УДК 512.75

1-мотивы и соотношения ортогональности на группе Морделла–Вейля

Д. Бертран

Предлагается общая гипотеза о высотах на абелевых многообразиях, из которой следует, что две рациональные точки бесконечного порядка на эллиптической кривой над $\mathbb{Q}$ не ортогональны относительно спаривания Нерона–Тейта. В силу результата Рибета и Жакино в теории Куммера, гипотеза сводится к разложению части фильтрации по весу некоторых 1-мотивов. Обсуждается также исследование гипотезы с помощью теории трансцендентных чисел.

Библиография: 14 названий.

§ 1. Первая гипотеза

Пусть E — эллиптическая кривая над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, а $\bar{\mathbb{Q}}$ — алгебраическое замыкание $\mathbb{Q}$. Высота Нерона–Тейта — $h_{(0)}$ — на группе $E(\bar{\mathbb{Q}})$ алгебраических точек E снабжает векторное пространство $E(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$ евклидовой структурой с помощью билинейного расширения скалярного произведения

$$\langle x, y \rangle_E = \big(h_{(0)}(x+y) - h_{(0)}(x) - h_{(0)}(y)\big)/2.$$

В [13, p. 43] Серр поставил вопрос, существует ли пара (x, y) рациональных точек на E бесконечного порядка (другими словами с ненулевым образом в $E(\bar{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{R}$), которые являются ортогональными относительно этого скалярного произведения. В этом вопросе нетривиальную роль играет поле $\mathbb{Q}$. Чтобы лучше это понять, рассмотрим нашу задачу для алгебраических точек из E. Могут появиться, как минимум, два типа ортогональных пар.

1) Предположим, что E над $\bar{\mathbb{Q}}$ имеет комплексное умножение α. Тогда

$$\langle x, \alpha y \rangle = \langle \overline{\alpha} x, y \rangle, \tag{1}$$

так что для любой алгебраической точки x и любого эндоморфизма α на E с нулевым следом, x и $y = \alpha x$ ортогональны.

2) Пусть σ элемент из $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Тогда

$$\langle x, \sigma y\rangle = \langle \sigma^{-1}x, y\rangle, \tag{2}$$

так что, например, $x = z + \sigma z$ и $y = z - \sigma z$ ортогональны для любой алгебраической точки z; также: $\mathbb{Q}$-рациональная точка x ортогональна ко всем алгебраическим точкам y, для которых сумма сопряженных является точкой кручения в $E(\mathbb{Q})$.

Из приводимой ниже гипотезы 1 следует, что тождества (1) и (2) "порождают" все соотношения ортогональности, связывающие две алгебраические точки на E и, в частности, вопрос Серра имеет отрицательный ответ.

Перед формулировкой результатов введем некоторые *обозначения*, которые будут использоваться на протяжении всей статьи. Для любого абелева многообразия A над числовым полем $\Bbbk$ и любой $\Bbbk$-рациональной точки x на A, обозначим через $h_L(x)$ высоту Нерона–Тейта точки x относительно пучка L на A, а через $A[x]$ — связную компоненту единицы алгебраической подгруппы в A, порожденной x; таким образом $A[x]$ является абелевым подмногообразием A, определенным на $\Bbbk$. Обозначим через P пучок Пуанкаре на произведении A на двойственное абелево многообразие A^v и через $\langle\ ,\ \rangle$ — каноническое спаривание $A(\Bbbk) \times A^v(\Bbbk)$ в группу $\mathbb{R}$, которое $\Bbbk$-рациональной точке (x, η) из $A \times A^v$ сопоставляет действительное число

$$\langle x, \eta\rangle = h_P\big((x, \eta)\big)/2.$$

Пусть на A дан обильный и симметричный пучок λ (другими словами, такой, что $[-1]^*\lambda = \lambda$ в группе Пикара $\mathrm{Pic}(A)$ многообразия A), и пусть $\langle\ ,\ \rangle_\lambda$ — скалярное произведение, порожденное квадратичной формой h_λ. Для любой пары (x, y) элементов из $A(\Bbbk)$ имеем:

$$\langle x, y\rangle_\lambda = -\langle x, \varphi_\lambda(y)\rangle,$$

где φ_λ обозначает каноническую изогению из A в A^v, сопоставляемую λ (см. [8, § 6]).

Наконец, будем говорить, что $A[x]$ — абелево подмногообразие, *порожденное x в A*, и что абелево подмногообразие B в $A \times A^v$ *изотропно*, если ограничение $P|_B$ пучка Пуанкаре на подмногообразие B алгебраически эквивалентно нулю. Поскольку P — симметричный пучок, это сводится к требованию, чтобы $P|_B$ было тривиально или порядка 2 в $\mathrm{Pic}(B)$.

В этих условиях мы предполагаем, что верна

Гипотеза 1. *Пусть A — абелево многообразие, определенное над $\mathbb{Q}$ и (x, η) — $\mathbb{Q}$-рациональная точка на $A \times A^v$. Следующие условия эквивалентны*:

1) $\langle x, \eta\rangle = 0$;

2) *абелево подмногообразие, порожденное точкой* (x, η) *в* $A \times A^v$, *изотропно.*

В терминах обильного пучка λ, гипотеза утверждает, что для пары (x, y) точек на $A(\mathbb{Q})$

$$h_\lambda(x+y) = h_\lambda(x) + h_\lambda(y) \iff {m_{(x,y)}}^*(\lambda) \equiv {p_{(x,y)}}^*(\lambda) + {q_{(x,y)}}^*(\lambda),$$

где $m_{(x,y)}, p_{(x,y)}, q_{(x,y)}$ обозначают ограничения на $(A \times A)[(x, y)]$ гомоморфизмов суммы и проекций на первый и второй множитель из $A \times A$ в A.

Функториальные свойства высоты Нерона–Тейта делают из импликации $\Longleftarrow$ тавтологию. Именно, в условии гипотезы 1, если $j = j(x, \eta)$ обозначает каноническое вложение $(A \times A^v)[(x, \eta)]$ в $A \times A^v$, то

$$2\langle x, \eta\rangle = h_P\big((x, \eta)\big) = h_{j^*P}\big(j^{-1}(x, \eta)\big) = 0 \\ \Longleftarrow\ j^*P = P|_{(A\times A^v)[(x,\eta)]} \equiv 0.$$

Цель настоящей статьи выразить предполагаемую импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2) в терминах “хороших относительных редукций” некоторых 1-мотивов. Это будет объектом рассмотрения § 3, а § 2 посвящен этим результатам при условии $j^*P \equiv 0$. Наконец, в приложении рассматриваются другие возможные подходы к гипотезе 1.

