

Knoop of onknoop

Walter D. van Suijlekom



Radboud Universiteit Nijmegen



KNOOP OF ONKNOOP

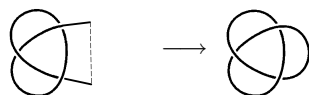
WALTER D. VAN SUIJLEKOM

1. Introductie

Een knoop in onze schoenveter leggen kunnen we allemaal. In zijn meest simpele vorm ziet die er als volgt uit:



Vandaag gaan we ons bezig houden met de vraag of deze knoop wel of niet te ontwarren is. Natuurlijk leert onze ervaring dat dat vanwege de twee losse uiteinden zo is. Echter, stel dat we die met elkaar verbinden, zoals in

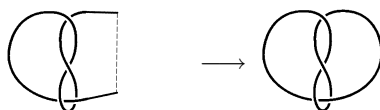


Het lijkt uitgesloten dat deze zogeheten **klaverbladknoop** is te ontwarren, maar hoe weten we dat zo zeker? En wat is eigenlijk ontwarren? Op die vragen zullen we vandaag een antwoord geven.

Eerst nog een ander praktisch voorbeeld, de platte knoop:



Verbinden we weer de twee uiteinden met elkaar dan komen we tot de **cijfer 8-knoop**, ook zo op het oog niet te ontwarren:



De gesloten knopen die we hier hebben gemaakt zijn voorbeelden van wiskundige knopen, de vraag of een knoop is te ontwarren heeft alleen betekenis voor deze gesloten lusjes.

Voordat we echte beginnen, eerst een klein stukje geschiedenis. Knopentheorie kent een merkwaardig begin, Lord Kelvin (William Thomson, 1824–1907) probeerde een model te verzinnen waarbij atomen knopen voorstellen in de ‘ether’ – een hypothetische substantie die de voortplanting van licht mogelijk zou moeten maken. Verschillende knopen in die ether zouden dan met verschillende atomen corresponderen. Aan het eind van de 19e eeuw bleek echter dat de ether niet bestond en was er ook al een ander (meer succesvol) model bedacht voor de structuur van atomen.

Toch was met het idee van Lord Kelvin de natuurkundige Peter Guthrie Tait (1831–1901) aan de gang gegaan om tabellen te maken van verschillende knopen. Dit is eigenlijk het begin van de wiskundige knopentheorie en is gebaseerd op de vraag wanneer twee knopen hetzelfde zijn. Dit leidde tot een volledig nieuw vakgebied in de wiskunde, als onderdeel van de zogeheten topologie. Onverwacht zijn de toepassingen in de biochemie, waar DNA-moleculen zich lijken te knopen. We zullen hierover aan het einde van het college een tipje van de sluier oplichten.

2. Wiskundige knopen

Zoals dat hoort bij een goed stuk wiskunde, beginnen we met een precieze definitie van een (wiskundige) knoop.

Definitie 1. Een knoop is een gesloten lus die zichzelf niet doorsnijdt.

Een tekortkoming van het papier waar je nu naar kijkt, is dat het een twee-dimensionaal object is. We moeten dus het lusje *projecteren* van drie naar twee dimensies. Nu kunnen we hier veel woorden aan besteden, maar op de vorige pagina's hebben we dit al steeds gedaan, hopelijk zonder dat dat onduidelijk was. Om alle verwarring weg te nemen: als er in de tekening een lijnstukje is weggelaten, dan wordt bedoeld dat dat lijnstukje onder het andere doorgetrokken lijnstukje door gaat.

In tegenstelling tot de gewone knoop (in je veter) is de wiskundige knoop niet altijd te ontwarren, we hebben namelijk de uiteinden met elkaar verbonden. Een eerste vraag die we kunnen stellen is dus, **wanneer is een knoop te ontwarren?** Met andere woorden, **wanneer is een knoop gelijk aan de onknoop?** (Figuur 2). Deze vraag is zo interessant – en moeilijk – dat er zich talloze wiskundigen mee bezig hebben gehouden. We zullen hier een tipje van de sluier oplichten.

