УДК 511.36

В. В. Зудилин

О мере иррациональности значений G-функций

В работе установлена иррациональность значений G-функций, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений, в рациональной точке a/b, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, с условием $b > C(\varepsilon)|a|^{2+\varepsilon}$ для произвольного положительного ε. В случае обобщенной полилогарифмической функции

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+\lambda)^m}, \quad m \geqslant 2, \quad \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\},$$

указан явный вид постоянной $C(\varepsilon)$.

Библиография: 12 наименований.

Введение

В классической работе К. Зигеля [1] был предложен метод исследования арифметических свойств значений некоторых аналитических функций, которые были названы автором E- и *G-функциями*.

Определение 1. Будем говорить, что *совокупность функций*

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{j,\nu} z^\nu, \quad j = 1, \dots, m,$$

принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$, где $C \geqslant 1$ и $\Phi \geqslant 1$, если все коэффициенты $f_{j,\nu}$, $j = 1, \dots, m$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$, принадлежат полю рациональных чисел и для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная γ, зависящая только от ε и функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$, такая, что:

1) $|f_{j,\nu}| < \gamma C^{(1+\varepsilon)\nu}$, $j = 1, \dots, m$, $\nu \in \mathbb{Z}^+$;

2) существуют натуральные числа $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что все числа $\varphi_n f_{j,\nu} \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, m$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, и $\varphi_n < \gamma \Phi^{(1+\varepsilon)n}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Если совокупность функций принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$ с некоторыми (конечными) постоянными $C \geqslant 1$, $\Phi \geqslant 1$, то каждая из этих функций *лежит в классе G-функций с рациональными коэффициентами*. В дальнейшем под G-функцией мы будем понимать произвольную функцию из последнего класса.

В первых работах, связанных с применением метода Зигеля к классу G-функций (см. [2], [3]), были получены оценки линейных форм и многочленов от значений этих

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94–01–00739.

функций в алгебраических точках. При этом, однако, величина этих точек зависила от высоты рассматриваемых форм. В 1974г., воспользовавшись указанием Зигеля в работе [1] о сокращении коэффициентов линейных приближающих форм ("сокращении факториалов"), А.И. Галочкин [4] получил для одного подкласса G-функций оценки модулей многочленов от значений в точках, не зависящих от высоты многочленов. Там же была сформулирована теорема об эффективной оценке линейной формы от G-функций из одного класса, доказательство которой опубликовано в работе [5]. В 1985г. Д.В. Чудновский и Г.В. Чудновский [6] доказали, что условие "сокращения факториалов", сформулированное в работе [4], выполняется для однородных систем линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют G-функции. Несложное усовершенствование схемы Чудновских позволило в работе [7] получить этот результат и для неоднородных систем. Тем самым применение метода Зигеля к классу G-функций было доведено до его естественных границ. Отметим, что использование приближений Паде второго рода дает возможность получать оценки линейных форм от значений G-функций без условия "сокращения факториалов" (см. [6]).

Пусть совокупность G-функций $f_1(z),\dots,f_m(z)$, линейно независимых с единицей, удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}y_l = Q_{l0}+\sum_{j=1}^{m}Q_{lj}y_j, \qquad l=1,\dots,m,\\ Q_{lj}=Q_{lj}(z)\in\mathbb{C}(z), \qquad l=1,\dots,m, \quad j=0,\dots,m.\end{gathered} \tag{0.1}$$

Согласно [8, гл. 3, лемма 3] для всех коэффициентов системы (0.1) будет выполнено $Q_{lj}(z)\in\mathbb{Q}(z)$ и можно выбрать многочлен $T(z)\in\mathbb{Z}[z]$ таким, что

$$T(z)Q_{lj}(z)\in\mathbb{Z}[z], \qquad l=1,\dots,m, \quad j=0,\dots,m. \tag{0.2}$$

Наряду с системой (0.1) будем рассматривать сопряженную к ее однородной части систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}a_j = \sum_{l=1}^{m}S_{jl}a_l, \qquad j=1,\dots,m,\\ S_{jl}(z)=-Q_{lj}(z)\in\mathbb{Q}(z), \qquad j,l=1,\dots,m.\end{gathered} \tag{0.3}$$

Из (0.3) следует, что для производных порядка n, $n=1,2,\dots$, имеют место соотношения

$$\frac{d^n}{dz^n}a_j = \sum_{l=1}^{m}S_{jl}^{[n]}a_l, \qquad j=1,\dots,m, \tag{0.4}$$

где $S_{jl}^{[n]}(z)\in\mathbb{Q}(z)$, $j,l=1,\dots,m$. Обозначим через $T_*(z)\in\mathbb{Z}[z]$ наименьший общий знаменатель функций $S_{jl}(z)=-Q_{lj}(z)$, $j,l=1,\dots,m$, т.е. такой многочлен, что

$$T_*(z)S_{jl}(z)\in\mathbb{Z}[z], \quad j,l=1,\dots,m.$$

Согласно выбору (0.2) многочлена $T(z)$ получаем, что

$$T(z)/T_*(z) \in \mathbb{Z}[z]. \tag{0.5}$$

Несложные выкладки показывают справедливость следующих рекуррентных соотношений для коэффициентов систем (0.4):

$$S_{jl}^{[n+1]}(z) = \frac{d}{dz} S_{jl}^{[n]}(z) + \sum_{i=1}^{m} S_{ji}^{[n]}(z) \cdot S_{il}(z), \quad j,l = 1,\dots,m, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.6}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} T_*^{n+1}(z) S_{jl}^{[n+1]}(z) = T_*(z) \frac{d}{dz}\bigl(T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z)\bigr) + \sum_{i=1}^{m} T_*^n(z) S_{ji}^{[n]}(z) \cdot T_*(z) S_{il}(z) \\ - nT_*'(z) T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z), \quad j,l = 1,\dots,m, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{0.7}$$

Отсюда, в частности, следует, что $T_*^n(z) S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $j,l = 1,\dots,m$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2. Будем говорить, что *система линейных дифференциальных уравнений* (0.3) *принадлежит классу* $\mathbf{G}(\mathbb{Q},\Psi)$ (удовлетворяет условию "сокращения факториалов" с постоянной Ψ), где $\Psi \geqslant 1$, если существуют натуральные числа $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$\frac{\psi_n}{i!} T_*^i(z) S_{jl}^{[i]}(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad j,l = 1,\dots,m, \quad i = 1,\dots,n, \quad n \in \mathbb{N},$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная γ', зависящая только от ε и системы (0.3), такая, что $\psi_n < \gamma' \Psi^{(1+\varepsilon)n}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Положим

$$t = \max\Bigl\{\deg T - 1, \max_{l,j}\{\deg TQ_{lj}\}\Bigr\}, \quad H = \max\Bigl\{H(T), \max_{l,j}\{H(TQ_{lj})\}\Bigr\},$$

где под $H(\cdot)$ мы понимаем высоту многочлена из $\mathbb{Z}[z]$ (максимум модулей его коэффициентов).

Основная теорема. *Пусть совокупность функций* $f_1(z),\dots,f_m(z)$, $m \geqslant 2$, *из класса* $\mathbf{G}(\mathbb{Q},C,\Phi)$

а) *линейно независима над* $\mathbb{C}(z)$ *с единицей в случае* $m=2$,

б) *алгебраически независима над* $\mathbb{C}(z)$ *в случае* $m>2$

и составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (0.1), *для которой система* (0.3) *принадлежит классу* $\mathbf{G}(\mathbb{Q},\Psi)$. *Пусть, кроме того, рациональная точка* $\alpha = a/b$, *где* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет условию*

$\alpha T(\alpha) \neq 0$, $\varepsilon < 1/(m+t+1)$ – произвольная положительная постоянная. Положим $N = [1/\varepsilon] - m + 1$,

$$C_0 = e^{\varepsilon(1-\log\varepsilon)}\bigl(2(t+1)^2 H\Psi\bigr)^{\varepsilon(1+\log N)}\Phi^{1+t\varepsilon}(C\Phi)^{\frac{1}{\varepsilon}\left(2-\frac{m-1}{N+m-1}\right)\binom{N+m-2}{m-1}},$$
$$\eta_0 = \frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_0}{\bigl(1-(m+t+1)\varepsilon\bigr)\log b - \log C_0 - \bigl(2-(m+1)\varepsilon\bigr)\log\bigl(C|a|\bigr)}.$$

Если для заданной точки α выполнено условие $\eta_0 > 0$, иными словами, если

$$b^{1-(m+t+1)\varepsilon} > C_0 \cdot \bigl(C|a|\bigr)^{2-(m+1)\varepsilon}, \tag{0.8}$$

то числа $f_l(\alpha)$, $l = 1, \dots, m$, иррациональны. Более того, для любого $\eta > \eta_0$ и произвольных $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(f_1, \dots, f_m; \alpha, \varepsilon, \eta)$, справедливы оценки

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}, \quad l = 1, \dots, m.$$

Замечание 1. В предыдущих работах (см., например, [5], [6]) доказана иррациональность значений G-функций, удовлетворяющих системе (0.1), в рациональных точках $\alpha = a/b$, для которых выполнено условие типа

$$b > C_0'|a|^{m+1+\delta}, \quad \delta > 0.$$

Поэтому основная теорема расширяет класс известных иррациональных значений таких G-функций.

Замечание 2. Результаты основной теоремы и следствий из нее сохраняют силу в случае, когда рассматриваются G-функции с коэффициентами из мнимого квадратичного поля $\mathbb{I}$ и $\alpha \in \mathbb{I}$. При этом схема доказательства основной теоремы остается неизменной.

Замечание 3. Для доказательства основной теоремы используется конструкция *градуированных приближений Паде*, предложенная Г. В. Чудновским в работе [9]. Она позволяет установить хорошие оценки меры иррациональности значений не только G-, но и E-функций (см. по этому поводу работу автора [10]).