В заключении этого введения вернемся к первоначальной эллиптической кривой $E/\mathbb{Q}$. Собственное абелево подмногообразие E' в $E \times E$ — это образ изогении $(\alpha, \beta)\colon E \to E \times E$, где α и β — два эндоморфизма E. Если этот образ определен над $\mathbb{Q}$, то можно выбрать в качестве α и β целые рациональные (и взаимно простые) числа a, b. Изотривиальность пучка $[a + b]^*(0) - [a]^*(0) - [b]^*(0) = 2ab(0)$ ограничения на E' пучка Пуанкаре на $E \times E$, эквивалентна тогда обращению в нуль a или b. Для двух ортогональных точек x и y на $E(\mathbb{Q})$ гипотеза 1 утверждает, следовательно, что $E' = (E \times E)[(x, y)]$ содержится в одном из сомножителей $E \times 0$, $0 \times E$ многообразия $E \times E$, что возвращает нас к тому, что x или y — точка кручения.

Более общо, предположим, что точки x, y, возможные комплексные умножения кривой E' и сама кривая E определены над числовым полем $\mathbb{K}$, и пусть $A/\mathbb{Q}$ — абелево многообразие, получаемое из $E\mathbb{K}$ с помощью ограничения области скаляров от $\mathbb{K}$ до $\mathbb{Q}$. Таким образом, имеются два изоморфизма $\rho = \rho, \rho'$, из $E(\mathbb{K})$ в $A(\mathbb{Q})$, $A^v(\mathbb{Q})$, и из (2) получаем соотношение

$$\langle x, y\rangle_E = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]^{-1}\langle \rho(x), \rho'(y)\rangle.$$

Абелево многообразие $A[\rho(x)]$ описывает множество отношений зависимости на $\mathrm{End}(E/\mathbb{K})$, связывающих точки, сопряженные к x. Множество отношений зависимости, связывающих точки, сопряженные к x и y, описывается абелевым подмногообразием $(A \times A^v)[(\rho(x), \rho'(y))]$ в

$A[\rho(x)] \times A[\rho'(y)]$. Согласно гипотезе и формуле, описанной выше, это есть единственное условие обращения в нуль скалярного произведения $\langle x, y\rangle$. Именно в этом смысле гипотеза 1 сводит все соотношения ортогональности на $E(\bar{\mathbb{Q}})$ к тождествам (1) и (2).

§ 2. Изотропные абелевы подмногообразия

В этом параграфе будет более конкретно представлены выводы из гипотезы 1. Вот идея, которая движет этими вычислениями: в евклидовом пространстве V два вектора ортогональны тогда и только тогда, когда один из них есть образ другого относительно антисимметричного эндоморфизма пространства V. Когда x порождает A, это в точности выражается условием $j_{(x,\eta)}{}^*P = 0$. Рассмотрение общего случая требует введения некоторых соглашений.

Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики 0 и A, B — абелевы многообразия над $\Bbbk$ с двойственными A^v, B^v. Договоримся отождествлять $(A \times B)^v$ и $A^v \times B^v$, а также A со своим дважды двойственным $(A^v)^v$. При таких соглашениях двойственным многообразием к $A \times A^v$ будет $A^v \times A$, и пучок Пуанкаре P на $A \times A^v$ отождествляется с s^*P^v — обратным образом пучка Пуанкаре P^v на $A^v \times A$ при гомоморфизме "обращения сомножителей" $s = s(A, A^v)\colon A \times A^v \to A^v \times A$. Если f — гомоморфизм из A в B, то обозначим через $f^v\colon B^v \to A^v$ двойственный (транспонированный) гомоморфизм; таким образом, когда $A^v = B$, транспозиция является инволюцией в $\mathrm{Hom}(A, B)$ и можно говорить о гомоморфизмах f, симметричных (это случай $s(A, A^v)$ и изогений типа φ_λ) или антисимметричных. Теперь можно сформулировать

Предложение 1. *Пусть $\Bbbk$ — поле характеристики 0, A — абелево многообразие, определенное над $\Bbbk$, и B — абелево подмногообразие в $A \times A^v$. Следующие условия эквивалентны:*

2) *B — изотропное подмногообразие в $A \times A^v$;*
3) *существуют такой антисимметричный гомоморфизм f из $A \times A^v$ в двойственное многообразие $A^v \times A$ и такое целое ненулевое число N, что $N(\eta, x) = f\big((x, \eta)\big)$ для всех элементов (x, η) из B.*

Если B проектируется на A сюрьективно, то они эквивалентны еще и условию

3′) *существуют такой антисимметричный гомоморфизм g из A в A^v и такое целое ненулевое число N, что $N\eta = g(x)$ для любых (x, η) из B.*

Нам будет удобна следующая переформулировка условия изотропности. Для любого абелева подмногообразия B в $A \times A^v$ пусть j — каноническая инъекция B в $A \times A^v$ и $B^\perp$ — обратный образ относительно изоморфизма $s(A, A^v)$ связной компоненты единицы ядра сюрьекции

$j^v\colon A^v \times A \to B^v$. Согласно [8, §20], $s(A, A^v)$ отождествляется с гомоморфизмом $\varphi_P\colon A \times A^v \to A^v \times A$, связанным с пучком P. При этом

$$B \text{ изотропно } \iff j^*P \equiv 0 \iff \varphi_{j^*P} = j^v\varphi_P j = 0 \iff B^\perp \supset B.$$

В частности, для изотропных B размерность $\dim B$ многообразия B мажорируется его коразмерностью $\dim B^\perp = \dim(A\times A^v) - \dim B^v$ и, следовательно, также $\dim A$. (Максимальные изотропные подмногообразия описаны ниже в лемме 1.)

Доказательство 2) $\iff$ 3$'$). Предположим, что ограничение π на B проекции многообразия $A \times A^v$ на первый множитель сюрьективно. Если B изотропно, $\dim B \leqslant \dim A$, то π является изогенией. Тогда существуют такое целое $N = \deg(\pi)$ и такой гомоморфизм $g\colon A \to A^v$, что B является образом гомоморфизма $([N]_A, g)$ из A в $A \times A^v$, другими словами, компонентой единицы подгруппы

$$\{\, (x,\eta) \in A \times A^v, N\eta = g(x) \,\}.$$

Достаточно, таким образом, доказать, что для любого гомоморфизма $g\colon A \to A^v$:

$$([N]_A, g)^*P \equiv 0 \iff g^v = -g.$$

Это ясно, так как гомоморфизм $([N]_A, g)^v\colon A^v \times A \to A^v$ совпадает с $m([N]_{A^v} \times g^v)$, где m обозначает групповой закон на A^v. Следовательно, гомоморфизм из A в A^v:

$$\begin{aligned}\varphi_{([N],g)^*P} &= ([N],g)^v \circ \varphi_P \circ ([N],g)\\ &= m \circ ([N]_{A^v} \times g^v) \circ s(A,A^v) \circ ([N]_A, g)\\ &= N(g+g^v)\end{aligned}$$

является нулевым тогда и только тогда, когда $g = -g^v$.

