat je dan leuke getallen krijgt. En voor 1, 601, 1681 en 2281 zou je eerder 1 moeten aftrekken...

Het lijkt erop dat de verhoudingen (10) een of andere generalisatie moeten hebben. Misschien zijn er onder de assistentie experts die in staat zullen zijn uit dit getallengeheel iets interessants te brouwen.

Het Springer-getal van E_8 is door Springer zelf berekend: $e_8 = 14422081$. Ik gebruik de volgende notatie: de Springer-getallen van Coxeter-groepen worden genoteerd met dezelfde symbolen als de groepen zelf, maar met kleine letters. We hebben bijvoorbeeld gevonden dat $h_4 = 2281$.

Ik ga nu de driehoek van Euler-Bernoulli-type tekenen waarmee je de Springer-getallen voor de klassieke series van de groepen B en D kunt berekenen. Voor A hebben we het al gedaan en voor C is het hetzelfde als voor B (vanuit het gezichtspunt van Coxeter-groepen is er geen verschil tussen de gevallen B en C). Om de Springer-getallen b_k en d_k van de Coxeter-groepen van type B_k (of C_k) en D_k te berekenen bestaan driehoeken van Euler-Bernoulli-type. Voor het geval B moet je in feite twee driehoeken tekenen zoals



en op de linkerkant van de tweede driehoek krijg je hetzelfde als op de rechterkant van de eerste, behalve op de top: op de top van de eerste heb je 0 en op de top van de tweede 1. Dat is de hele definitie. Vanaf dat punt doe je hetzelfde als eerder: op de volgende rij zet je de som van alles wat er rechts boven staat; vervolgens is op de derde rij elke term de som van wat er links van op de tweede rij staat; enzovoorts.

De rij b_k is 1,1,3,11,57,... We hebben al gezien dat $b_3 = 11$. Je ziet die 11 omcirkeld aan de linkerkant van de linker driehoek. De series van Coxeter-groepen starten niet meteen: D_4 is de eerste van de D_n , B start met B_2 en C met C_3 : dat

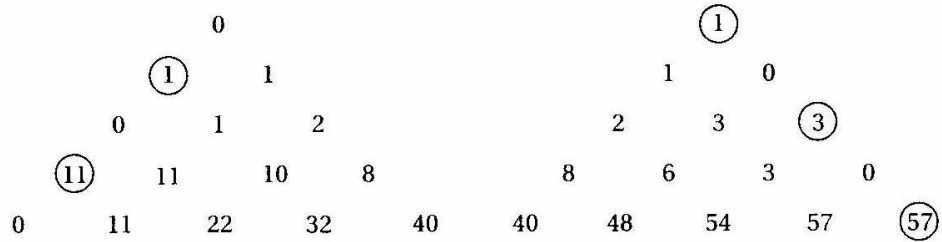


Fig. 21. De dubbele driehoek van Euler-Bernoulli van de B-groepen

is om herhalingen te vermijden, omdat B_1 en C_1 samenvallen met A_1 , C_2 met B_2 , D_3 met A_3 en D_2 met $A_1 \times A_1$.

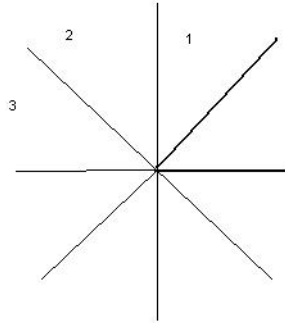


Fig. 22

B_2 is de symmetriegroep van het vierkant. Er zijn dus vier spiegels (zie fig. 22) en de twee spiegels die de Weyl-kamer die ik gekozen heb bepalen zijn vet. Je verlengt ze en krijgt de onderverdeling $8 = 2(1 + 3)$ (je ziet: in de voornaamste Springer-kegel bevinden zich drie Weyl-kamers). Dus b_2 is inderdaad gelijk aan 3. Men bekijkt de buitenkanten van onze dubbele Euler-Bernoulli-driehoek en vindt de omcirkelde 3. Dus voor b_0 en b_1 bestaat geen twijfel, ze zijn omcirkeld en zijn beide gelijk aan 1. De betekenis daarvan is niet erg duidelijk, maar er bestaat geen twijfel over. Men ziet ook dat b_4 gelijk is aan 57 enz.

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	...
1	1	3	11	57	361	...

Fig. 23. Euler-Bernoulli-getallen voor de B-groepen.