Следствие 1. *Пусть функция $f(z) \in \mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$ является решением линейного дифференциального уравнения*

$$A_m y^{(m)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = B, \quad m \geqslant 2,$$
$$A_j = A_j(z) \in \mathbb{C}[z], \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad B = B(z) \in \mathbb{C}[z],$$

порядка m и не удовлетворяет никакому

а) *линейному в случае $m = 2$,*

б) *алгебраическому в случае $m > 2$*

дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ *меньшего порядка. Пусть, кроме того,* $\alpha = a/b$, *где* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет условию* $\alpha A_m(\alpha) \neq 0$, $\varepsilon < 1/(m+t+1)$ – *произвольная положительная постоянная. Обозначим через* $d \in \mathbb{N}$ *наименьший общий знаменатель коэффициентов многочленов* $B, A_0, \dots, A_m \in \mathbb{Q}[z]$ *и положим*

$$t = \max\Big\{\deg A_m - 1, \max_{0 \leqslant j < m} \{\deg A_j\}, \deg B\Big\},$$

$$H = d \cdot \max\Big\{H(B), \max_{0 \leqslant j \leqslant m} \{H(A_j)\}\Big\},$$

$$\Psi = \big(C\Phi\big)^{6(m+1)^2(t+1)(1+\log m)},$$

$$C_0 = \big(2e(t+1)^2 H\Psi\big)^{\varepsilon(1-\log\varepsilon)} \Phi^{1+t\varepsilon} (C\Phi)^{\frac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m (m-1)!}},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_0}{\big(1-(m+t+1)\varepsilon\big)\log b - \log C_0 - \big(2-(m+1)\varepsilon\big)\log\big(C|a|\big)}.$$

Если для заданной точки α *выполнено условие* (0.8), *то число* $f(\alpha)$ *иррационально и для любого* $\eta > \eta_0$ *и произвольных* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(f; \alpha, \varepsilon, \eta)$, *справедливы оценки*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}.$$

Доказательство. Функции $f_l(z) = f^{(l-1)}(z)$, $l = 1, \dots, m$, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$y_l' = y_{l+1}, \qquad l = 1, \dots, m-1, \qquad y_m' = \frac{B}{A_m} - \frac{A_0}{A_m} y_1 - \dots - \frac{A_{m-1}}{A_m} y_{m-1},$$

и принадлежат классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$. Как следует из теоремы [7, §4 гл. VI], сокращение факториалов для системы (0.1) происходит с постоянной, не большей $(C\Phi)^{6(m+1)^2(t+1)}$, а согласно утверждению [7, §5.5 гл. IV] для системы (0.3), сопряженной к (0.1), эту постоянную необходимо еще возвести в степень $1+\log\ m$. Кроме того, для $N = [1/\varepsilon] - m + 1 \geqslant 1$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered} \log N < \log(N+m-1) \leqslant -\log\varepsilon, \qquad \frac{m-1}{N+m-1} \geqslant (m-1)\varepsilon, \\ \binom{N+m-2}{m-1} < \frac{(N+m-1)^{m-1}}{(m-1)!} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{m-1}(m-1)!}. \end{gathered} \tag{0.9}$$

Результат следствия получается теперь из основной теоремы прямой подстановкой.

Через $\operatorname{den}\lambda \in \mathbb{N}$ обозначим знаменатель несократимой дроби рационального числа λ. Введем в рассмотрение следующие функции натурального аргумента:

$$\begin{gathered} \rho(b) = \frac{b}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant b \\ (i,b)=1}} \frac{1}{i}, \quad \chi(b) = \sum_{p|b} \frac{\log p}{p-1}, \\ \varphi(b) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant b \\ (i,b)=1}} 1 - \text{функция Эйлера}, \quad b \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{0.10}$$

Так, например, $\rho(1) = 1$, $\chi(1) = 0$; $\rho(2) = 2$, $\chi(2) = \log 2$; $\rho(3) = \frac{9}{4}$, $\chi(3) = \frac{1}{2}\log 3$; $\rho(4) = \frac{8}{3}$, $\chi(4) = \log 2$ и т.д.

Следствие 2. *Рассмотрим функцию*

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+\lambda)^m}, \quad m \geqslant 2, \quad \lambda \in \mathbb{Q} \setminus \{-1,-2,\dots\}.$$

Пусть $\alpha = a/b \neq 0$, *где* $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, *и пусть* $0 < \varepsilon < 1/(m+2)$. *Положим* $\rho = \rho(\operatorname{den}\lambda)$, $\chi = \chi(\operatorname{den}\lambda)$, $H = \operatorname{den}\lambda \cdot \max\{1,|\lambda|\}$,

$$C_0 = \exp\biggl\{ \bigl(\log(8H) + \chi + m\bigr)\varepsilon(1-\log\varepsilon) + m\rho\biggl(1+\varepsilon+\frac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m (m-1)!}\biggr)\biggr\},$$

$$\eta_0 = \frac{(1+\varepsilon)\log b + \log C_0}{\bigl(1-(m+2)\varepsilon\bigr)\log b - \log C_0 - \bigl(2-(m+1)\varepsilon\bigr)\log|a|}.$$

Если для заданной точки α *выполнено условие*

$$b^{1-(m+2)\varepsilon} > C_0 \cdot |a|^{2-(m+1)\varepsilon},$$

то число $f(\alpha)$ *иррационально и для любого* $\eta > \eta_0$ *и произвольных* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > q_*(\lambda,\alpha,\varepsilon,\eta)$, *справедлива оценка*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > q^{-1-\eta}.$$

В частном случае, при $\lambda = 0$, *имеем*

$$C_0 = \exp\biggl\{ (m+\log 8)\varepsilon(1-\log\varepsilon) + m\biggl(1+\varepsilon+\frac{2-(m-1)\varepsilon}{\varepsilon^m (m-1)!}\biggr)\biggr\}.$$

Доказательство следствия 2 подробно описано в §3.

Справедливость оценок основной теоремы будем доказывать для фиксированного $l = l^*$, $1 \leqslant l^* \leqslant m$.

§1. Градуированные приближения Паде

Докажем прежде всего два вспомогательных утверждения: об оценке сверху высоты произведения произвольных многочленов и об оценке сверху степеней и высот многочленов $T^n(z) S_{jl}^{[n]}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $j,l = 1,\dots,m$, $n \in \mathbb{N}$ (тот факт, что эти функции являются многочленами, непосредственно следует из выбора многочлена $T_*(z)$ и того, что он делит $T(z)$ согласно (0.5)).

Лемма 1.1. *Пусть* $w_1(z),\dots,w_N(z)$ – *произвольные многочлены с вещественными коэффициентами, а степень многочлена* $w(z) = w_1(z)\dots w_N(z)$ *не выше* n. *Тогда*

$$H(w) \leqslant (n+1)^N H(w_1)\dots H(w_N).$$

Доказательство. Если коэффициенты формальных степенных рядов

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu z^\nu, \quad F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} F_\nu z^\nu$$

удовлетворяют условиям $|f_\nu| \leqslant F_\nu$, $\nu=0,1,2,\dots$, то условимся обозначать $f(z) \ll F(z)$. Как следует из определения высоты многочлена,

$$w_i(z) \ll H(w_i)\sum_{\nu=0}^{\deg w_i} z^\nu \ll H(w_i)(1+z+\dots+z^n), \quad i=1,\dots,N,$$

откуда

$$w(z) \ll H(w_1)\dots H(w_N)(1+z+\dots+z^n)^N.$$

Поскольку высота многочлена с неотрицательными вещественными коэффициентами не превосходит суммы всех его коэффициентов, равную значению многочлена в точке $z=1$, получаем требуемое утверждение.

Лемма 1.2. *Справедливы оценки*

$$\deg T^n S_{jl}^{[n]} \leqslant tn, \qquad H\bigl(T^n S_{jl}^{[n]}\bigr) \leqslant C_1\bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^n n!,$$
$$C_1=C_1(m,t)>0, \qquad j,l=1,\dots,m, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Доказательство. Воспользуемся рекуррентными соотношениями (0.7), в которых $T_*(z)$ заменено на $T(z)$. Из них непосредственно вытекают оценки для степеней: $\deg T^n S_{jl}^{[n]} \leqslant tn$, $j,l=1,\dots,m$, $n\in\mathbb{N}$. Кроме того, полагая

$$H_n=\max_{1\leqslant j,l\leqslant m}\bigl\{H\bigl(T^n S_{jl}^{[n]}\bigr)\bigr\}, \quad n\in\mathbb{N},$$

получаем

$$\begin{aligned}
T(z)\frac{d}{dz}\bigl(T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z)\bigr) &\ll H\sum_{\nu=0}^{t+1} z^\nu\cdot H_n\frac{d}{dz}\sum_{\mu=0}^{tn} z^\mu\\
&\ll H\sum_{\nu=0}^{t+1} z^\nu\cdot tnH_n\sum_{\mu=0}^{tn-1} z^\mu\\
&\ll (t+2)H\cdot tnH_n\sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu, \quad j,l=1,\dots,m;\\
T^n(z)S_{ji}^{[n]}(z)\cdot T(z)S_{il}(z) &\ll H_n\sum_{\nu=0}^{tn} z^\nu\cdot H\sum_{\mu=0}^{t} z^\mu\\
&\ll H_n\cdot(t+1)H\sum_{\nu=0}^{tn+t} z^\nu, \quad j,i,l=1,\dots,m;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
nT'(z)T^n(z)S_{jl}^{[n]}(z) &\ll nH\frac{d}{dz}\sum_{\nu=0}^{t+1}z^\nu\cdot H_n\sum_{\mu=0}^{tn}z^\mu \\
&\ll (t+1)nH\sum_{\nu=0}^{t}z^\nu\cdot H_n\sum_{\mu=0}^{tn}z^\mu \\
&\ll (t+1)^2nH\cdot H_n\sum_{\nu=0}^{tn+t}z^\nu, \quad j,l=1,\dots,m, \\
&\qquad n\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Поэтому из рекуррентных соотношений имеем

$$
\begin{gathered}
T^{n+1}(z)S_{jl}^{[n+1]}(z) \ll \bigl(t(t+2)nHH_n+(t+1)mHH_n+(t+1)^2nHH_n\bigr)\sum_{\nu=0}^{tn+t}z^\nu \\
\ll 2(t+1)^2(n+1)\left(1-\frac{1}{2(t+1)^2}+\frac{m}{2(t+1)(n+1)}\right)HH_n\sum_{\nu=0}^{tn+t}z^\nu, \\
j,l=1,\dots,m,\quad n\in\mathbb{N},
\end{gathered}
$$

или

$$
H_{n+1}\leqslant 2(t+1)^2(n+1)\left(1-\frac{1}{2(t+1)^2}+\frac{m}{2(t+1)(n+1)}\right)HH_n, \quad n\in\mathbb{N}.
$$

Так как $H_1\leqslant H$, получаем

$$
H_{n+1}\leqslant 2^n(t+1)^{2n}H^{n+1}(n+1)!\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2(t+1)^2}+\frac{m}{2(t+1)(i+1)}\right), \quad n\in\mathbb{N}.
$$

Поскольку

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1}{2(t+1)^2}+\frac{m}{2(t+1)(i+1)} &\geqslant 1 \quad \text{при} \quad i\leqslant m(t+1)-1, \\
1-\frac{1}{2(t+1)^2}+\frac{m}{2(t+1)(i+1)} &\leqslant 1 \quad \text{при} \quad i\geqslant m(t+1)-1,
\end{aligned}
$$

для любого натурального n выполнено неравенство

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2(t+1)^2}+\frac{m}{2(t+1)(i+1)}\right) \\
&\qquad \leqslant C_1=\prod_{i=1}^{m(t+1)-1}\left(1-\frac{1}{2(t+1)^2}+\frac{m}{2(t+1)(i+1)}\right),
\end{aligned}
$$

которое и завершает доказательство леммы.