Доказательство 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть B — абелево подмногообразие в $\mathbb{A} = A \times A^v$, удовлетворяющее условию 3). После предыдущих вычислений, примененных к антисимметричному гомоморфизму f из $\mathbb{A}$ в двойственное к нему многообразие $\mathbb{A}^v = A^v \times A$, обратный образ на $\mathbb{A}$ пучка Пуанкаре $\mathbb{P}$ на $\mathbb{A} \times \mathbb{A}^v$ относительно отображения $([N]_{\mathbb{A}}, f)$ является изотривиальным. Поскольку согласно 3) ограничение на B гомоморфизмов f и Ns совпадают, ограничение на B гомоморфизма $(1,s)^*\mathbb{P}$ также изотривиально. Но $\mathbb{P}$ изоморфно сумме его ограничения P на множитель $A\times 0\times A^v\times 0$ и его ограничения P^v на множитель $0\times A^v\times 0\times A$; более точно, обозначая τ инволюцию "перестановки второго и третьего множителей" в $\mathbb{A}\times\mathbb{A}^v$:

$$\tau\big([(x,\eta),(\eta',x')]\big) = [(x,\eta'),(\eta,x')],$$

и обозначая через p, q проекции $\mathbb{A} \times A^v$ на $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}^v$, имеем:

$$p^*P + q^*P = \tau^*\mathbb{P}.$$

В частности, $(1,s)^*\mathbb{P} = [\tau\circ(1,s)]^*\mathbb{P} = P + s^*P^v = 2P$, и $P|_B$ действительно изотривиально.

Доказательство 2) $\Longrightarrow$ 3). Эту импликацию можно вывести в общем случае с помощью построения для любого изотропного подмногообразия B в $\mathbb{A} = A \times A^v$ максимального изотропного подмногообразия $\mathbb{B}$ в $\mathbb{A} \times \mathbb{A}^v$, которое сюрьективно проектируется на $\mathbb{A} \times 0$ и содержит образ B относительно гомоморфизма $(1, s)$. Утверждение $3'$) предположения, примененное к $\mathbb{B}$, дает тогда утверждение 3). Прямое доказательство, которое мы даем ниже, близко к обычному доказательству теоремы Витта и, возможно, более понятно. Оно основывается на следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть B — изотропное абелево подмногообразие в $A \times A^v$. Существуют такое изотропное абелево подмногообразие B', изогения v из B^v в B' и такое целое N', что если j, j' обозначают канонические вложения многообразий B, B' в $A \times A^v$, m — групповой закон на $A \times A^v$ и Q — пучок Пуанкаре на $B \times B^v$, то гомоморфизм*

$$S = m \circ (j \times j') \circ (1 \times v) \colon B \times B^v \to A \times A^v$$

имеет конечное ядро и удовлетворяет равенству $S^*P = N'Q$. Если, кроме того, B — изотропное максимальное подмногообразие, то B' обладает тем же свойством, S — изогения и B изогенно A.

Покажем, как импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) следует из этой леммы. Пусть B — изотропное подмногообразие в $A \times A^v$. Без ограничения общности, его можно считать максимальным. Пусть g — изогения из $B \times B^v$ в двойственное $B^v \times B$, задаваемое матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда g антисимметрично и $B \times 0$ отождествляется, с точностью до конечного индекса, с множеством таких элементов (y, ζ) из $B \times B^v$, что $2\zeta = 0$, иначе говоря, таких, что $S(B, B^v)(y, \zeta) = (\zeta, y) = g(y, \zeta)$. Образ $j(B)$ многообразия $B \times 0$ при гомоморфизме S отождествляется тогда, с точностью до конечного индекса, с множеством таких элементов (x, η) из $A \times A^v$, что $s(B, B^v) \circ S^{-1}(x, \eta) = g \circ S^{-1}(x, \eta)$, или таких, что $Ns(A, A^v)\big((x, \eta)\big) = f\big((x, \eta)\big)$, где

$$f = Ns(A, A^v) \circ S \circ s(B, B^v)^{-1} \circ g \circ S^{-1},$$

и ненулевое целое N выбрано достаточно большим, чтобы это выражение было гомоморфизмом. Осталось проверить, что f антисимметрично. Условие $S^*P = N'Q$ можно переписать следующим образом:

$$N's(B, B^v) = S^v \circ s(A, A^v) \circ S,$$

поскольку $\varphi_Q = s(B, B^v)$ и $\varphi_{S^*P} = S^v \varphi_P S$ (иначе говоря, S является "ортогональным подобием"), так что

$$f^v = -N(S^v)^{-1} g s(b, B^v)^{-1} S^v s(A, A^v) = -f.$$

Доказательство леммы 1. Пусть λ — пучок на A, симметричный и обильный, $\varphi = \varphi_\lambda$ — изогения из A в A^v, связанная с λ, и $\psi\colon A^v \to A$ — отображение, почти обратное к φ: $\varphi \circ \psi$ есть умножение на целое ненулевое N, обильный и симметричный пучок $\mu = \psi^*\lambda$ на A^v удовлетворяет $\varphi_\mu = N\psi$. Пусть B' — образ B относительно изогении $(\psi \times \varphi) \circ s(A, A^v)$ многообразия $A \times A^v$. Поскольку φ симметричен, пучок $[(\psi \times \varphi) \circ s]^*P = s^*(\varphi^v \circ \psi \times [1]_A)P^v$ совпадает с $Ns^*P^v = NP$, так что B', как и B, будет изотропным подмногообразием в $A \times A^v$.

Покажем теперь, что пересечение B' с многообразием $B^\perp$, "ортогональным" к B, конечно. Если обозначить через j каноническое вложение B в $A \times A^v$, то $s(B^\perp) = \operatorname{Ker}(j^v)^0$ и $B' = (\varphi \times \psi) \circ s \circ j(B)$. Речь идет о том, чтобы увидеть, что

$$Nj^v \circ s \circ (\varphi \times \psi) \circ s \circ j = j^v \circ s^v \circ (\varphi_\lambda \times \varphi_\mu) \circ s \circ j = \varphi_{j^*(s^*([\lambda,\mu]))}\colon B \to B^v$$

является изогенией ($[\lambda, \mu]$ здесь обозначает сумму обратных образов при проекциях на два множителя произведения $A \times A^v$ пучков λ, μ). Поскольку пучки λ и μ обильны, это же выполнено и для $[\lambda, \mu]$ и $s^*[\lambda, \mu]$, также как и для ограничения $j^*s^*[\lambda, \mu]$ на B. Гомоморфизм из B в B^*, ассоциированный с этим пучком, является, таким образом, изогенией.