Voor de d_k moet je hetzelfde doen, maar te beginnen met 1 en 0 (op de toppen) in plaats van 0 en 1:

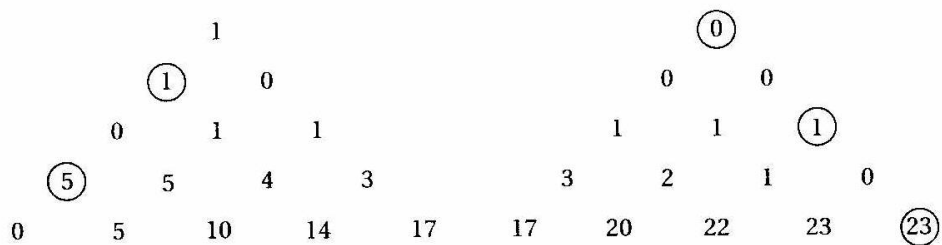


Fig. 24. De dubbele driehoek van Euler-Bernoulli van de D-groepen

D_3 , dat is A_3 , dus $d_3 = a_3 = 5$. Die zoek je op de buitenzijde van de dubbele driehoek: hij is omcirkeld. En d_4 , dat is de omcirkelde 23. Dus d_2, d_1 en d_0 zijn 1, 1 en 0. Ik zie niet goed vanuit meetkundig oogpunt wat de groep D_0 is, maar de formule zegt dat je $d_0 = 0$ moet nemen, anders kloppen de exponentiële formules, met voortbrengende functies, niet (die bestaan, analoog aan formule (3), weet je wel, $\sec t + \tan t$).

Er zijn ook eigenschappen modulo p , modulo p^r voor de getallen van deze driehoeken. Er zijn veel stellingen en vreemde formules... Hier is een voorbeeld dat, vreemd genoeg, niet bekend was. Ik schrijf

$$1^n + 2^n - 3^n - 4^n \dots - (p-1)^n + p^n$$

met tekens op die wijze: twee keer +, twee keer -, enz. p is een oneven getal. Dan is deze som congruent met $f(n)$ modulo p als p van de vorm $4s + 1$ is, waar $f(n)$ de coëfficiënt is van de volgende voortbrengende functie:

$$\sum_{n \geq 0} f(n) \frac{z^n}{n!} = 1 + \text{th}z.$$

Er zijn tientallen van zulke stellingen, en er volgen congruenties uit modulo p^r voor alle r , als p een priemgetal is. Maar dat is een lang verhaal, dat ik hier niet kan vertellen. Ik wil alleen signaleren dat de eerste die zulke feiten heeft ontdekt Knuth is (de Knuth van de algoritmiek), omdat hij de getallen van Euler-Bernoulli wilde uitrekenen, en in het artikel waar hij uitlegt hoe je dat het snelst kunt doen laat hij zien dat je priemgetallen moet gebruiken, dat je de resten modulo p^r moet uitrekenen en dankzij periodiciteitswetten die volgen uit de congruenties die ik heb vermeld is de berekening de snelst mogelijke.

Discussie

Jacques Martinet. - Een combinatorische opmerking. Vaak voegt men bij groepsrepresentaties de eenheidsrepresentatie toe, die een augmentatie-representatie transformeert in een permutatie-representatie. Hier krijg je, als je 1 optelt bij de aantallen kamers in de Springer-kegels, delers van de orde van de groep [hij geeft de getallen aan die horen bij de groepen A_3 , B_3 , H_3 , formules (7), (8), (9), die nog op het bord staan] maar daar [voor de aantallen kamers van de kegels van H_4 , formule (11)], als je 1 optelt (of zelfs 1 aftrekt) krijg je niet altijd een deler. Bijvoorbeeld, in 1682 zit een factor 7, die niet in 14400 zit.

V.I. Arnold. - Ja, en wat is hier aan de hand? Bijvoorbeeld: als je alle vieren neemt: B_4 , D_4 , G_4 , etc. krijg je acht getallen, en wat is er met hen onderling aan de hand? Je moet iets proberen te raden want als je een goed vermoeden hebt over zulke grote getallen, dat is het meestal waar.

Referenties

- [1] V.I. Arnold, *Bernoulli-Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics*, Duke Math. J. **63** (1991) no. 2, pp. 537–555.
- [2] V.I. Arnold, *The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups*, Uspekhi Mat. Nauk **47** (1992) no. 1 (283), pp. 3–45 (in het russisch). Engelse vertaling: Russian Math. Surveys **47** no. 1 (1992), pp. 1–51.
- [3] V.I. Arnold, *Springer numbers and Morsification spaces*, J. Algebraic Geom. **1** (1992) no. 2, pp. 197–214.
- [4] V.I. Arnold, *Congruences for the numbers of Euler, Bernoulli and Springer of Coxeter groups*, Izv. Ross. Akad. Nauk. Ser. Matem. **56**, no. 5 (1992), pp. 1129–1133 (in het russisch). Engelse vertaling: Russian Acad. Sci. Izv. Math. **41** (1993) no. 2.
- [5] S.A. Barannikov, *On the space of real polynomials having no multiple critical values*, Funkt. Analysis and its Appl. **26,2** (1992), 10–17 (in het russisch). Engelse vertaling: Functional Anal. Appl. **26** (1992) no. 2, 84–90.
- [6] S.A. Barannikov, *Complements to resultants and discriminants in \mathbb{C}^n are M -manifolds*, Funkt. Analysis and its Appl. **27,3** (1993), 1–4 (in het russisch). Engelse vertaling: Functional Anal. Appl. **27** (1993) no. 3, 155–157.