В описываемой ниже схеме построения систем приближающих линейных форм будут встречаться суммы, слагаемые которых нумеруются мультииндексами $\bar{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_m) \in \mathbb{Z}^m$. При этом если в некоторой сумме по $\bar{\kappa}$ встретится слагаемое хотя бы с одной компонентой $\kappa_j < 0$, то будем считать это слагаемое отсутствующим (равным нулю). Через $\bar{e}_j$ обозначим мультииндекс, у которого на месте с номером j стоит единица, а на остальных местах – нули. Для экономии места в формулах будем писать

$$\bar{a}^{\bar{\kappa}} = \prod_{j=1}^{m} a_j^{\kappa_j}, \quad |\bar{\kappa}| = \sum_{j=1}^{m} \kappa_j.$$

Введем множества мультииндексов

$$\Omega = \Omega(m, N) = \{\bar{\kappa} : |\bar{\kappa}| \in \{N-1, N\}\}, \qquad \Theta = \Theta(m, N) = \{\bar{s} : |\bar{s}| = N\},$$
$$\omega = \operatorname{Card}\Omega = \binom{N+m-2}{m-1} + \binom{N+m-1}{m-1}, \qquad \theta = \operatorname{Card}\Theta = \binom{N+m-1}{m-1},$$

элементы которых упорядочены в лексикографическом порядке.

Будем рассматривать формы от переменных $a_1, \dots, a_m$ с функциональными коэффициентами вида

$$R(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) + \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z), \quad P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{C}(z). \tag{1.1}$$

Поскольку такие формы однородны и имеют степень N, их можно представить в виде

$$R(z; \bar{a}) = \sum_{\bar{s}\in\Theta} \bar{a}^{\bar{s}} R_{\bar{s}}(z). \tag{1.2}$$

Сравнивая коэффициенты при $\bar{a}^{\bar{s}}$, $\bar{s} \in \Theta$, в (1.1) и (1.2), получаем

$$R_{\bar{s}}(z) = P_{\bar{s}}(z) + \sum_{j=1}^{m} P_{\bar{s}-\bar{e}_j}(z) f_j(z), \quad \bar{s} \in \Theta. \tag{1.3}$$

Лемма 1.3. *Пусть совокупность функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ принадлежит классу $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, C, \Phi)$. Тогда для любых натуральных чисел N и M существуют многочлены $P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Q}[z]$, $\bar{\kappa} \in \Omega$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *не все они тождественно равны нулю;*

2) $\deg P_{\bar{\kappa}} < M$ *для всех* $\bar{\kappa} \in \Omega$;

3) $P_{\bar{\kappa}}(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$, *и для произвольного $\varepsilon_1 > 0$ при $M > M_1(N, \varepsilon_1)$ выполнено*

$$H(P_{\bar{\kappa}}) < C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \qquad \bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta,$$
$$C_2 = (C\Phi)^{\frac{\omega(\omega-\theta)}{\varepsilon\theta}} = (C\Phi)^{\frac{1}{\varepsilon}\left(2-\frac{m-1}{N+m-1}\right)\binom{N+m-2}{m-1}};$$

4) *порядок нуля в точке $z = 0$ каждой из линейных функциональных форм (1.3) не ниже*

$$K = \left[\frac{(\omega-\varepsilon)M}{\theta}\right] = \left[\left(2 - \frac{m-1}{N+m-1} - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)M\right].$$

Доказательство. Рассмотрим разложение в степенной ряд требуемых многочленов:

$$P_{\bar\kappa}(z)=\sum_{\nu=0}^{M-1}P_{\bar\kappa,\nu}z^\nu,\qquad \bar\kappa\in\Omega.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^m P_{\bar s-\bar e_j}(z)f_j(z)=\sum_{j=1}^m\sum_{\mu=0}^\infty\sum_{\nu=0}^{\min\{\mu,M-1\}}P_{\bar s-\bar e_j,\nu}f_{j,\mu-\nu}z^\mu,\qquad \bar s\in\Theta.$$

Будем искать совокупность целых чисел $P_{\bar\kappa,\nu}$, $\bar\kappa\in\Omega\setminus\Theta$, $\nu=0,1,\dots,M-1$, таких, что

$$\sum_{j=1}^m\sum_{\nu=0}^{M-1}P_{\bar s-\bar e_j,\nu}f_{j,\mu-\nu}=0,\qquad \mu=M,M+1,\dots,K-1,\quad \bar s\in\Theta. \tag{1.4}$$

Тогда, полагая

$$P_{\bar s,\mu}=-\sum_{j=1}^m\sum_{\nu=0}^{\mu}P_{\bar s-\bar e_j,\nu}f_{j,\mu-\nu},\qquad \mu=0,1,\dots,M-1,\quad \bar s\in\Theta,$$

получим

$$R_{\bar s}(z)=P_{\bar s}(z)+\sum_{j=1}^m P_{\bar s-\bar e_j}(z)f_j(z)=\sum_{\mu=K}^\infty\sum_{j=1}^m\sum_{\nu=0}^{M-1}P_{\bar s-\bar e_j,\nu}f_{j,\mu-\nu}z^\mu,\qquad \bar s\in\Theta,$$

иными словами, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0}R_{\bar s}(z)\geqslant K,\qquad \bar s\in\Theta.$$

Возьмем последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb N$ из определения класса $\mathbf G(\mathbb Q,C,\Phi)$ и умножим уравнения (1.4) на φ_K:

$$\sum_{j=1}^m\sum_{\nu=0}^{M-1}P_{\bar s-\bar e_j,\nu}\varphi_K f_{j,\mu-\nu}=0,\qquad \mu=M,M+1,\dots,K-1,\quad \bar s\in\Theta.$$

Получившиеся $\theta(K-M)$ уравнений относительно $(\omega-\theta)M$ неизвестных $P_{\bar\kappa,\nu}$, $\bar\kappa\in\Omega\setminus\Theta$, $\nu=0,1,\dots,M-1$, имеют целочисленные коэффициенты, ограниченные по модулю величиной $\gamma^2(C\Phi)^{(1+\varepsilon_1/4)K}$, где постоянная γ зависит только от $\varepsilon_1>0$. Согласно лемме Зигеля [8, гл. 3, лемма 11] существует нетривиальный набор многочленов $P_{\bar\kappa}(z)\in\mathbb Z[z]$, $\bar\kappa\in\Omega\setminus\Theta$, высота каждого из которых не превосходит

$$\Bigl((\omega-\theta)M\gamma^2(C\Phi)^{(1+\frac{\varepsilon_1}{4})K}\Bigr)^{\frac{\theta(K-M)}{(\omega-\theta)M-\theta(K-M)}}\leqslant\Bigl((C\Phi)^{(1+\frac{\varepsilon_1}{2})\frac{\omega M}{\theta}}\Bigr)^{\frac{(\omega-\theta)}{\varepsilon}}$$

при любом $\varepsilon_1 > 0$ и произвольных N, $M > M_1(N,\varepsilon_1)$. Утверждение леммы доказано.

Введем дифференциальный оператор

$$D=\frac{\partial}{\partial z}-\sum_{j=1}^{m}\biggl(\sum_{l=1}^{m}Q_{lj}(z)a_l\biggr)\frac{\partial}{\partial a_j},$$

связанный с системой линейных однородных уравнений (0.3). Тогда, как легко убедиться [10],

$$D\sum_{j=1}^{m}a_jf_j(z)=\sum_{l=1}^{m}a_lQ_{l0}(z), \tag{1.5}$$

а значит, функциональные формы вида (1.1) с коэффициентами $P_{\bar\kappa}(z)\in\mathbb{C}(z)$, $\bar\kappa\in\Omega$, после применения к ним оператора D переходят в формы того же вида с другими коэффициентами.

Положим теперь

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^{[n]}(z;\bar a)&=\sum_{\bar s:|\bar s|=N}\bar a^{\bar s}\mathscr{R}^{[n]}_{\bar s}(z)\\&=\sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N}\bar a^{\bar\kappa}\mathscr{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z)+\sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1}\bar a^{\bar\kappa}\mathscr{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\sum_{j=1}^{m}a_jf_j(z)\\&=D^n\biggl(\sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N}\bar a^{\bar\kappa}P_{\bar\kappa}(z)+\sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1}\bar a^{\bar\kappa}P_{\bar\kappa}(z)\sum_{j=1}^{m}a_jf_j(z)\biggr)\\&=D^n\biggl(\sum_{\bar s:|\bar s|=N}\bar a^{\bar s}R_{\bar s}(z)\biggr),\qquad n=0,1,2,\dots,\end{aligned}\tag{1.6}$$

где $P_{\bar\kappa}(z)$, $\bar\kappa\in\Omega$, и $R_{\bar s}(z)$, $\bar s\in\Theta$, – построенные в лемме 1.3 многочлены и отвечающие им линейные формы (1.3).