Stel we tekenen een eenvoudige knoop op papier, zoals bijvoorbeeld:



FIGUUR 1. Een knoop

Iedereen *ziet* aan het plaatje dat deze knoop eigenlijk geen knoop is maar volledig is te ‘ontknopen’ tot de onknoop (Figuur 2).



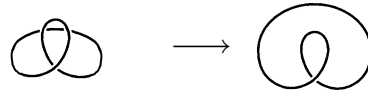
FIGUUR 2. De onknoop

Maar hoe komen we tot die conclusie? Welke stap(pen) hebben we genomen? Bekijk opnieuw knoop in Figuur 1, we komen hierin het volgende lusje tegen: . en er verandert niets aan de **knoop** als we dit lusje vervangen door een doorgetrokken lijnstukje . Deze stap heet de **eerste Reidemeisterzet**.

Bekijk nu een andere knoop die op het oog duidelijk de onknoop is:



Laten we ons weer bewust worden van de stappen die we hebben gezet om tot die conclusie te komen. Zonder de knoop te veranderen, trekken we het onderliggende bovenste lijnstukje onder het lusje door naar boven:



Deze stap heet de **tweede Reidemeisterzet**. Voor de zo verkregen knoop hebben we hierboven al bewezen dat dit de onknoop is, via een Reidemeisterzet I.

Merk trouwens op dat deze stappen niet werken als het bovenste lijnstukje niet onder het lusje gaan, maar er door heen zoals in Figuur 3. Deze knoop hebben we al eerder gezien – in de praktijk



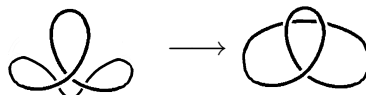
FIGUUR 3. De klaverbladknoop

de meest gangbare enkele knoop – het is de **klaverbladknoop**. De ervaring leert ons dat deze knoop niet is te ontwarren; we zullen dit in de volgende paragraaf ook echt bewijzen. Maar voordat we dat doen, is er nog een laatste stap mogelijk om een knoop te ontwarren. Bekijk namelijk de volgende knoop, weer op het oog de onknoop:



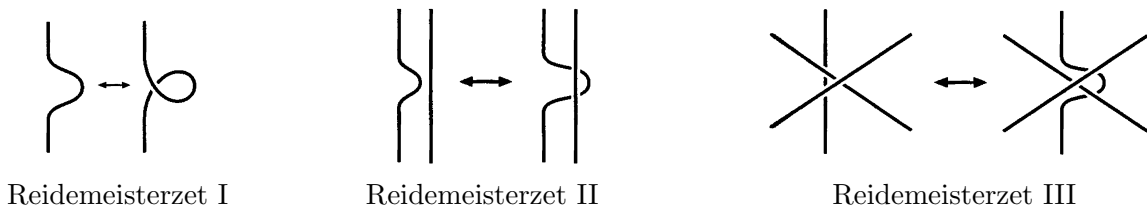
FIGUUR 4. De lotusbloem-'knoop'

Om deze 'knoop' te ontwarren halen we het onderste lijnstukje onder de kruising door:



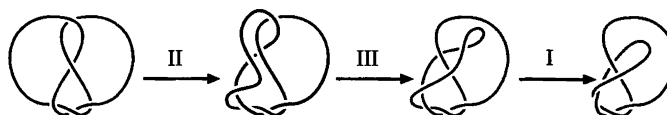
Deze stap verandert de knoop niet en heet de **derde Reidemeisterzet**. We hebben al eerder gezien dat de zo verkregen knoop door achtereenvolgens een Reidemeister II en I uit te voeren tot de onknoop is te ontwarren.