- [7] F. Catanese, P. Frediani, *Configurations of real and complex polynomials*, *Asérisque* **218** (1993), 61–93.
- [8] F. Catanese, M. Paluszny, *Polynomial-lemniscates, trees and braids*, *Topology* **30** (1991) no. 4, 623–640.
- [9] C. Davis, *Extrema of a polynomial*, *Am. Math. Monthly* **64** (1957), 679–680.
- [10] M.R. Entov, *On real morsifications of the singularities D_μ* , *Doklady Russ. Acad. of Sc.* **46**, 1 (1992), 25–29 (**325**,1 van Russian Dokl.).
- [11] M.R. Entov, *On the number of connected components of the set of real Morsifications of the singularity D_μ* , *Funkt. Analysis and its Appl.* **27**,2 (1993), 92–95 (in het russisch). Engelse vertaling: *Functional Anal. Appl.* **27** (1993) no. 2, 151–154.
- [12] V.V. Goryunov, *Subprincipal Springer cones and Morsifications of Laurent polynomials and D_μ singularities*, In: *Singularities and Bifurcations*, V.I. Arnold editor, *Advances in Soviet Math.*, Vol. 21, AMS, Providence 1994, pp. 163–188.
- [13] V.V. Goryunov, *Morsifications of Rational Functions and very nice Morsifications of E_μ singularities*, *Preprint 053-93, MSRI Berkeley, 1993*, 16 pp.
- [14] A.G. Khovanskii, S. Zdravkovska, *Branched covers of S^2 and braid groups*, *J. Knot Theory Ramifications* **5** (1996), no. 1, 55–75.
- [15] R. Thom, *L' équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynôme*, *Topology* **3** (1965) 297–307.
- [16] S. Zdravkovska, *Topological classification of polynomials maps*, *Uspekhi Mat. auk.* **25** no. 4 (1970), 179–180 (in het russisch); Engelse samenvatting in *Math. Reviews* MR 46 ‡ 2684.

**Boeken (over singulariteiten van differentiëerbare afbeeldingen, ver-
sele deformaties, caustieken...)**

Voor een cursus op een niveau vergelijkbaar met deze les:

- [**A.5**] V.I. Arnold, The theory of singularities and its applications, Publ. Accademia Nazionale dei Lincei, Pisa, Scuola Norm. Sup. (1991).
- [**A.6**] V.I. Arnold, Catastrophe theory, Springer 1992 (2e druk)

Voor een volledige en uitgediepte cursus:

- [**A.7**] V.I. Arnold, Singularities of caustics and wave fronts, Math. and its appl. (Soviet Series) **62**, Kluwer (1990)
- [**AGLV**] V.I. Arnold, V.V. Goryunov, O.V. Lyashko, V.A. Vassiliev, Encyclopedia of Math. Sciences, Springer, vol. 6 & vol. 39 (1993) (=Dynamical Systems, vol. 6 en vol. 8 = Singularity Theory vol. 1 en vol. 2).
- [**AVG-Z**] V.I. Arnold, A.N. Varchenko en S.M. Guzein-Zade, Singularities of differentiable maps vol.1: Classification of critical points, caustics and wave fronts. Birkhäuser 1988.

Voor een cursus op masters-niveau:

- [**BG**] J.W. Bruce and P. Giblin, Curves and Singularities, a geometrical introduction to singularity theory. Cambridge Univ. Press 2e druk (1992)
- [**De**] M. Demazure, Catastrophes et bifurcations, Ellipses (1989)

Tenslotte, een werk met klassieke rijen gehele getallen:

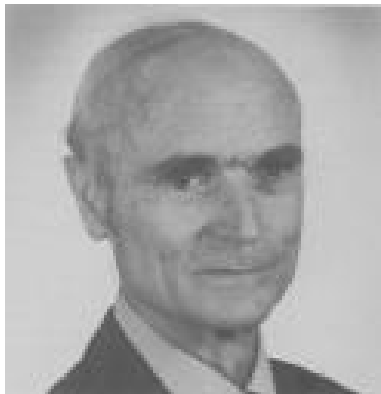
- [**S**] N.J.A. Sloane, A Handbook of integer sequences, Academic Press (1973)
(Opm. JS: nu ook op internet als The online handbook of integer sequences)



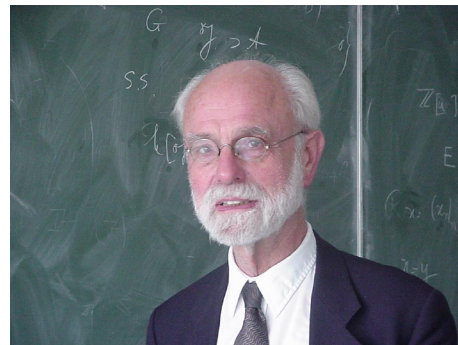
Jakob Bernoulli



Leonhard Euler



H.S.M. Coxeter



T.A. Springer