Лемма 1.4. *Для элементов последовательности функциональных форм* (1.6) *справедливы рекуррентные соотношения*

$$\begin{aligned}\mathscr{P}^{[n+1]}_{\bar\kappa}(z)&=\frac{d}{dz}\mathscr{P}^{[n]}_{\bar\kappa}(z)-\sum_{l,j=1}^{m}(\kappa_j-\delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)\mathscr{P}^{[n]}_{\bar\kappa-\bar e_l+\bar e_j}(z)\\&\quad+\bigl(|\bar\kappa|-N+1\bigr)\sum_{l=1}^{m}Q_{l0}(z)\mathscr{P}^{[n]}_{\bar\kappa-\bar e_l}(z),\qquad \bar\kappa\in\Omega,\quad n\geqslant 0,\end{aligned}\tag{1.7}$$

$$\mathscr{R}^{[n+1]}_{\bar s}(z)=\frac{d}{dz}\mathscr{R}^{[n]}_{\bar s}(z)-\sum_{l,j=1}^{m}(s_j-\delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)\mathscr{R}^{[n]}_{\bar s-\bar e_l+\bar e_j}(z),\qquad \bar s\in\Theta,\quad n\geqslant 0. \tag{1.8}$$

Отсюда, в частности, следует, что:

а) *функции*

$$P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)=\frac{T^n(z)}{n!}\mathscr{P}_{\bar\kappa}^{[n]}(z), \quad \bar\kappa\in\Omega, \quad n=0,1,2,\dots, \tag{1.9}$$

являются многочленами степени не выше $M+tn-1$;

б) *порядок нуля в точке* $z=0$ *функциональных линейных форм*

$$R_{\bar s}^{[n]}(z)=\frac{T^n(z)}{n!}\mathscr{R}_{\bar s}^{[n]}(z), \quad \bar s\in\Theta, \quad n=0,1,2,\dots, \tag{1.10}$$

не ниже $K-n$.

Доказательство. Требуемые рекуррентные формулы (1.7), (1.8) вытекают из соотношения

$$\mathscr{R}^{[n+1]}(z;\bar a)=D\mathscr{R}^{[n]}(z;\bar a), \quad n=0,1,2,\dots,$$

и определения оператора D.

а) Из рекуррентных соотношений (1.7), поскольку

$$T^{n+1}(z)\frac{d}{dz}\mathscr{P}(z)=T(z)\frac{d}{dz}\big(T^n(z)\mathscr{P}(z)\big)-nT'(z)T^n(z)\mathscr{P}(z), \quad n=0,1,2,\dots,$$

для любой функции $\mathscr{P}(z)$, имеем

$$\begin{aligned}T^{n+1}(z)\mathscr{P}_{\bar\kappa}^{[n+1]}(z)&=T(z)\frac{d}{dz}\big(T^n(z)\mathscr{P}_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\big)-nT'(z)T^n(z)\mathscr{P}_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\\&-\sum_{l,j=1}^{m}(\kappa_j-\delta_{lj}+1)T(z)Q_{lj}(z)\cdot T^n(z)\mathscr{P}_{\bar\kappa-\bar e_l+\bar e_j}^{[n]}(z)\\&+\big(|\bar\kappa|-N+1\big)\sum_{l=1}^{m}T(z)Q_{l0}(z)\cdot T^n(z)\mathscr{P}_{\bar\kappa-\bar e_l}^{[n]}(z), \quad \bar\kappa\in\Omega, \quad n=0,1,2,\dots\end{aligned}$$

При $n=0$ функции $\mathscr{P}_{\bar\kappa}^{[0]}(z)=P_{\bar\kappa}(z)$, $\bar\kappa\in\Omega$, являются многочленами степени не выше $M-1$ согласно лемме 1.3. Простой индукцией по $n=0,1,2,\dots$ убеждаемся, что функции (1.9) также являются многочленами, степень которых не превосходит $M+tn-1$. Отсюда следует утверждение п. а).

б) Из рекуррентных соотношений (1.8) и ввиду того, что построенные в лемме 1.3 функции $\mathscr{R}_{\bar s}^{[0]}(z)=R_{\bar s}(z)$, $\bar s\in\Theta$, имеют в точке $z=0$ порядок нуля не ниже K, индукцией по $n=0,1,2,\dots$ заключаем, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\mathscr{R}_{\bar s}^{[n]}(z)\geqslant K-n, \quad \bar s\in\Theta.$$

Отсюда следует оценка снизу порядка нуля линейных форм (1.10).

В дальнейшем будем пользоваться символами $\bar\kappa^*$ и $\bar s^*$ для обозначения мультииндексов $(N-1)\bar e_{l^*}$ и $N\bar e_{l^*}$ соответственно. Через ψ_n' обозначим наименьший общий знаменатель коэффициентов многочлена $P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(z)$, $n=0,1,2,\dots$

Лемма 1.5. *Пусть $\varepsilon_1 > 0$ выбрано в соответствии с п. 3) леммы 1.3. Тогда для натуральных чисел ψ'_n, многочленов $P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(z)$ и форм $R^{[n]}_{\bar{s}^*}(z)$ при $M > M_2(N,\varepsilon_1) \geqslant M_1(N,\varepsilon_1)$, $n < (K-M)/(t+1)$ и $|\alpha| < 1/2C$ справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\psi'_n \leqslant C_3 \Psi^{(1+\varepsilon_1/2)n(1+\log N)},\\ \bigl|P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(\alpha)\bigr| \leqslant C_4 \binom{M}{n} \bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M},\\ \bigl|R^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)\bigr| \leqslant C_5 \binom{M}{n} \bigl(2(t+1)^2 H\bigr)^{n(1+\log N)} C_2^{(1+\varepsilon_1)M} \bigl(C|\alpha|\bigr)^{K-n},\\ C_3 = C_3(N,\varepsilon_1) > 0, \quad C_4 = C_4(N) > 0, \quad C_5 = C_5(N) > 0.\end{gathered}$$

Кроме того, при $n < (K-M)/(t+1)$ имеем $\varphi_{M+tn}\psi'_n P^{[n]}_{\bar{s}^*}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

Доказательство. Из соотношений (1.6), (1.7) и свойства (1.5) следует, что

$$\sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z) = \frac{T^n(z)}{n!} \cdot D^n \Biggl(\sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \Biggr), \quad n = 0,1,2,\dots$$

Поэтому многочлен $P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*}(z)$ является коэффициентом при $\bar{a}^{\bar{\kappa}^*}$ в функциональной форме

$$\frac{T^n(z)}{n!} \cdot D^n \Biggl(\sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1} \bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z) \Biggr).$$

Чтобы его найти, определим прежде всего коэффициент при $\bar{a}^{\bar{\kappa}^*}$ в выражении $D^n(\bar{a}^{\bar{\kappa}} P_{\bar{\kappa}}(z))$ для каждого $\bar{\kappa}$, $|\bar{\kappa}| = N-1$.

Пусть элемент $\bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Theta$ фиксирован. Будем рассматривать произвольное решение $a_1(z),\dots,a_m(z)$ системы (0.3). Для него выполнено

$$D^n\bigl(\bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) P_{\bar{\kappa}}(z)\bigr) = \frac{d^n}{dz^n}\bigl(\bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) P_{\bar{\kappa}}(z)\bigr).$$

Положим

$$\begin{aligned} b_1(z) = \dots = b_{\kappa_1}(z) &= a_1(z),\\ b_{\kappa_1+1}(z) = \dots = b_{\kappa_1+\kappa_2}(z) &= a_2(z),\\ &\dots\dots\dots\\ b_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}(z) = \dots = b_{N-1}(z) &= a_m(z),\\ b_N(z) &= P_{\bar{\kappa}}(z). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dz^n}\bigl(\bar a^{\bar\kappa}(z)P_{\bar\kappa}(z)\bigr)&=\frac{d^n}{dz^n}\bigl(b_1(z)\dots b_N(z)\bigr)\\&=\sum_{\substack{n_1,\dots,n_N\geqslant0\\n_1+\dots+n_N=n}}\frac{n!}{n_1!\dots n_N!}b_1^{(n_1)}(z)\dots b_N^{(n_N)}(z).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Если $b_i(z)=a_j(z)$ для некоторого $j,\ 1\leqslant j\leqslant m$, то

$$b_i^{(n_i)}(z)=\sum_{l=1}^m S_{jl}^{[n_i]}(z)a_l(z)$$

согласно уравнениям (0.4). Поэтому вклад каждого такого множителя из (1.11) в коэффициент при $\bar a^{\bar\kappa^*}(z)$, где $\bar\kappa^*=(N-1)\bar e_{l^*}$, будет в точности равен $S_{jl^*}^{[n_i]}(z)$, и, следовательно, этот коэффициент будет равен

$$\sum_{\substack{n_1,\dots,n_N\geqslant0\\n_1+\dots+n_N=n}}\frac{n!}{n_1!\dots n_N!}S_{1l^*}^{[n_1]}(z)\dots S_{1l^*}^{[n_{\kappa_1}]}(z)S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+1}]}(z)\dots S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+\kappa_2}]}(z)\dots\\\times S_{ml^*}^{[n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}]}(z)\dots S_{ml^*}^{[n_{N-1}]}(z)P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z).$$

Таким образом,

$$P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(z)=\sum_{\bar\kappa:|\bar\kappa|=N-1}\ \sum_{\substack{n_1,\dots,n_N\geqslant0\\n_1+\dots+n_N=n}}w(\bar\kappa;n_1,\dots,n_N),\tag{1.12}$$

где

$$\begin{aligned}w(\bar\kappa;n_1,\dots,n_N)&=\frac{T^{n_1}(z)S_{1l^*}^{[n_1]}(z)}{n_1!}\dots\frac{T^{n_{\kappa_1}}(z)S_{1l^*}^{[n_{\kappa_1}]}(z)}{n_{\kappa_1}!}\\&\times\frac{T^{n_{\kappa_1+1}}(z)S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+1}]}(z)}{n_{\kappa_1+1}!}\dots\frac{T^{n_{\kappa_1+\kappa_2}}(z)S_{2l^*}^{[n_{\kappa_1+\kappa_2}]}(z)}{n_{\kappa_1+\kappa_2}!}\dots\\&\times\frac{T^{n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}}(z)S_{ml^*}^{[n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}]}(z)}{n_{\kappa_1+\dots+\kappa_{m-1}+1}!}\dots\frac{T^{n_{N-1}}(z)S_{ml^*}^{[n_{N-1}]}(z)}{n_{N-1}!}\\&\times T^{n_N}(z)\frac{P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z)}{n_N!}.\end{aligned}$$

Упорядочим числа $n_1,n_2,\dots,n_N$ в порядке убывания: $n_{i_1}\geqslant n_{i_2}\geqslant\dots\geqslant n_{i_N}$. Тогда, поскольку $n_1+n_2+\dots+n_N=n$, выполнены неравенства

$$n_{i_1}\leqslant n,\ n_{i_2}\leqslant\left[\frac n2\right],\ \dots,\ n_{i_N}\leqslant\left[\frac nN\right].$$

Следовательно,

$$H\left(\frac{T^{n_{i_j}}(z)S_{\cdot l^*}^{[n_{i_j}]}(z)}{n_{i_j}!}\right) \leqslant C_1\big(2(t+1)^2H\big)^{n/j}, \quad j=1,\dots,N, \quad i_j \neq N,$$