Рассмотрим при этих условиях гомоморфизм $T = m \circ (j \times j')$ из $B \times B'$ в $A \times A^v$. Изотропное многообразие B содержится в $B^\perp$, поэтому ядро $B \cap B'$ гомоморфизма T конечно. Вместе с тем, ограничение на $0 \times B'$ пучка $\wp = 2T^*P$ является тривиальным, поскольку таковым является $2P|_{B'}$. Аналогично для $B \times 0$, так что для всех b' из B' ограничение $\wp$ на $B \times b'$ алгебраически эквивалентно нулю. Свойство универсальности [12, § 13] пучка Пуанкаре Q на $B \times B^v$ влечет существование такого канонического гомоморфизма $(1 \times \gamma)\colon B \times B' \to B \times B^v$, что $(1 \times \gamma)^*Q = \wp$. Более того, связная компонента единицы подгруппы B', образованной такими элементами b', что

$$\wp|_{B \times b'} = 0 \iff \wp|_{B \times b'} - \wp|_{B \times 0} = \varphi_\wp\big((0, b')\big)|_B = j^v \circ \varphi_{2P} \circ j'(b') = 0,$$

содержится в $B^\perp$ и вся подгруппа является конечной. Таким образом, γ является изогенией, для которой изогения v из B^v в B' в композиции $\gamma \circ v$ дает умножение на целое ненулевое $2N'$. Итак,

$$2(1 \times v)^*T^*P = (1 \times v)^*(1 \times \gamma)^*Q = (1 \times [2N'])^*Q = 2N'Q$$

и $S = T \circ (1 \times v) = m \circ (j \times j') \circ (1 \times v)$ удовлетворяет условию.

Предположим, наконец, что B — изотропное максимальное подмногообразие. Поскольку мы можем перейти от B' к B с помощью изогении $(\psi \times \varphi)$ того же типа, B' также является изотропным максимальным, и утверждение, которое требуется доказать, эквивалентно равенству размерностей B' и A. В противном случае имеем: $\dim A < \operatorname{codim}(B')$ и существует собственное абелево подмногообразие X в $(B')^{\perp}$, содержащееся в изотропном подмногообразии $A\times 0$ в $A\times A^v$. Но тогда $B'+X$ является абелевым изотропным подмногообразием в $A \times A^v$, что противоречит максимальности B'. (Можно, впрочем, непосредственно доказать, что B является изотропным максимальным подмногообразием тогда и только тогда, когда $B = B^{\perp}$, и что B тогда изогенно A.)

В заключение запишем предложение 1 на языке, используемом в гипотезе 1.

Следствие. *Пусть A — абелево многообразие, определенное над полем $\Bbbk$ характеристики нуль, и (x,η) — точка в $(A\times A^v)(\Bbbk)$. Следующие условия эквивалентны*:

2) *абелево подмногообразие $(A\times A^v)[(x,\eta)]$ в $A\times A^v$ изотропно*;
3) *существуют такой антисимметричный гомоморфизм f из $A\times A^v$ в двойственное $A^v\times A$ и такое целое $N\neq 0$, что $N(\eta,x) = f\big((x,\eta)\big)$.*

Если, кроме того, x порождает абелево многообразие A, то эти условия эквивалентны также

3′) *существуют такой антисимметричный гомоморфизм g из A в A^v и такое целое $N\neq 0$, что $N\eta = g(x)$.*

Замечание 1. Я не знаю, является ли сделанное предположение относительно характеристики поля $\Bbbk$ необходимым или нет (оно используется только при проверке некоторых тождеств). Вместе с тем, условие 3′) влечет 3) без предположения относительно x. В самом деле, если g — антисимметричный гомоморфизм из A в A^v, то матрица

$$\begin{pmatrix} 2g & -N \\ N & 0 \end{pmatrix}$$

представляет антисимметричный гомоморфизм f из $A\times A^v$ в $A^v\times A$, который удовлетворяет $N(\eta,x) = f\big((x,\eta)\big)$, когда $N\eta = g(x)$. Кроме того, из 3), вообще говоря, не следует, что η и x связаны. Таким образом, в обозначениях примера 2 §1, пусть $\mathbb{K}$ — вещественное квадратичное поле, x — точка на $E(\mathbb{Q})$ и y — точка на $E(\mathbb{K})$ бесконечного порядка с нулевым следом. Отождествляя $A = \operatorname{Res}_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}} E$ с $E\times E$ над $\bar{\mathbb{Q}}$, видим, что $\rho'(y) = (y,-y)$ не выражается как функция от $\rho(x) = (x,x)$, хотя точка $(\rho(x),\rho'(y))$ из $A\times A^v$ удовлетворяет следующему антисимметричному соотношению:

$$\begin{pmatrix} y \\ -y \\ x \\ x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \\ -y \end{pmatrix}.$$

§ 3. Частичное расщепление 1-мотивов

Пусть $\mathbb{k}$ — поле характеристики нуль. 1-мотивы $M/\mathbb{k} = [U\colon Y \to G]$, которые мы тут рассматриваем, состоят в задании абелева многообразия $A/\mathbb{k}$, его двойственного A^v, алгебраической группы $G/\mathbb{k}$, расширения A с помощью $\mathbb{G}_m/\mathbb{k}$ и гомоморфизма U свободной группы Y ранга 1 в $G(\mathbb{k})$. Обозначим через u композицию U и канонической проекции π группы G на A. После выбора изоморфизма группы Y с $\mathbb{Z}$ и с группой характеров тора $\mathbb{G}_m$ задание M эквивалентно заданию гомоморфизма u' из Y в $A^v(\mathbb{k})$ (определяемого соотношением $u'(1) = \eta$, где η — точка из A^v, соответствующая классу изоморфизма расширения G) и точки $z = U(1)$ из $G(\mathbb{k})$, проектирующейся на точку $x = u(1)$ в $A(\mathbb{k})$. Если снова обозначить через P каноническое бирасширение, связанное с пучком Пуанкаре на $A \times A^v$ с жесткостью над нулевой точкой и избавленное от нулевого сечения, то задание M эквивалентно, для фиксированных x и η, заданию тривиализации Ψ прообраза P относительно отображения $(u \times u')\colon Y \times Y \to A \times A^v$ (см. [5, p. 68]).