De drie stappen die een knoop hetzelfde laten staan samengevat in Figuur 5. Uiteraard verandert



FIGUUR 5. De drie Reidemeisterzetten

elk van deze drie zetten onze *tekening* van de knoop wel, maar niet de knoop als drie-dimensionaal



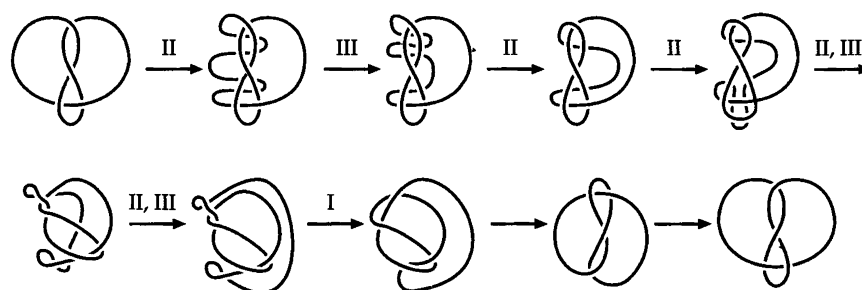
object. Hoewel al onze voorbeelden knopen waren die volledig te ontwarren waren, kunnen we deze stappen ook gebruiken om twee echte knopen in elkaar over te brengen zoals hierboven.

Door het wat vage woord ‘hetzelfde’ te vervangen door het duurdere ‘equivalent’, komen we zo tot de volgende definitie:

Definitie 2. Twee knopen heten **equivalent** als de een in de ander is over te brengen met behulp van een serie Reidemeisterzetten.

Nu kunnen we ook precies maken wanneer een knoop is te ontwarren, namelijk als hij equivalent is aan de onknoop.

Een voorbeeld van een wat ingewikkelder serie Reidemeisterzetten is gegeven in Figuur 6. Dit laat de equivalentie zien van de cijfer 8-knoop met zijn spiegelbeeld, dat wil zeggen, de knoop die je krijgt als je elke kruising in de cijfer 8-knoop vervangt door de tegenovergesteld kruising (‘overheen’ wordt ‘onderdoor’ en andersom).



FIGUUR 6. De cijfer 8-knoop is equivalent aan zijn spiegelbeeld

Opgave 1. Laat zien dat de volgende twee knopen equivalent zijn door het tekenen van een serie Reidemeisterzetten die de ene knoop in de andere overbrengt:



3. Knoopinvarianten: driekleurbaarheid als voorbeeld

Hoe kunnen we nu achterhalen wanneer twee knopen hetzelfde (equivalent) zijn? Dit blijkt niet eenvoudig, kom maar eens op de serie Reidemeisterzetten in Figuur 6 in de vorige paragraaf! Dit is een lastig – en dus voor de wiskundige een interessant! – probleem. Natuurlijk zou je een computer kunnen programmeren om een serie Reidemeisterzetten te vinden die de ene knoop in de andere overbrengt. Maar hoe weet je dat als je na zeg een miljoen stappen nog niet op de andere knoop bent uitgekomen, je met nog één verdere stap klaar bent? Misschien zijn de knopen wel niet hetzelfde.

Gelukkig zijn er goede methodes ontwikkeld om te checken of twee knopen *verschillend* zijn, om je zo'n eindeloze zoektocht te besparen. Dit gaat door het toekennen van een getal of een bepaalde eigenschap aan een knoop die niet verandert onder de drie Reidemeisterzetten. In dat geval vormt zo'n getal of eigenschap een zogeheten **knoopinvariant**. Als twee knopen equivalent zijn, dan zijn hun respectievelijke knoopinvarianten ook hetzelfde. We kunnen dit als volgt inzien. Als twee knopen hetzelfde zijn, dan is er een serie Reidemeisterzetten die de een in de ander overbrengt. Aangezien de knoopinvariant onveranderd blijft onder elk van die Reidemeisterzetten, is de knoopinvariant dus gelijk voor equivalente knopen.