согласно лемме 1.2 и

$$H\big(T^{n_{i_j}}(z)\big) \leqslant \big((t+2)H\big)^{n_{i_j}} \leqslant C_1\big(2(t+1)^2H\big)^{n/j}, \quad i_j = N.$$

Кроме того, ввиду (0.5) для последовательности $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из определения 2 выполнено

$$\psi_{[n/j]}\frac{T^{n_{i_j}}(z)S_{\cdot l^*}^{[n_{i_j}]}(z)}{n_{i_j}!} \in \mathbb{Z}[z], \quad j=1,\dots,N, \quad i_j \neq N.$$

Поэтому с учетом того, что

$$\begin{gathered} H\left(\frac{P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z)}{n_N!}\right) \leqslant \binom{M}{n_N} H(P_{\bar\kappa}) \leqslant \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \\ \frac{P_{\bar\kappa}^{(n_N)}(z)}{n_N!} \in \mathbb{Z}[z], \quad T^{n_N}(z) \in \mathbb{Z}[z], \\ n_N \leqslant n < M/2, \quad M > M_1(N,\varepsilon_1), \end{gathered}$$

получаем

$$\begin{gathered} \prod_{j=1}^{N} \psi_{[n/j]} \cdot w(\bar\kappa; n_1,\dots,n_N) \in \mathbb{Z}[z], \\ \bar\kappa \in \Omega\setminus\Theta, \quad n_1,\dots,n_N \geqslant 0, \quad n_1+\dots+n_N = n < M/2, \end{gathered}$$

и согласно леммам 1.2 и 1.1

$$\begin{aligned} \deg w(\bar\kappa; n_1,\dots,n_N) &\leqslant t(n_1+\dots+n_{N-1}) + (t+1)n_N + (M+tn_N-1) \\ &\leqslant M+(2t+1)n-1, \\ H\big(w(\bar\kappa; n_1,\dots,n_N)\big) &\leqslant \big(M+(2t+1)n\big)^{N+1}\cdot C_1^N\big(2(t+1)^2H\big)^{ng_N} \\ &\qquad \times \binom{M}{n} C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}, \end{aligned}$$

$$\bar\kappa \in \Omega\setminus\Theta, \qquad n_1,\dots,n_N \geqslant 0, \qquad n_1+\dots+n_N = n < M/2,$$

где

$$g_N = 1+\tfrac12+\tfrac13+\dots+\tfrac1N \leqslant 1+\log N.$$

Пользуясь представлением (1.12), находим, что для заданного $\varepsilon_1 > 0$

$$\psi_n' \leqslant \prod_{j=1}^{N}\psi_{[n/j]} \leqslant (\gamma')^N\Psi^{(1+\varepsilon_1/2)ng_N} \leqslant C_3\Psi^{(1+\varepsilon_1/2)n(1+\log N)}, \quad n < M/2,$$

с некоторой постоянной C_3, зависящей только от N и ε_1,

$$H\bigl(P^{[n]}_{\bar\kappa^*}\bigr) \leqslant \binom{N+m-2}{N-1}\binom{n+N-1}{n}\cdot\bigl(M+(2t+1)n\bigr)^{N+1}$$
$$\times C_1^N\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{ng_N}\cdot\binom{M}{n}C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M}$$
$$\leqslant C_6(3M)^{2N}\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{n(1+\log N)}\cdot\binom{M}{n}C_2^{(1+\varepsilon_1/2)M},$$
$$C_6=C_6(N)>0, \qquad n<M/2,$$

и для $|\alpha|<1$, $M>M_2'(N,\varepsilon_1)$ выполнено

$$|P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(\alpha)| \leqslant (M+tn)H\bigl(P^{[n]}_{\bar\kappa^*}\bigr) \leqslant C_4\binom{M}{n}\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{n(1+\log N)}C_2^{(1+\varepsilon_1)M},$$
$$n<M/2,$$

с некоторой положительной постоянной $C_4=C_4(N)$.

Если положить

$$P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(z)=\sum_{\nu=0}^{M+tn-1}P^{[n]}_{\bar\kappa^*,\nu}z^\nu, \quad n\in\mathbb{Z}^+,$$

то

$$R^{[n]}_{\bar s^*}(z)-P^{[n]}_{\bar s^*}(z)=P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(z)f_{l^*}(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\min\{\mu,M+tn-1\}}P^{[n]}_{\bar\kappa^*,\nu}f_{l^*,\mu-\nu}z^\mu, \quad n\in\mathbb{Z}^+.$$

Поскольку

$$\deg P^{[n]}_{\bar s^*}(z)\leqslant M+tn-1<K-n\leqslant \operatorname*{ord}_{z=0}R^{[n]}_{\bar s^*}(z), \quad n<\frac{K-M}{t+1},$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} R^{[n]}_{\bar s^*}(z)&=\sum_{\mu=K-n}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{M+tn-1}P^{[n]}_{\bar\kappa^*,\nu}f_{l^*,\mu-\nu}z^\mu,\\ P^{[n]}_{\bar s^*}(z)&=-\sum_{\mu=0}^{M+tn-1}\sum_{\nu=0}^{\mu}P^{[n]}_{\bar\kappa^*,\nu}f_{l^*,\mu-\nu}z^\mu, \end{aligned}\right\}\quad n<\frac{K-M}{t+1}.$$

Отсюда для $M>M_2''(N,\varepsilon_1)$, $|\alpha|<1/2C$ получаем

$$|R^{[n]}_{\bar s^*}(\alpha)|\leqslant (M+tn)H\bigl(P^{[n]}_{\bar\kappa^*}\bigr)\sum_{\mu=K-n}^{\infty}C^{(1+\varepsilon_1/8)\mu}|\alpha|^\mu$$
$$\leqslant (M+tn)H\bigl(P^{[n]}_{\bar\kappa^*}\bigr)C^{\varepsilon_1(K-n)/8}\bigl(C|\alpha|\bigr)^{K-n}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{C^{1+\varepsilon_1/8}}{2C}\right)^\mu$$
$$\leqslant (M+tn)H\bigl(P^{[n]}_{\bar\kappa^*}\bigr)C^{\varepsilon_1M/4}\bigl(C|\alpha|\bigr)^{K-n}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^\mu$$
$$\leqslant C_5\binom{M}{n}\bigl(2(t+1)^2H\bigr)^{n(1+\log N)}C_2^{(1+\varepsilon_1)M}\bigl(C|\alpha|\bigr)^{K-n}, \quad n<\frac{K-M}{t+1},$$

и

$$\varphi_{M+tn}\psi'_n P^{[n]}_{\bar{s}^*}(z) = -\sum_{\mu=0}^{M+tn-1}\sum_{\nu=0}^{\mu}\psi'_n P^{[n]}_{\bar{\kappa}^*,\nu}\cdot\varphi_{M+tn} f_{l^*,\mu-\nu} z^{\mu} \in \mathbb{Z}[z].$$

Осталось положить $M_2(N,\varepsilon_1) = \max\{M'_2(N,\varepsilon_1), M''_2(N,\varepsilon_1)\}$.

Лемма доказана полностью.

§ 2. Переход к числовым линейным формам

Лемма 2.1. *При $M > M_3(N)$ функциональный определитель*

$$\det\Bigl(P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z)\Bigr)_{n=0,1,\dots,\omega-1;\bar{\kappa}\in\Omega} \tag{2.1}$$

отличен от нуля.

Доказательство этого факта повторяет общую схему доказательства леммы 3.3 [10], однако значительно проще последнего.

Предположим, что определитель (2.1) равен нулю тождественно, т.е. ранг совокупности форм $R^{[0]}(z;\bar{a}), R^{[1]}(z;\bar{a}), R^{[2]}(z;\bar{a}),\dots$ равен $\widetilde{\omega}$, $1 \leqslant \widetilde{\omega} < \omega$. Согласно [8, гл. 3, лемма 6] это означает линейную независимость функциональных форм

$$R^{[n]}(z;\bar{a}) = \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N}\bar{a}^{\bar{\kappa}}P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z) + \sum_{\bar{\kappa}:|\bar{\kappa}|=N-1}\bar{a}^{\bar{\kappa}}P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z)\sum_{j=1}^{m}a_j f_j(z),$$
$$n = 0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1.$$

Таким образом, в матрице

$$\Bigl(P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z)\Bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\bar{\kappa}\in\Omega}$$

(ранга $\widetilde{\omega}$) можно выбрать $\widetilde{\omega}$ линейно независимых столбцов. Если делать такой выбор, последовательно двигаясь (в лексикографическом порядке) “слева направо” по столбцам с номерами $\bar{\kappa}\in\Omega$, то базисные столбцы будут иметь номера из некоторого множества $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, причем с некоторыми рациональными функциями

$$\begin{aligned}&D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z)\in\mathbb{C}(z),\\ &D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z)\equiv 0,\quad \bar{\kappa}'\prec\bar{\kappa},\end{aligned}\qquad \bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega},\quad \bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}, \tag{2.2}$$

выполняются равенства

$$P^{[n]}_{\bar{\kappa}'}(z) = \sum_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}}P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z)D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) = \sum_{\substack{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}\\ \bar{\kappa}\prec\bar{\kappa}'}}P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z)D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z),$$
$$n = 0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1,\qquad \bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}.$$

Таким образом,

$$\Delta = \Delta(z) = \det\Big(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\Big)_{n=0,1,\dots,\widetilde\omega-1;\bar\kappa\in\widetilde\Omega} \not\equiv 0,$$

и согласно лемме 1.4, а) находим, что

$$\deg\Delta < \widetilde\omega M + \frac{\widetilde\omega(\widetilde\omega-1)}{2}t. \tag{2.3}$$

Для произвольного решения $a_1,\dots,a_m$ системы (0.3) набор функций

$$x_{\bar\kappa} = \begin{cases} \bar a^{\bar\kappa}, & \text{если } |\bar\kappa| = N, \\ \bar a^{\bar\kappa}(a_1f_1+\dots+a_mf_m), & \text{если } |\bar\kappa| = N-1, \end{cases}$$

доставляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}x_{\bar\kappa} = -\sum_{l,j=1}^{m}\kappa_jQ_{lj}(z)x_{\bar\kappa-\bar e_j+\bar e_l} + \big(N-|\bar\kappa|\big)\sum_{l=1}^{m}Q_{l0}(z)x_{\bar\kappa+\bar e_l}, \quad \bar\kappa\in\Omega, \tag{2.4}$$

порядка ω. В доказательстве леммы 8 из [8, гл. 3, с. 102–103] рациональные функции $D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}$, $\bar\kappa\in\widetilde\Omega$, $\bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega$, были представлены в виде

$$D_{\bar\kappa,\bar\kappa'} = -\frac{\lambda_{\bar\kappa,\bar\kappa'}}{\lambda}, \quad \lambda\not\equiv 0, \quad \bar\kappa\in\widetilde\Omega, \quad \bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega, \tag{2.5}$$

где λ и $\lambda_{\bar\kappa,\bar\kappa'}$ – миноры порядка $(\omega-\widetilde\omega)$ некоторой фундаментальной матрицы решений системы (2.4). Там же было показано, что сумма степеней числителя каждой рациональной функции (2.5) и их общего знаменателя не превосходит некоторой постоянной C_7, зависящей только от системы линейных дифференциальных уравнений (2.4), которая, в свою очередь, однозначно определяется системой (0.1) и числом N. Но ввиду линейной независимости функций $1, f_1(z),\dots,f_m(z)$ над $\mathbb{C}(z)$ по лемме 3 [8, гл. 3] система (0.1) определена функциями $f_1(z),\dots,f_m(z)$ однозначно. Поэтому $C_7 = C_7(f_1,\dots,f_m;N)$.