Для любых (x, η) из $A \times A^v(\mathbb{k})$, т.е. для любого гомоморфизма (u, u') из Y в $A \times A^v(\mathbb{k})$ обозначим через $g(x, \eta)$ задание точки x на A и расширения G_η абелева многообразия A тором $\mathbb{G}_m$, через P^v — бирасширение Пуанкаре на $A^v \times A$, определяемое P, через $g^v(x, \eta)$ — задание (аналогичное $g(x, \eta)$) точки η на A^v и расширения G'_x многообразия A^v с помощью $\mathbb{G}_m$, определяемого x при помощи бидвойственности. Назовем *поднятием* $g(x, \eta)$ любой 1-мотив $M/\mathbb{k}$ такой, как и выше, т.е. некоторую тривиализацию $(u \times u')^* P$. Таким образом, любому поднятию M данных $g(x, \eta)$ соответствует каноническое поднятие данных $g^v(\eta, x)$: двойственный по Картье мотив M^v 1-мотива M. Если M определено тривиализацией Ψ, то тривиализация Ψ^v пучка $(u' \times u)^* P^v$, соответствующая M^v, есть композиция Ψ и единственного изоморфизма торсеров с жесткостью P и P^v, поднимающего морфизм $s(A, A^v)\colon A \times A^v \to A^v \times A$.

Мы опишем в этой части условия 1) и 2) гипотезы 1 с помощью свойств некоторых поднятий данных $g(x, \eta)$. Буква $\mathbb{k}$ отныне обозначает числовое поле, и данные $A/\mathbb{k}$, $x \in A(\mathbb{k})$, $\eta \in A^v(\mathbb{k})$ (или эквивалентно: A, $u\colon Y \to A(\mathbb{k})$, $u'\colon Y \to A^v(\mathbb{k})$) предполагаются фиксированными.

§ 3a. Хорошая относительная редукция

Пусть w — точка поля $\mathbb{k}$ (конечная или бесконечная), $\mathbb{k}_w$ — пополнение $\mathbb{k}$ по w и $l_w\colon \mathbb{k}_w^* \to \mathbb{R}$ — нормирование, ассоциированное с w. Согласно [14] и [7] бирасширение Пуанкаре $P(\mathbb{k}_w)$ над $A \times A^v(\mathbb{k}_w)$ снабжено каноническим бигомоморфизмом λ_w со значениями в $\mathbb{R}$, ограничение которого на слой пучка $P(\mathbb{k}_w)$ над точкой 0 (отождествленный с $\mathbb{G}_m(\mathbb{k}_w)$) совпадает с l_w. Если G — $\mathbb{k}$-расширение A с помощью $\mathbb{G}_m$ и η — соответствующая точка из $A^v(\mathbb{k})$, то ограничение P на $A \times \eta$ имеет естественную структуру расширения G_η многообразия A с помощью $\mathbb{G}_m$, изоморфного G, и ограничение λ_w на $P_{A\times\eta}$ отождествляется с морфизмом групп Ли $\lambda_{\eta,w} = \lambda_{G,w}\colon G(\Bbbk_w) \to \Bbbk_w$, ядро которой является компактной максимальной подгруппой G^w в $G(\Bbbk_w)$.

Определение 1. Говорят, что 1-мотив $M/\Bbbk = [u\colon Y \to G]$ имеет *хорошую относительную редукцию в* w, если $U(1) = z$ принадлежит максимальной компактной подгруппе G^w. Говорят, что $M/\Bbbk$ имеет *всюду хорошую относительную редукцию*, если он имеет хорошую относительную редукцию для любого (*конечного или бесконечного*) нормирования $\Bbbk$.

Описанное локальное свойство требует, чтобы тривиализация Ψ пучка $(u\times u')^*P$, соответствующая M, удовлетворяла равенству $\lambda_w\circ\Psi = 0$. Мы опираемся на [9, §4, iv)] для другой формулировки этого условия, когда w конечно и A имеет хорошую относительную редукцию в w. Отметим, что эти условия инвариантны относительно изогений и двойственности и что для данного $g(x,\eta)$ существует, в силу классической теоремы Кронекера, самое большее один класс изогений 1-мотивов над $g(x,\eta)$, имеющих всюду хорошую относительную редукцию.

Предложение 2. *Пусть* $\Bbbk$ *— это поле* $\mathbb{Q}$ *или мнимое квадратичное поле,* A *— абелево многообразие, определенное над* $\Bbbk$, (x,η) *—* $\Bbbk$*-рациональная точка в* $A\times A^v$. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $\langle x,\eta\rangle = 0$;
5) *существуют такое целое* $N\neq 0$ *и такой* 1*-мотив* $M/\Bbbk$, *имеющий всюду хорошую относительную редукцию, что* M *поднимает* $g(Nx,\eta)$.

Доказательство. Нормализуем множество Ω нормирований поля $\Bbbk$ так, чтобы удовлетворялась формула произведения $\sum_{w\in\Omega} l_w(t) = 0$ для любых t из $\Bbbk^*$. Пусть $G = G_\eta$ — расширение A с помощью $\mathbb{G}_m$, параметризованное η и z — такая точка из $G(\Bbbk)$, что $\pi(z) = x$. Для любого элемента t из $\mathbb{G}_m(\Bbbk)$ конечная сумма $\sum_{w\in\Omega} l_{\eta,w}(z+t)$ является вещественным числом, не зависящим от t (согласно формуле произведения) и равным, с точностью до ненулевого множителя, высоте Нерона–Тейта $h_\eta(x)$, следовательно, равным $\langle x,\eta\rangle$ (см. [14], [7]).

Гипотеза 5) означает, в точности, что существует выбор z, лежащий в пересечении ядер всех гомоморфизмов $\lambda_{\eta,w}$. Импликация 5) $\Longrightarrow$ 1), таким образом, очевидна.

Обратно, предположим, что $\langle x,\eta\rangle = 0$, и пусть w — точка поля $\Bbbk$. Любой элемент из $G(\Bbbk_w)$ получается из элементов группы G^w при помощи сдвигов на элементы из $\Bbbk_w^*$. Поскольку, во-первых, $\lambda_{\eta,w}$ аннулируется на первых элементах и, во-вторых, совпадает с l_w на вторых, группа значений l_w и группа значений гомоморфизма $\lambda_{\eta,w}$ совпадают. Если через N

обозначить число классов поля $\Bbbk$, то существует такая $\Bbbk$-рациональная точка t из $\mathbb{G}_m$, что $N\lambda_{\eta,w}(z) = -l_w(t)$ для всех конечных точек w из $\Bbbk$. Таким образом, $z' = Nz + t$ является точкой из $G(\Bbbk)$ над Nx, которая удовлетворяет равенству $\lambda_{\eta,w}(z') = 0$ для любого конечного w, и, таким образом, для любого нормирования w поля $\Bbbk$, поскольку $\sum_{w\in\Omega}\lambda_{\eta,w}(z') = 0$ и $\Bbbk$ согласно предположению имеет *единственное* архимедово нормирование. Итак, 1-мотив $M = [U\colon Y \to G]$, определенный $U(1) = z'$, удовлетворяет условию 5).