Zo zien we dat, omgekeerd, als je hebt bepaald dat twee knopen verschillende knoopinvarianten hebben, dat die twee knopen niet dezelfde knoop zijn. En dus heeft het in dat geval ook geen zin om een serie Reidemeisterzetten te zoeken die de een in de ander overbrengt. We zullen nu naar een voorbeeld kijken van een knoopinvariant, die ons verzekert dat er in ieder geval één knoop bestaat die niet de onknoop is.

De knoopinvariant die we in dit college bestuderen is driekleurbaarheid. Het zal ons toestaan te concluderen dat de klaverbladknoop niet de onknoop is.

Definitie 3. Een knoop heet **driekleurbaar** als we aan elke doorgetrokken lijnstukje in een tekening van de knoop een van de kleuren rood, blauw en groen kunnen toekennen zodat op elke kruising óf drie verschillende kleuren óf drie gelijke kleuren samenkomen. Daarbij geldt dat tenminste twee van de drie kleuren worden gebruikt.

Hét voorbeeld van een driekleurbare knoop is de klaverbladknoop. De onknoop (Figuur 2)

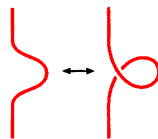


FIGUUR 7. De klaverbladknoop is driekleurbaar

daarentegen is te tekenen als een gesloten lijnstuk en is dus niet driekleurbaar: hij is óf rood, óf blauw óf groen.

We merken op dat we driekleurbaarheid van een knoop hebben gedefiniëerd aan de hand van een tekening van die knoop. Om dit een goede definitie te laten zijn, moeten we dus nog aantonen dat dit niet afhangt van de gekozen tekening van de knoop. Met andere woorden, we moeten laten zien dat driekleurbaarheid invariant is onder de drie Reidemeisterzetten.

Voor Reidemeisterzet I levert dit geen problemen op, de kleur (rood in het voorbeeld, maar hetzelfde geldt voor blauw en groen) blijft gelijk:



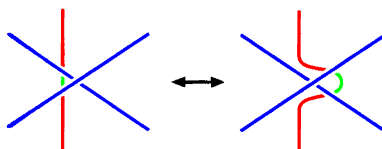
Inderdaad komen op de kruising aan de rechterkant drie gelijke kleuren samen.

Voor Reidemeisterzet II zijn er twee mogelijkheden. Als de twee lijnstukken dezelfde kleur (zeg, rood) hebben, dan kleuren we ook de drie lijnstukken aan de rechterkant met dezelfde kleur. Daarentegen, als de twee lijnstukken een verschillende kleur (zeg, rood en blauw) hebben, dan tekenen we de drie lijnstukken met drie kleuren (Figuur 8) waarbij we de kleur groen introduceren op het kleine lijnstukje om ervoor te zorgen dat er drie verschillende kleuren samenkomen op de twee betrokken kruisingen.



FIGUUR 8. Driekleurbaarheid onder een Reidemeisterzet II

Tot slot bewijzen we dat Reidemeisterzet III driekleurbaarheid invariant laat. Met alle lijnen dezelfde kleur is het duidelijk, voor drie verschillende kleuren tekenen we als in Figuur 9. Er geldt



FIGUUR 9. Driekleurbaarheid onder een Reidemeisterzet III

aan beide kanten dat er op elke kruising óf dezelfde kleuren samenkomen, óf drie verschillende.

Zo hebben we dus onze eerste Stelling bewezen!

Stelling 4. *Driekleurbaarheid is een knoopinvariant.*

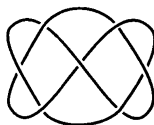
Als gevolg hiervan geldt dus dat een knoop die driekleurbaar is, niet equivalent is aan een knoop die niet driekleurbaar is. Als twee knopen namelijk equivalent waren, is het (door onze Stelling) waar dat als driekleurbaarheid een eigenschap is van de ene knoop, dat ook geldt voor de andere. In het bijzonder hebben we:

Gevolg 5. *De klaverbladknoop is niet equivalent aan de onknoop.*

De klaverbladknoop is dus een echte knoop en is niet te ontwarren.