Сравнивая коэффициенты при $\bar a^{\bar s}$, $\bar s\in\Theta$, в (1.6), согласно (1.9) и (1.10) получаем

$$\begin{aligned} R_{\bar s}^{[n]}(z) &= P_{\bar s}^{[n]}(z) + \sum_{j=1}^{m}P_{\bar s-\bar e_j}^{[n]}(z)f_j(z) \\ &= \sum_{\bar\kappa\in\Omega}P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f), \quad n=0,1,\dots,\widetilde\omega-1, \quad \bar s\in\Theta, \end{aligned}$$

где функции $x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f)$, $\bar\kappa\in\Omega$, $\bar s\in\Theta$, определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned} x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f) &= \delta_{\bar\kappa,\bar s}, & &\text{если } |\bar\kappa| = N, \\ x_{\bar\kappa,\bar s}(\bar f) &= \sum_{j=1}^{m}\delta_{\bar\kappa+\bar e_j,\bar s}f_j(z), & &\text{если } |\bar\kappa| = N-1, \end{aligned}\right\} \quad \bar s\in\Theta.$$

Здесь

$$\delta_{\bar{s}',\bar{s}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \bar{s}' = \bar{s}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \qquad \bar{s}', \bar{s} \in \Theta.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R_{\bar{s}}^{[n]}(z) &= \sum_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}'}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa}',\bar{s}}(\bar{f}) \\ &= \sum_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \biggl(x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) x_{\bar{\kappa}',\bar{s}}(\bar{f}) \biggr) \\ &= \sum_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) \widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}), \quad n = 0, 1, \dots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \bar{s} \in \Theta, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) = x_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) + \sum_{\bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z) x_{\bar{\kappa}',\bar{s}}(\bar{f}), \quad \bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}, \quad \bar{s} \in \Theta.$$

Согласно [10, предложение 2.1] (и [10, лемма 4.2] в случае $m = 2$) для множества $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ найдутся множества $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ и $\Theta_1 \subset \Theta$, для которых

$$\det\bigl(\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f})\bigr)_{\bar{\kappa}\in\Omega_1;\bar{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0 \tag{2.7}$$

и величина $\widetilde{\theta} = \operatorname{Card}\Omega_1 = \operatorname{Card}\Theta_1$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} \leqslant \frac{\omega - \frac{1}{N+m-1}}{\theta} \leqslant \frac{\omega - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{N+m-1}}{\theta}.$$

Обозначая через $D(z)$ наименьший общий знаменатель рациональных функций (2.2), получаем, что определитель $\chi = \chi\bigl(z, f_1(z), \dots, f_m(z)\bigr)$ матрицы

$$\bigl(D(z)\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f}) \mid \delta_{\bar{\kappa},\bar{r}}\bigr)_{\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega};\bar{s}\in\Theta_1,\bar{r}\in\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}, \tag{2.8}$$

с точностью до знака равный произведению $D^{\widetilde{\theta}}(z)$ и (2.7), есть отличный от нуля многочлен от функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$. В то же время

$$\deg D(z) < C_7, \quad \deg\bigl(D(z) \cdot D_{\bar{\kappa},\bar{\kappa}'}(z)\bigr) < C_7, \quad \bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}, \quad \bar{\kappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega},$$

и функции $D(z)\widetilde{x}_{\bar{\kappa},\bar{s}}(\bar{f})$, $\bar{\kappa} \in \widetilde{\Omega}$, $\bar{s} \in \Theta_1$, являются линейными формами от $1, f_1(z), \dots, f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и оценкой C_7 на степени этих коэффициентов. Поэтому степень χ как многочлена от z не выше $\widetilde{\theta}C_7$ и по лемме 4 [8, гл. 3] порядок нуля $\chi(z)$ как линейной формы от всевозможных мономов $f_1^{\nu_1}(z) \dots f_m^{\nu_m}(z)$ степени не выше $\widetilde{\theta}$ в точке $z = 0$ ограничен сверху некоторой положительной постоянной $C_8 = C_8(f_1, \dots, f_m; \widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}C_7) = C_8(f_1, \dots, f_m; N)$.

Умножим теперь матрицу

$$\Bigl(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\Bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\bar{\kappa}\in\widetilde{\Omega}},$$

определитель которой равен Δ, справа на матрицу (2.8) и согласно соотношениям (2.6) получим матрицу

$$\left(D(z)R_{\bar{s}}^{[n]}(z)\;\middle|\;P_{\bar{r}}^{[n]}(z)\right)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\bar{s}\in\Theta_1,\bar{r}\in\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}.$$

Ее определитель равен $\Delta\,\chi\not\equiv 0$. В первых $\widetilde{\theta}$ столбцах этой матрицы стоят функции, порядок нуля которых в точке $z=0$ не ниже $K-\widetilde{\omega}$ по лемме 1.4,б). Таким образом,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta\chi\geqslant\widetilde{\theta}(K-\widetilde{\omega}).$$

С другой стороны,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta\chi=\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta+\operatorname*{ord}_{z=0}\chi\leqslant\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta+C_8,$$

и, значит,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta>\widetilde{\theta}(K-\widetilde{\omega})-C_8. \tag{2.9}$$

Отсюда согласно (2.3) имеем

$$\begin{aligned}0\leqslant\deg\Delta-\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta&<\widetilde{\omega}M-\widetilde{\theta}K+\frac{\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}-1)}{2}t+\widetilde{\theta}\widetilde{\omega}+C_8\leqslant\widetilde{\omega}M-\widetilde{\theta}\,\frac{\omega-\varepsilon}{\theta}M+C_9\\&\leqslant\widetilde{\theta}\,\frac{\omega-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{N+m-1}}{\theta}M-\widetilde{\theta}\,\frac{\omega-\varepsilon}{\theta}M+C_9\\&=-\frac{\widetilde{\theta}}{\theta}\cdot\frac{\varepsilon}{N+m-1}M+C_9\leqslant-\frac{\varepsilon}{\theta(N+m-1)}M+C_9,\\&\qquad C_9=C_9(f_1,\dots,f_m;N).\end{aligned}\tag{2.10}$$

Поскольку величины ε и $N+m-1$ положительны, для всех натуральных чисел $M>M_3(\varepsilon,N)=M_3(N)$ неравенство (2.10) становится противоречивым. Следовательно, при этих значениях M предположение о том, что определитель (2.1) равен нулю, неверно. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 2.2. *При $M>M_3(N)$ справедливо равенство*

$$\Delta(z)=\det\left(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\right)_{n=0,1,\dots,\omega-1;\bar{\kappa}\in\Omega}=z^{\operatorname{ord}_{z=0}\Delta}\Delta_0(z),$$

где $\Delta_0(z)$ – многочлен, $\Delta_0\not\equiv 0$ и $\deg\Delta_0<\varepsilon M+C_{10}$, где положительная постоянная C_{10} зависит только от N.

Доказательство. Воспользуемся неравенствами (2.3) и (2.9) с $\widetilde{\omega}=\omega$, $\widetilde{\theta}=\theta$:

$$\deg\Delta_0=\deg\Delta-\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta<\omega M+\frac{\omega(\omega-1)}{2}t-\theta(K-\omega)+C_8\leqslant\varepsilon M+C_{10},$$

что и требовалось.

Замечание. В статье [9] отсутствует доказательство утверждения леммы 1.2 о том, что разность степени и порядка нуля функционального определителя есть малая величина (по сравнению со степенью входящих в определитель многочленов), являющегося аналогом доказанной нами леммы 2.2. Поэтому теоремы I и II работы [9] и подобные им теоремы для G-функций нельзя считать доказанными.

Следующие два утверждения (второе является непосредственным следствием первого) реализуют переход от построенных градуированных приближений Паде к приближающим числовым линейным формам. Доказательство первой леммы осуществляется с помощью ставших уже стандартными рассуждений Зигеля, и поэтому опускается (см., например, доказательство леммы 10 [8, гл. 3]).

Лемма 2.3. *При $M > M_3(N)$ ранг числовой матрицы*

$$\Bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(\alpha)\Bigr)_{n=0,1,\dots,\omega+[\varepsilon M]+C_{10};\bar\kappa\in\Omega}$$

равен в точности ω.

Лемма 2.4. *При $M > M_3(N)$ ранг числовой матрицы*

$$\Bigl(P_{\bar s^*}^{[n]}(\alpha) \quad P_{\bar\kappa^*}^{[n]}(\alpha)\Bigr)_{n=0,1,\dots,\omega+[\varepsilon M]+C_{10}},$$

где, как и раньше, $\bar s^* = N\bar e_{l^*}$, $\bar\kappa^* = (N-1)\bar e_{l^*}$, равен двум.