Замечание 2. 5) влечет 1) *для любого* числового поля $\Bbbk$ (доказывается аналогично). Напротив, предположение, сделанное относительно $\Bbbk$, является, возможно, необходимым для справедливости импликации 1) $\Longrightarrow$ 5). Например, в ситуации, описанной в конце замечания 1 (но на этот раз с $A = E/\Bbbk$, где $\Bbbk$ является вещественным квадратичным полем $\mathbb{K}$), мы можем предположить, что ни один из локальных множителей спаривания Нерона–Тейта $\langle x, y\rangle$ в бесконечных точках поля $\Bbbk$ не является логарифмом алгебраического числа (хотя их сумма, очевидно, является таковым). Другими словами, возможно, что всякое архимедово нормирование проявит препятствие к выполнению условия 5).

§ 3б. Представления Галуа

Зафиксируем простое число l и изучим различные l-адические представления абсолютной группы Галуа $\Gamma = \mathrm{Gal}(\bar{\Bbbk}/\Bbbk)$ поля $\Bbbk$ (можно аналогично рассмотреть представление по модулю l для почти всех l). Если T_l обозначает такое представление, то обозначим через $\Gamma(T_l)$ фактор-группу, с помощью которой Γ действует на T_l.

Пусть $M = [U\colon Y \to G]$ — 1-мотив над $\Bbbk$, $M^v = [U'\colon Y \to G']$ — его двойственный по Картье и (u, u') — гомоморфизм из Y в $A \times A^v(\Bbbk)$, связанный с M. Действие Γ на точках деления $z = U(1)$ степенями l образует после взятия проективного предела l-адическое представление $T_l(M)$ группы Γ, расширение тривиального представления $Y \otimes \mathbb{Z}_l$ при помощи модуля Тейта $T_l(G)$ группы G. Последнее также является расширением модуля Тейта $T_l(A)$ при помощи кругового представления $\mathbb{Z}_l(1)$, класс изоморфизма которого является элементом в $H^1\big(\Gamma, \mathrm{Hom}(T_l(A), \mathbb{Z}_l(1))\big) = H^1\big(\Gamma, T_l(A^v)\big)$, связанным при помощи теории Куммера с точками деления $u'(1)$ в $A^v(\Bbbk)$. С другой стороны, прямой образ при $\pi\colon T_lG \to T_lA$ представления $T_l(M)$ есть элемент $H^1\big(\Gamma, T_l(A)\big)$, связанный по теории Куммера с точками деления $u(1)$ в $A(\bar{\Bbbk})$. Фактор $\Gamma\big(T_l(M)\big)$ группы Γ есть, таким образом, некоторое расширение своего фактора $\Gamma\big(T_l(G) \oplus T_l(G')\big)$ при помощи промежуточной группы Галуа, изоморфной некоторой подгруппе $\mathrm{Hom}(Y \otimes \mathbb{Z}_l, \mathbb{Z}_l(1))$.

Определение 2. Пусть $M = [U\colon Y \to G]$ — 1-мотив над $\Bbbk$ с двойственным $M^v = [U'\colon Y \to G']$. M называется *относительно расщепленным*, если $\Gamma\big(T_l(M)\big)$ совпадает с $\Gamma\big(T_l(G) \oplus T_l(G')\big)$.

Это сводится к тому, что все точки деления $z = U(1)$ степенями числа l являются определенными над $\Bbbk\,(A[l^n], u(1)/l^n, u'(1)/l^n; n \in \mathbb{N})$. В дальнейшем будет показано, что это условие в действительности не зависит от l. Отметим, что оно инвариантно относительно изогении и двойственности, и что для данного $g(x,\eta)$ в силу l-адического аналога теоремы Рибета в теории Куммера ([11, 4.5], [1, теор. 1]) существует самое большее один класс изогений 1-мотивов относительно расщепленных над $g(x,\eta)$.

Предложение 3. *Пусть $\Bbbk$ — числовое поле, A — абелево многообразие, определенное над $\Bbbk$, и (x,η) — $\Bbbk$-рациональная точка в $A \times A^v$. Следующие условия эквивалентны*:

3) *существуют такой антисимметричный $\Bbbk$-гомоморфизм f из $A \times A^v$ в $A^v \times A$ и такое целое $N \neq 0$, что $N(\eta,x) = f\big((x,\eta)\big)$*;
4) *существуют такое целое $N' \neq 0$ и такой относительно расщепленный 1-мотив $M/\Bbbk$, что M поднимает $g(N'x,\eta)$.*

Доказательство предложения 3 основано на теореме Жакино и Рибета [6] и на конструкции Рибета ([6, § 4], [10]; см. также статью Брина [4]). Напомним, что эта конструкция ставит в соответствие любому элементу η из $A^v(\Bbbk)$ и любому антисимметричному $\Bbbk$-гомоморфизму h из A^v в A 1-мотив $M(h,\eta) = [U\colon Y \to G]$, определенный на $\Bbbk$, поднимающий $g(2h(\eta),\eta)$ и удовлетворяющий следующему свойству.

Лемма 2. *Пусть $M = [U\colon Y \to G]$ — 1-мотив на $\Bbbk$, поднимающий $g(x,\eta)$. Факторы $\Gamma\big(T_l(M)\big)$ и $\Gamma\big(T_l(G)\big)$ группы Γ совпадают тогда и только тогда, когда существует такой антисимметричный гомоморфизм $h\colon A^v \to A$, что M является изогенией $M(h,\eta)$. При этом существуют антисимметричный гомоморфизм $h'\colon A^v \to A$ и целое ненулевое N, для которых $Nx = h'(\eta)$.*

Доказательство леммы 2. Достаточность второго условия доказана в [6, 4.3], [10] и [4]. Аналог “$\mathrm{mod}\, l$ для почти всех l” его необходимости установлен в [6, 3.3 и 4.3]: l-адическая версия доказательства идентична. Обозначим через ε эндоморфизм многообразия A, индуцированный изогенией из $M(h,\eta)$ в M, $\varepsilon\eta$ (соответственно $\varepsilon(2h(\eta))$) является, следовательно, целочисленным кратным η (соответственно x) и гомоморфизм $h' = 2\varepsilon h \varepsilon^v$ отвечает последнему условию.