Let wel, het is niet waar dat de klaverbladknoop de enige knoop is die driekleurbaar is. De volgende opgave geeft een voorbeeld van een knoop die driekleurbaar is en niet equivalent aan de klaverbladknoop. Om zo'n knoop te onderscheiden van de klaverbladknoop zijn er ingewikkelder knoopinvarianten nodig zoals bijvoorbeeld het Jones polynoom. Een discussie hiervan zou te ver voeren voor de korte tijd die we hier hebben, zie bijvoorbeeld “The knot book” van Adams [1] voor verdere informatie.

Opgave 2. Laat zien dat de volgende knoop driekleurbaar is

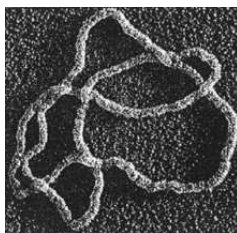


4. Toepassing: geknoopte DNA-strengen

Een onverwachte toepassing van de knopentheorie is te vinden in de biologie. In het binnenste van onze cellen is ons erfelijk materiaal gecodeerd in een lange DNA-streng. Om je iets voor te stellen bij de lengte daarvan, als we de cel als een basketbal zouden voorstellen, en de DNA-streng als

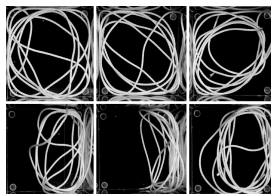
visdraad, dan moet je 200 km aan visdraad in die basketbal stoppen. Het zit er dik in dat dát in de knoop raakt en de cel heeft dus kennis van knopentheorie en kent de drie Reidemeisterzettingen om het DNA te ontwarren!

Daarbij komt nog een extra complicatie en die is dat DNA eigenlijk uit twee strengen bestaat. Die vormen de beroemde dubbele helix en zitten dus ook nog eens onderling in de knoop. In de wiskunde heet zo'n knoop bestaande uit twee componenten een **schakel**, ons verhaal over knopen is eenvoudig uit te breiden naar schakels. Een invariant van schakels is het zogeheten **schakelgetal**, we verwijzen naar [1] voor de precieze definitie. Het blijkt dat er enzymen bestaan die het schakelgetal veranderen, iets wat kan worden vertaald naar het meer of minder compact zijn van het DNA. Dit is een meetbare eigenschap en zo kan iets worden gezegd over het type enzym dat werkzaam was.



FIGUUR 10. Een DNA-streng gezien door een elektronenmicroscop [3]

Tot slot nog een minder serieuze maar wel amusante toepassing. Twee natuurkundigen hebben in 2008 de Ignobel-prijs ontvangen voor hun werk in [2]. In tegenstelling tot de prestigieuze nobelprijs is dit een prijs voor het meest nutteloze onderzoek. De twee natuurkundigen hielden zich bezig met de vraag waarom het snoetje van je iPod toch altijd in de knoop raakt. Als model hiervoor legden ze een snoetje in een bak om die vervolgens goed door elkaar te schudden. Na deze proef vele malen te herhalen, maakten ze een lijst met alle verschillende wiskundige knopen die ze tegenkwamen. Na een statistische analyse bleek het dat bepaalde knopen vaker voorkwamen dan andere. Een resultaat dat wellicht interessant is, maar of het ons helpt om je iPod-snoetje uit de knoop te houden?



FIGUUR 11. Een snoetje in een bak, vóór (boven) en ná (onder) schudden

Referenties

- [1] C. C. Adams. *The knot book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. W.H. Freeman and Company, New York, 1994.
- [2] D.M. Raymer and D.E. Smith. Spontaneous knotting of an agitated string. *PNAS* 104 (2007), no. 42, p. 16432–16437.
- [3] D.W. Sumners: Lifting the curtain: using topology to probe the hidden action of enzymes. *Notices Amer. Math. Soc.* 42 (1995), no. 5, p. 528–537.

IMAPP, RADBOUD UNIVERSITEIT, HEYENDAALSEWEG 135, 6525ED NIJMEGEN
E-mail address: waltervs@math.ru.nl