Доказательство основной теоремы. По заданным $\eta > \eta_0$ и $\varepsilon > 0$ выберем число $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\eta, \varepsilon, \alpha) > 0$ таким образом, чтобы для постоянной

$$C_{11} = b^{(t+1)\varepsilon_1}\bigl(C|\alpha|\bigr)^{-\varepsilon\varepsilon_1} C_0^{1+\varepsilon_1}$$

выполнялось неравенство

$$\eta_1 = \frac{\eta+\eta_0}{2} > \frac{(1+t\varepsilon)\log b + \log C_{11}}{\bigl(1-(m+t+1)\varepsilon\bigr)\log b - \log C_{11} - \bigl(2-(m+1)\varepsilon\bigr)\log\bigl(C|a|\bigr)}. \tag{2.11}$$

Положим

$$M_* = M_*(N, \varepsilon_1, \alpha) = \max\biggl\{M_2(N,\varepsilon_1), M_3(N), \frac{\log(C_3C_4C_5)}{\varepsilon_1 \log b}, \frac{(2+\varepsilon_1)(C_{10}+\omega)}{\varepsilon\varepsilon_1}\biggr\}.$$

Тогда при любых натуральных $M > M_*$ справедливы утверждения лемм 1.5, 2.4 и неравенства

$$C_3C_4C_5 \leqslant b^{\varepsilon_1 M}, \quad \varepsilon M + C_{10} + \omega < \Bigl(1 + \frac{\varepsilon_1}{2}\Bigr)(\varepsilon M + C_{10} + \omega) \leqslant (1+\varepsilon_1)\varepsilon M.$$

Кроме того, при всех $M>M_*$ и $n<\varepsilon M+C_{10}+\omega$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\binom{M}{n}&=\frac{(M-n+1)\dots(M-1)M}{n!}<\frac{M^n}{(n/e)^n}\leqslant\Bigl(\frac{e}{\varepsilon}\Bigr)^{\varepsilon M+C_{10}+\omega}\\&\leqslant\exp\bigl\{(1-\log\varepsilon)(1+\varepsilon_1)\varepsilon M\bigr\},\\K-n&\geqslant\Bigl(\frac{\omega-\varepsilon}{\theta}-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon_1\Bigr)M=\Bigl(2-\frac{m-1}{N+m-1}-\frac{\varepsilon}{\theta}-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon_1\Bigr)M\\&\geqslant\Bigl(2-\frac{m-1}{1/\varepsilon-1}-\varepsilon\Bigl(1+\frac{1}{m}\Bigr)-\varepsilon\varepsilon_1\Bigr)M\geqslant\bigl(2-(m+1)\varepsilon-\varepsilon\varepsilon_1\bigr)M.\end{aligned}$$

Поэтому для заданной $C_{11}>C_0$ и всех $M>M_*$ при $n<\varepsilon M+C_{10}+\omega$ согласно лемме 1.5 справедливы оценки

$$\begin{aligned}\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(\alpha)|&\leqslant\bigl(b^{1+t\varepsilon}\bigl(C|\alpha|\bigr)^{\varepsilon\varepsilon_1}C_{11}\bigr)^M\leqslant\bigl(b^{1+t\varepsilon}C_{11}\bigr)^M,\\\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}|R^{[n]}_{\bar s^*}(\alpha)|&\leqslant\bigl(b^{1+t\varepsilon}\bigl(C|\alpha|\bigr)^{\varepsilon\varepsilon_1}C_{11}\bigr)^M\bigl(C|\alpha|\bigr)^{K-n}\\&\leqslant\bigl(b^{1+t\varepsilon}C_{11}\bigl(C|a/b|\bigr)^{2-(m+1)\varepsilon}\bigr)^M.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Возьмем теперь

$$\begin{aligned}q_*=\max\Bigl\{\frac12\exp\Bigl\{\frac{(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}}{\eta_1}M_*\Bigr\},\\\exp\Bigl\{\frac{(\eta_1+1)\log 2+(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}}{\eta-\eta_1}\Bigr\}\Bigr\}.\end{aligned}$$

Тогда, полагая для произвольной числовой линейной формы $r=qf_{l^*}(\alpha)-p$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, $q>q_*$,

$$M=\biggl[\frac{\eta_1\log(2q)}{(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}}\biggr]+1,\tag{2.13}$$

получим, что $M>M_*$. Кроме того, при $q>q_*$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}M\cdot\bigl((1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}\bigr)&\leqslant\eta_1\log(2q)+(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}\\&<\eta\log q-\log 2.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Согласно лемме 2.4 для $M>M_*$ существует $n<\varepsilon M+C_{10}+\omega$ такое, что

$$qP^{[n]}_{\bar s^*}(\alpha)+pP^{[n]}_{\bar\kappa^*}(\alpha)\ne0.$$

Тогда

$$P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(\alpha)r=-\bigl(qP^{[n]}_{\bar s^*}(\alpha)+pP^{[n]}_{\bar\kappa^*}(\alpha)\bigr)+q\bigl(P^{[n]}_{\bar s^*}(\alpha)+P^{[n]}_{\bar\kappa^*}(\alpha)f_{l^*}(\alpha)\bigr)$$

и, поскольку

$$\varphi_{M+tn}\psi'_n b^{M+tn}\bigl(qP^{[n]}_{\bar s^*}(a/b)+pP^{[n]}_{\bar\kappa^*}(a/b)\bigr)$$

является целым числом, отличным от нуля,

$$\varphi_{M+tn}\psi_n' b^{M+tn}|P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)|\cdot|r| \geqslant 1-\varphi_{M+tn}\psi_n' b^{M+tn}|R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)|\cdot q.$$

Согласно оценкам (2.12) и выбору (2.11), (2.13) имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{M+tn}\psi_n' b^{M+tn}|R_{\bar{s}^*}^{[n]}(\alpha)| &\leqslant \exp\Big\{M\cdot\Big(-\big(1-(m+t+1)\varepsilon\big)\log b \\ &\qquad + \log C_{11} + \big(2-(m+1)\varepsilon\big)\log\big(C|a|\big)\Big)\Big\} \\ &\leqslant \exp\Big\{-\frac{\eta_1\log(2q)}{(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}}\cdot\frac{(1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}}{\eta_1}\Big\} = \frac{1}{2}q^{-1},\end{aligned}$$

откуда

$$\varphi_{M+tn}\psi_n' b^{M+tn}|P_{\bar{\kappa}^*}^{[n]}(\alpha)|\cdot|r| \geqslant \frac{1}{2}.$$

С помощью оценок (2.12), выбора (2.13) и неравенства (2.14) получаем

$$|r| \geqslant \frac{1}{2}\exp\big\{-M\cdot\big((1+t\varepsilon)\log b+\log C_{11}\big)\big\} > q^{-\eta}.$$

Последнее неравенство завершает доказательство теоремы.

§ 3. Рациональные приближения обобщенных полилогарифмов

Рассматриваются функции

$$f_l(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z^\nu}{(\nu+\lambda)^l}, \quad l=1,\dots,m, \quad \lambda\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\} \tag{3.1}$$

(обобщенные полилогарифмы).

Лемма 3.1. *Функции* (3.1) *алгебраически независимы над* $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство этого утверждения проводится с помощью так называемого “арифметического” метода (см. [8, гл. 8]). Пусть $\lambda=a/b$, где $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$ – взаимно простые числа. Обозначим через t произвольное натуральное число. По теореме Дирихле в арифметической прогрессии $\{a+b\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ содержится бесконечное множество простых чисел. Поэтому можно выбрать натуральное $\mu>\max\{t,$ $-2a/b\}$ такое, что число $a+b\mu$ является простым. Тогда точные знаменатели чисел

$$\frac{1}{(\mu+\lambda)^l}=\frac{b^\mu}{(a+b\mu)^l}, \quad l=1,\dots,m,$$

содержат простое число $a+b\mu$ в степенях l, $l=1,\dots,m$, соответственно, и в то же время знаменатели чисел

$$\frac{1}{(\nu+\lambda)^l}=\frac{b^\nu}{(a+b\nu)^l}, \quad \nu=0,1,\dots,\mu-1, \quad l=1,\dots,m,$$

не делятся на число $a+b\mu$ в силу его простоты и поскольку $a+b\mu>|a+b\nu|$ для всех $\nu=0,1,\dots,\mu-1$. Полагая в лемме 1 [8, гл. 8] $u=0$, $\varphi_0(z)=z$, $v=m$, $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$, получаем, что функции $z,f_1(z),\dots,f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Для взаимно простых* $a \in \mathbb{Z}$ *и* $b \in \mathbb{N}$ *через* D_n *обозначим наименьшее общее кратное чисел*

$$a + b\mu, \quad \mu = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} \leqslant \rho(b),$$

где функция $\rho(b)$ *определяется равенством* (0.10).

Доказательство этого факта мы заимствуем из работы [11] (см. доказательство теоремы 7.1). Не ограничивая общности, считаем $a > 0$, поскольку утверждение леммы можно доказывать с заменой a на $a + b\nu > 0$ для некоторого фиксированного $\nu \in \mathbb{N}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и разложение D_n на простые множители имеет вид

$$D_n = \prod p^{\tau_p},$$

где, очевидно, с некоторым μ, $1 \leqslant \mu \leqslant n$, выполнено

$$\tau_p \leqslant \frac{\log(a + b\mu)}{\log p} \leqslant \frac{\log(a + bn)}{\log p}.$$

Поэтому

$$D_n \leqslant \prod p^{\log(a+bn)/\log p} \leqslant (a + bn)^{N_n},$$

где N_n есть количество простых p, делящих $a + b\mu$ для некоторого μ, $1 \leqslant \mu \leqslant n$. Следовательно,

$$N_n = \sum_{1\leqslant j\leqslant b} N_{n,j} = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\ (j,b)=1}} N_{n,j} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\ (j,b)>1}} N_{n,j}, \tag{3.2}$$

где $N_{n,j}$ есть количество простых p, удовлетворяющих сравнению $p \equiv j \mod b$ и делящих $a + b\mu$ для некоторого μ, $1 \leqslant \mu \leqslant n$. Пусть простое p удовлетворяет последним двум условиям. Если $(j, b) > 1$, то из сравнения $p \equiv j \mod b$ вытекает, что $(p, b) > 1$, т.е. p является делителем числа b, и равенство (3.2) можно записать в виде

$$N_n = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\ (j,b)=1}} N_{n,j} + O(1),$$

где значение постоянной $O(1)$ не превосходит количества делителей числа b. Если $(j, b) = 1$, то для некоторых натуральных u, v выполнено $p - j = ub$ и $pv = a + b\mu$. Тогда $jv \equiv a \mod b$ и, значит, $v \geqslant i_j$, где i_j – единственное целое решение сравнения $ji_j \equiv a \mod b$ в интервале $1 \leqslant i_j \leqslant b$. Следовательно,

$$p = \frac{a + b\mu}{v} \leqslant \frac{a + bn}{i_j}$$

и

$$N_{n,j} \leqslant \pi\bigl((a+bn)/i_j, b, j\bigr),$$

где $\pi(x,b,j)$ обозначает число простых p, не превосходящих x, таких, что выполнено $p \equiv j \mod b$. По теореме о распределении простых чисел в арифметической прогрессии имеем

$$\pi\bigl((a+bn)/i_j, b, j\bigr) \sim \frac{(a+bn)/i_j}{\varphi(b)\log\bigl((a+bn)/i_j\bigr)} \sim \frac{b}{i_j\varphi(b)} \cdot \frac{n}{\log(a+bn)}$$

при $n \to \infty$. Окончательно получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\(j,b)=1}} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{N_{n,j}\log(a+bn)}{n} \leqslant \frac{b}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant b\\(j,b)=1}} \frac{1}{i_j}.$$

Осталось заметить, что когда j пробегает полную систему вычетов по модулю b, соответствующие i_j также пробегают эту систему вычетов.