Доказательство импликации 3) $\Longrightarrow$ 4). Вернемся к обозначению $\mathbb{A} = A \times A^v$ из § 2. Согласно 3) существует такой антисимметричный гомоморфизм f' из A в A^v, что $N(x,\eta) = f'(\eta,x)$. Пусть

$\mathbb{M} = [\mathbb{U}\colon Y \to \mathbb{G}]$ — это 1-мотив $M\bigl(f'; (\eta, x)\bigr)$, который поднимает, таким образом, $g\bigl(2N(x,\eta), (\eta, x)\bigr)$. Согласно лемме 2, $\Gamma\bigl(T_l(\mathbb{M})\bigr)$ сводится к $\Gamma\bigl(T_l(\mathbb{G})\bigr)$. Поскольку $\mathbb{G}$ — расширение $A \times A^v$ при помощи $\mathbb{G}_m$, параметризованное (η, x), — является прямым образом относительно сложения $\mu\colon \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, произведения расширений $G = G_\eta$ многообразия A и $G' = G'_x$ многообразия A^v при помощи $\mathbb{G}_m$, его фактор $\Gamma\bigl(T_l(G)\bigr)$ также совпадает с $\Gamma\bigl(T_l(G) \oplus T_l(G')\bigr)$. С другой стороны, существует 1-мотив $M' = [u\colon Y \to G_{2N\eta}]$, определенный над квадратичным расширением поля $\Bbbk$, поднимающий $g(2Nx, 2N\eta)$ и такой, что $[2N]_*\mathbb{M}$ является образом относительно μ произведения M' и его двойственного по Картье M'^v. 2-изогения позволяет получать из M' 1-мотив, определенный над $\Bbbk$ и поднимающий $g(2Nx, 4N\eta)$, и новую изогению, дающую для $N' = 8N^2$ 1-мотив $M/\Bbbk$, поднимающий $g(N'x, \eta)$ и такой, что $\mu_*(M \times M')$ изогенен мотиву $\mathbb{M}$. Поскольку представления $T_l(M)$ и $T_l(M^v) \otimes \mathbb{Z}_l(-1)$ контраградиентны, получаем, что $\Gamma\bigl(T_l(\mathbb{M})\bigr) = \Gamma\bigl(T_l(M)\bigr)$. Но $\Gamma\bigl(T_l(M)\bigr)$ имеет $\Gamma\bigl(T_l(G) \oplus T_l(G')\bigr) = \Gamma\bigl(T_l(\mathbb{G})\bigr)$ в качестве фактора. Таким образом, все эти группы совпадают и M является относительно расщепленным.

Доказательство импликации 4) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $M = [U\colon Y \to G]$ — 1-мотив над $\Bbbk$, относительно расщепленный и поднимающий $g(Nx, \eta)$. Двойственный мотив $M^v = [U'\colon Y \to G']$ также является относительно расщепленным. Прямой образ относительно μ их произведения является таким 1-мотивом $\mathbb{M} = [\mathbb{U}\colon Y \to \mathbb{G}]$, где $\mathbb{G} = \mu_*(G \times G')$, что $\Gamma\bigl(T_l(\mathbb{M})\bigr) = \Gamma\bigl(T_l(M) \oplus T_l(M^v)\bigr) = \Gamma\bigl(T_l(G) \oplus T_l(G^v)\bigr) = \Gamma\bigl(T_l(\mathbb{G})\bigr)$. Тогда $\mathbb{M}$ поднимает $g\bigl((Nx, \eta), (\eta, Nx)\bigr)$ и лемма 2, дополненная отображениями обращения и произведения, дает искомый антисимметричный гомоморфизм.

§ 3в. Новая гипотеза

Мы можем, наконец, сформулировать гипотезу, которой посвящена эта статья.

Гипотеза 2. *Пусть $\Bbbk$ — чисто вещественное числовое поле и M — 1-мотив, определенный над $\Bbbk$. Следующие условия эквивалентны:*

- 4$'$) *M является относительно расщепленным* (см. § 3б, определение 2);
- 5$'$) *M имеет всюду хорошую относительную редукцию* (см. § 3а, определение 1).

Покажем, прежде всего, для чего она может быть использована.

ТЕОРЕМА. *Из гипотезы 2 следует гипотеза 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поле $\mathbb{Q}$ удовлетворяет всем условиям всех наших предположений (это, впрочем, единственное поле, обладающее таким свойством). В частности,

$$1) \implies 5) \implies 4) \implies 3) \implies 2),$$

где вторая импликация следует из гораздо более точного утверждения $5') \implies 4')$.

Понятно, что для $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ или мнимого квадратичного поля $\mathbb{k}$, последовательность (безусловных) импликаций

$$4) \implies 3) \implies 2) \implies 1) \implies 5)$$

позволяет связать с любым относительно расщепленным мотивом мотив со всюду хорошей относительной редукцией. Интересно отметить, что импликация $4') \implies 5')$ может быть доказана не только в указанных условиях, но остается верной в случае произвольного поля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть $\mathbb{k}$ — числовое поле и M — относительно расщепленный 1-мотив над $\mathbb{k}$. Тогда M имеет всюду хорошую относительную редукцию.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = [U\colon Y \to G]$ и двойственный мотив $M^v = [U'\colon Y \to G']$ относительно расщеплены. Как мы уже видели $(4) \implies 3))$, 1-мотив $\mu_*(M \times M^v)$ является изогенным 1-мотиву вида $M\big(f; (\eta, x)\big) = [\mathbb{U}\colon Y \to \mathbb{G}]$. Согласно [3, лемма 5], такие 1-мотивы допускают всюду хорошую относительную редукцию. Однако, функциональные свойства бигомоморфизмов λ_w из § 3a (см. [7, 1.10.3]) позволяют утверждать, что $\lambda_{w,\mathbb{G}} \circ \mathbb{U} = \lambda_{w,G} \circ U + \lambda_{w,G'} \circ U'$ и что $\lambda_{w,G} \circ U = \lambda_{w,G'} \circ U'$. В частности, $\lambda_{w,G} \circ U = 0$ и M также имеет всюду хорошую относительную редукцию.

В заключении дадим несколько критических замечаний относительно предполагаемой импликации $5') \implies 4')$.

а) Сделанное предположение относительно числового поля $\mathbb{k}$ является существенным. Таким образом, в ситуации, описанной в замечании 2, но на этот раз с *мнимым* квадратичным полем $\mathbb{k} = \mathbb{K}$, конструкция из предложения 2, $1) \implies 5)$, дает 1-мотив $M/\mathbb{k}$, поднимающий $g(x, y)$ и имеющий всюду хорошую относительную редукцию. А l-адический аналог теоремы 4.3 из [11] показывает, что как только x и y оказываются линейно независимыми над $\mathrm{End}(E/\mathbb{k})$, никакое поднятие $g(x, y)$ не может быть относительно расщепленным.