Лемма 3.3. *Совокупность обобщенных полилогарифмических функций* (3.1) *принадлежит классу* $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, 1, e^{m\rho(\operatorname{den}\lambda)})$.

Доказательство. Радиус сходимости степенных рядов (3.1) равен 1. Если $\lambda = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ для заданных a, b взята из леммы 3.2, то

$$\frac{D_n^m}{(\nu+\lambda)^l} \in \mathbb{Z}, \quad l = 1, \dots, m, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Осталось воспользоваться оценкой леммы 3.2.

Совокупность функций (3.1) удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-z}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\lambda}{z} & 0 & \dots & 0\\ \frac{1}{z} & -\frac{\lambda}{z} & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \frac{1}{z} & -\frac{\lambda}{z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Поэтому матрица $S = \bigl(S_{jl}(z)\bigr)_{j,l=1,\dots,m}$ системы линейных дифференциальных уравнений (0.3) имеет вид $S = \frac{1}{z}\Lambda$, где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

– числовая матрица.

Лемма 3.4. *Пусть матрица системы линейных дифференциальных уравнений* (0.3) *имеет вид* $S=\frac{1}{z}\Lambda$, *где* Λ *– числовая матрица. Тогда для матриц*

$$S^{[n]}=\Bigl(S^{[n]}_{jl}(z)\Bigr)_{j,l=1,\dots,m},\qquad n\in\mathbb{N},$$

систем линейных дифференциальных уравнений (0.4) *справедливо представление*

$$S^{[n]}=\tfrac{1}{z^n}\Lambda\bigl(\Lambda-E\bigr)\bigl(\Lambda-2E\bigr)\dots\bigl(\Lambda-(n-1)E\bigr),\qquad n\in\mathbb{N},\tag{3.5}$$

где E *– единичная матрица размера* m.

Доказательство. Будем доказывать требуемое утверждение индукцией по $n\in\mathbb{N}$. При $n=1$ его истинность непосредственно вытекает из условия. Пусть представление (3.5) выполнено для некоторого $n\in\mathbb{N}$. Согласно рекуррентным соотношениям (0.6) имеем

$$\begin{aligned}S^{[n+1]}=\frac{d}{dz}S^{[n]}+S^{[n]}\cdot S&=-\frac{n}{z^{n+1}}\Lambda\bigl(\Lambda-E\bigr)\bigl(\Lambda-2E\bigr)\dots\bigl(\Lambda-(n-1)E\bigr)\\&\quad+\frac{1}{z^{n+1}}\Lambda\bigl(\Lambda-E\bigr)\bigl(\Lambda-2E\bigr)\dots\bigl(\Lambda-(n-1)E\bigr)\cdot\Lambda\\&=\frac{1}{z^{n+1}}\Lambda\bigl(\Lambda-E\bigr)\bigl(\Lambda-2E\bigr)\dots\bigl(\Lambda-(n-1)E\bigr)\bigl(\Lambda-nE\bigr),\end{aligned}$$

что доказывает утверждение леммы для $n+1$, а значит, и для всех натуральных n.

Определим целозначный многочлен

$$\Delta_n(\lambda)=\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)}{n!},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Согласно лемме 3.4 выполнено

$$\frac{z^nS^{[n]}}{n!}=\Delta_n(\Lambda),\quad n\in\mathbb{N},\tag{3.6}$$

где матрица Λ определяется равенством (3.4).

Лемма 3.5. *Пусть матрица* Λ *определяется равенством* (3.4). *Тогда*

$$\Delta_n(\Lambda)=\begin{pmatrix}\varkappa_{0,n}(\lambda)&\varkappa_{1,n}(\lambda)&\varkappa_{2,n}(\lambda)&\dots&\varkappa_{m-1,n}(\lambda)\\0&\varkappa_{0,n}(\lambda)&\varkappa_{1,n}(\lambda)&\dots&\varkappa_{m-2,n}(\lambda)\\0&0&\varkappa_{0,n}(\lambda)&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\varkappa_{1,n}(\lambda)\\0&0&0&\dots&\varkappa_{0,n}(\lambda)\end{pmatrix},\quad n\in\mathbb{N},$$

где

$$\varkappa_{j,n}(\lambda)=\frac{(-1)^j}{j!}\Delta_n^{(j)}(\lambda),\quad j=0,1,\dots,m-1,\quad n\in\mathbb{N},$$

а дифференцирование ведется по переменной λ.

Доказательство. Запишем многочлен $\Delta_n(\lambda)$ в виде

$$\Delta_n(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu,n}\lambda^{\nu},\quad n\in\mathbb{N},$$

и воспользуемся этим разложением с заменой λ на Λ:

$$\Delta_n(\Lambda)=\sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu,n}\Lambda^{\nu},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Поскольку матрица (3.4) имеет “почти жорданову” форму, ее степени выглядят достаточно просто, а именно

$$\Lambda^{\nu}=\begin{pmatrix} \tau_{0,\nu}(\lambda) & \tau_{1,\nu}(\lambda) & \tau_{2,\nu}(\lambda) & \dots & \tau_{m-1,\nu}(\lambda)\\ 0 & \tau_{0,\nu}(\lambda) & \tau_{1,\nu}(\lambda) & \dots & \tau_{m-2,\nu}(\lambda)\\ 0 & 0 & \tau_{0,\nu}(\lambda) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \tau_{1,\nu}(\lambda)\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tau_{0,\nu}(\lambda)\end{pmatrix},\qquad \nu\in\mathbb{N},$$

где

$$\tau_{j,\nu}(\lambda)=\begin{cases}(-1)^j\dbinom{\nu}{j}\lambda^{\nu-j}, & \text{если } j\leqslant\nu,\\ 0, & \text{если } j>\nu,\end{cases}\qquad j=0,1,\dots,m-1,\qquad \nu\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, матрица $\Delta_n(\Lambda)$ имеет треугольный вид, указанный в формулировке леммы 3.5, причем

$$\begin{aligned}\varkappa_{j,n}=\sum_{\nu=1}^{n} r_{\nu,n}\tau_{j,\nu}(\lambda)&=\frac{(-1)^j}{j!}\sum_{\nu=\max\{1,j\}}^{n} r_{\nu,n}\frac{\nu!}{(\nu-j)!}\lambda^{\nu-j}\\ &=\frac{(-1)^j}{j!}\Delta_n^{(j)}(\lambda),\qquad j=0,1,\dots,m-1,\quad n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

что и требовалось.

Лемма 3.6. *Для* $\lambda=a/b$, $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}$, $(a,b)=1$, *через* E_n *обозначим наименьший общий знаменатель чисел*

$$\frac{b^{\mu}\Delta_{\mu}^{(j)}(\lambda)}{j!},\quad j=0,1,\dots,m-1,\quad \mu=1,\dots,n,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log E_n}{n}\leqslant\chi(b)+m-1,$$

где функция $\chi(b)$ *определяется равенством* (0.10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в теореме работы [12] $L = H = n$, $Q = b$, $x = -a$, $M = m - 1$, $\Lambda = 1$, получаем, что E_n делит число

$$\prod_{p|b} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \cdot D_n^{m-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$. Учитывая, что

$$\prod_{p|b} p^{\left[\frac{n}{p-1}\right]} \leqslant e^{n\chi(b)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} \leqslant \rho(1) = 1$$

согласно лемме 3.2, получаем требуемое.

ЛЕММА 3.7. *Система однородных линейных дифференциальных уравнений, сопряженная к однородной части системы* (3.3), *принадлежит классу* $\mathbf{G}(\mathbb{Q}, e^{\chi(\mathrm{den}\,\lambda)+m-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого утверждения непосредственно следует из равенства (3.6), результатов лемм 3.5, 3.6 и того факта, что $T_*(z) = \mathrm{den}\,\lambda \cdot z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2 получается теперь подстановкой результатов лемм 3.3, 3.7, неравенств (0.8) и $t = 1$ в основную теорему для функции $f_m(z)$.

Список литературы

1. *Siegel C. L.* Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Wiss. Phys.–Math. Kl. 1929–1930. №1. P. 1–70.
2. *Нурмагомедов М. С.* Об арифметических свойствах значений G-функций // Матем. сб. 1971. Т. 85 (127). №3 (7). С. 339–365.
3. *Нурмагомедов М. С., Чирский В. Г.* Об арифметических свойствах значений некоторых функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механика. 1973. №1. Р. 19–26; №2. Р. 38–45.
4. *Галочкин А. И.* Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса // Матем. сб. 1974. Т. 95 (137). №3 (11). С. 396–417.
5. *Галочкин А. И.* Оценки снизу линейных форм от значений некоторых G-функций // Матем. заметки. 1975. Т. 18. №4. С. 541–552.
6. *Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V.* Applications of Padé approximations to Diophantine inequalities in values of G-functions // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1135. P. 9–51.
7. *André Y.* G-functions and Geometry. Aspects of Mathematics. V. E13. Braunshweig: Vieweg, 1989.
8. *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
9. *Chudnovsky G. V.* On some applications of diophantine approximations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81. March. P. 1926–1930.
10. *Зудилин В. В.* О рациональных приближениях значений одного класса целых функций // Матем. сб. 1995. Т. 186. №4. С. 89–124.
11. *Hata M.* On the linear independence of the values of polylogarithmic functions // J. de Mathématiques pures et appliquées. 1990. V. 69. №2. P. 133–173.
12. *Матвеев Е. М.* Об арифметических свойствах значений обобщенных биномиальных многочленов // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №4. С. 76–81.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило в редакцию
7.VII.1995