б) Предположение о хорошей относительной редукции в конечной точке w дает некоторую информацию о соответствующей группе инерции, во всяком случае, когда абелево многообразие, подлежащее M, имеет хорошую редукцию в w (см. [9, 4.6]). Интересно выразить это условие для архимедовых точек в терминах вещественных структур Ходжа. Отметим, по этому поводу, что смешанные мотивы, изучаемые здесь, не являются *критическими* (в смысле [12, 3.15]).

в) Гипотеза 2 является верной, когда абелево многообразие A сводится к 0, и оно распространяется тогда на все числовые поля (теорема Кронекера). Более общо (и забывая первоначальную гипотезу), было бы полезно проверить гипотезу 2 в предположении, что A допускает хорошую редукцию во всех (конечных) точках чисто вещественного поля $\Bbbk$.

Приложение

В этом приложении мы изложим два подхода к гипотезе 1 совершенно различной природы.

Первое состоит в интерпретации нулевых значений $\langle x, \eta \rangle$ спаривания Нерона–Тейта как нулевых значений высот, связанных с некоторыми численно эффективными пучками. Более точно, пусть $A/\Bbbk$ — абелево многообразие и G — расширение A при помощи $\mathbb{G}_m$, параметризованное элементом η из $\mathrm{Pic}^0(A/\Bbbk)$. Проективное расслоение $\mathbb{P}(O_A \oplus \eta)$ на A является гладкой компактификацией G, на которой G действует при помощи сдвигов. Антиканоническому пучку τ на $\mathbb{P}(O_A \oplus \eta)$ соответствует каноническая высота h_τ (см. [3, предложение 4]), имеющая величину $\geqslant 0$ (поскольку τ эффективно), и точка z из $G(\Bbbk)$ имеет нулевую высоту $h_\tau(z)$ тогда и только тогда, когда 1-мотив $M = [U \colon Y \to G]$, определенный при помощи $U(1) = z$, имеет всюду хорошую относительную редукцию. Можно надеяться, что изучение нулевых значений высоты $\geqslant 0$ (например, h_τ) является более легким, чем для некоторой высоты $h_\eta = \langle \cdot, \eta \rangle$, величина которой имеет переменный знак.

Второй подход уже обсуждался в замечании 2. Речь идет о характеристике посредством “препятствующих алгебраических подгрупп” таких значений $\langle x, \eta \rangle$, которые являются логарифмами алгебраических чисел (поэтому, в частности, таких пар (x, η), что $\langle x, \eta \rangle = \mathrm{Log}(1)$). Для выражений $\langle x, \eta \rangle - \mathrm{Log}(\alpha)$, записывающихся обычно как *определители* периодов, вопрос об их обращении в нуль связан с проблемой четырех экспонент. Трансцендентные методы представляются плохо приспособленными для этого.

Эти трансцендентные методы позволяют, однако, в некотором случае проверить p-адический аналог гипотезы 1. Рассмотрим, например, эллиптическую кривую E, определенную над полем $\Bbbk$ и допускающую комплексное умножение на подполе $\mathbb{F}$ в $\Bbbk$. Пусть, вместе с тем, $\wp$ — нормирование поля $\mathbb{F}$ степени 1, над которым E допускает хорошую редукцию, и $\langle \, , \rangle_\wp$ — каноническое $\wp$-адическое спаривание, связанное с $\wp$ (см. [7,

p. 222]). Используя обозначения $A = \mathrm{Res}_{\Bbbk/\mathbb{Q}} E$, ρ, ρ' из конца § 1, мы можем сформулировать

Предложение 5. *Пусть x и y — две точки из $E(\Bbbk)$. Следующие условия эквивалентны*:

1) $\langle x, y\rangle_{\wp} = 0$;
2) *абелево подмногообразие, порожденное $\bigl(\rho(x), \rho'(y)\bigr)$ в $A \times A^v$ изотропно.*

Доказательство этого предложения состоит, в основном, из соображений, изложенных в [1]. Оно основывается, в частности, на анализе расширений $A \times A^v$ при помощи $\mathbb{G}_m$, аналогичных описанным в § 3б. Здесь оно передоказываться не будет.

Автор благодарит М. Черепнева и А. Паршина за перевод этой статьи с французского языка на русский.

Université P. et M. Curie
Institut de Mathématiques de Jussieu

Поступило
01.09.94

Список литературы

[1] *Bertrand D.* Relations d'orthogonalité dans les groupes de Mordell–Weil // Birkhaüser Prog. Math. 1986. V. 63. P. 33–39.
[2] *Bertrand D.* Galois representations and transcendental numbers // New Advances in Transcendence Theory / ed. A. Baker. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. P. 37–55.
[3] *Bertrand D.* Minimal heights and polarizations on group varieties // Duke Math. J. (to appear).
[4] *Breen L.* Biextensions alternées // Compo. math. 1987. V. 63. P. 99–122.
[5] *Deligne P.* Théorie de Hodge III // Publ. Math. IHES. 1975. V. 44. P. 5–77.
[6] *Jacquinot O., Ribet K.* Deficient points on extensions of abelian varieties by $\mathbb{G}_m$ // J. Number Th. 1987. V. 25. P. 133–151.
[7] *Mazur B., Tate J.* Canonical height pairings via biextensions // Birkhaüser Prog. Math. 1983. V. 35. P. 195–237.
[8] *Mumford D.* Abelian varieties. Oxford: Oxford University Press, 1970.
[9] *Raynaud M.* Motifs et monodromie géométrique // Sém. sur les pŕiodes p-adiques, exposé № 7 / ed. J.–M. Fontaine–L. Illusie: Astérisque, 1994.
[10] *Ribet K.* Cohomological realization of a family of 1-motifs // J. Number Th. 1987. V. 25. P. 152–161.
[11] *Ribet K.* Kummer theory on extensions of abelian varieties by tori // Duke Math. J. 1979. V. 46. P. 745–761.
[12] *Scholl A.* Height pairings and special values of L-functions // Motives / ed. U. Jannsen, S. Kleiman, J.–P. Serre. AMS PSPM 55. V. I. P. 571–598.
[13] *Serre J.–P.* Lectures on the Mordell–Weil theorem: Vieweg AM 15, 1989.
[14] *Зархин Ю. Г.* Спаривание Нерона и квазихарактеры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. № 6. С. 497–509.