УДК 511.3+519.11+517.588

В. В. Зудилин

Сокращение факториалов

В работе изучается арифметическое свойство, позволяющее усиливать некоторые теоретико-числовые оценки. Известные ранее результаты носили, как правило, качественный характер. Приложение полученных в работе количественных результатов к классу обобщенных гипергеометрических G-функций расширяет множество иррациональных чисел, являющихся значениями этих функций.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Вынесенный в название статьи термин возник совсем недавно, хотя некоторые проявления эффекта "сокращения факториалов" стали уже классическими и в настоящее время относятся к разряду школьных задач.

Пример 1. Оператор $D = d/dz$ дифференцирования по переменной z переводит кольцо многочленов $\mathbb{Z}[z]$ с целыми коэффициентами в себя; следовательно, этим же свойством обладают и операторы D^n, $n = 0, 1, 2, \dots$. Как несложно показать (см., например, [1; гл. 4, лемма 7]), под действием операторов $D^n/n!$ кольцо $\mathbb{Z}[z]$ также переходит в себя:

$$\frac{1}{n!}D^n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{Z}[z] \to \mathbb{Z}[z], \qquad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Пример 2. Последовательность многочленов

$$\langle\lambda\rangle_0 = 1, \qquad \langle\lambda\rangle_n = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1), \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

содержится в кольце $\mathbb{Z}[\lambda]$; значит, при целых λ многочлены (1) принимают целые значения. На самом деле, этим свойством также обладают многочлены

$$\Delta_n(\lambda) = \frac{\langle\lambda\rangle_n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2}$$

(см., например, [2; отд. 8, гл. 2, задача 84]), не принадлежащие при $n \geqslant 2$ кольцу $\mathbb{Z}[\lambda]$. Многочлены (2) называются *целозначными*.

Пусть поле $\mathbb{K}$ – некоторое алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ – кольцо целых поля $\mathbb{K}$. Вместо кольца $\mathbb{Z}[z]$ в примере 1 можно рассматривать кольцо $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$:

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z] \to \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], \qquad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00181) и объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

Определение 1. Будем говорить, что *оператор* $D\colon \mathbb{K}[z]\to\mathbb{K}[z]$ *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $\Psi\geqslant 1$, если существует последовательность натуральных чисел $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\psi_k\frac{D^n}{n!}\colon \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]\to\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], \qquad n=0,1,\dots,k, \quad k\in\mathbb{N}, \qquad \text{и} \qquad \varlimsup_{k\to\infty}\psi_k^{1/k}\leqslant\Psi.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для любого алгебраического расширения* $\mathbb{K}$ *поля* $\mathbb{Q}$ *оператор* $d/dz\colon \mathbb{K}[z]\to\mathbb{K}[z]$ *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* 1.

Выбирая в примере 2 $\lambda=a/b\in\mathbb{Q}$, где $a\in\mathbb{Z}$ и $b\in\mathbb{N}$ взаимно просты, заметим, что общий знаменатель чисел

$$b^n\frac{\langle\lambda\rangle_n}{n!}=\frac{a(a-b)(a-2b)\cdots(a-(n-1)b)}{n!}, \qquad n=1,2,\dots,k, \tag{3}$$

равен $\prod_{p\mid b}p^{\tau_p(k)}$ (см. [1; гл. 1, лемма 8] или [3; гл. I, приложение]), где

$$\tau_p(k)=\left\lfloor\frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{k}{p^3}\right\rfloor+\dots\leqslant\frac{k}{p-1} \tag{4}$$

– степень вхождения простого числа p в $k!$; здесь и далее $\lfloor\,\cdot\,\rfloor$ обозначает целую часть числа. Таким образом, общий знаменатель чисел (3) не превосходит $e^{k\chi(b)}$, где

$$\chi(b)=\sum_{p\mid b}\frac{\log p}{p-1}, \qquad b\in\mathbb{N}, \tag{5}$$

т.е. имеет геометрический порядок роста при $k\to\infty$.

Разумеется, в качестве области определения многочленов (1) можно рассматривать алгебраическое расширение $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{Q}$ (или даже кольцо квадратных матриц с коэффициентами из $\mathbb{K}$, см. далее п. 4). Определим сразу *знаменатель* $\operatorname{den}\lambda$ числа $\lambda\in\mathbb{K}$ как наименьшее натуральное b такое, что $b\lambda\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$.

Определение 2. Будем говорить, что *элемент* λ *поля* $\mathbb{K}$ *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $\Psi\geqslant 1$, если существует последовательность натуральных чисел $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\psi_k\frac{\langle\lambda\rangle_n}{n!}\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \qquad n=0,1,\dots,k, \quad k\in\mathbb{N}, \qquad \text{и} \qquad \varlimsup_{k\to\infty}\psi_k^{1/k}\leqslant\Psi,$$

где символ $\langle\,\cdot\,\rangle_n$ определяется формулой (1).

Подытожим сказанное к примеру 2 в виде следующего утверждения.

Лемма 2. *Рациональное число* λ *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $be^{\chi(b)}$, *где* $b=\operatorname{den}\lambda$, *а функция* $\chi(\,\cdot\,)$ *определяется формулой* (5).

Замечание. Рациональность числа λ в лемме 2 существенна. Рассматривая поле $\mathbb{K}=\mathbb{Q}(\lambda)$ конечной степени $\varkappa=[\mathbb{K}:\mathbb{Q}]\geqslant 2$ и полагая в основной лемме работы [4] $a_1=-\lambda-1, b_1=0, m=m_1=1, m_2=0, \tau=1-1/\varkappa, \varepsilon=1/6$, получаем следующее утверждение: *для любой последовательности натуральных чисел* $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *такой, что*

$$\psi_k\frac{\langle\lambda\rangle_n}{n!}\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, \qquad n=0,1,\dots,k, \quad k\in\mathbb{N},$$

выполняется неравенство

$$\psi_k\geqslant Ck^{(\tau-\varepsilon)\varkappa k}\geqslant Ck^{2k/3}, \qquad k\in\mathbb{N}, \tag{6}$$

где положительная постоянная C зависит только от числа λ. Оценка (6) означает, что в случае иррационального λ рост общих знаменателей последовательности (2) при $k\to\infty$ по крайней мере факториальный и говорить о сокращении факториалов не имеет смысла.

2. История вопроса. Примеры, приведенные в п. 1, можно считать классическими. На самом деле, понятие *сокращение факториалов* появилось в статье А. И. Галочкина [5] и было связано с сокращением коэффициентов линейных приближающих форм (приближений Паде) для так называемых G-функций в методе Зигеля–Шидловского. Намек на это обстоятельство содержится в работе К. Зигеля [6], с которой и берет начало указанный метод. Во всех работах, связанных с применением метода Зигеля–Шидловского к классу G-функций и опубликованных до появления [5], были получены оценки линейных форм и многочленов от значений этих функций в рациональных точках, величина которых зависела от высоты рассматриваемых форм (см., например, [7]). И именно условие сокращения факториалов позволило получить для одного подкласса G-функций оценки модулей многочленов от их значений в точках, величина которых уже не зависела от высоты многочленов. В [5] была сформулирована теорема об эффективной оценке линейной формы от G-функций из одного класса, доказательство которой опубликовано в работе [8]. В статье [9] была вычислена постоянная, с которой происходит сокроащение факториалов для гауссовой гипергеометрической функции, что позволило получить ряд результатов об иррациональности и линейной независимости значений этой функции и ее производной. Наконец, в 1985 г. Д. В. Чудновский и Г. В. Чудновский [10] доказали, что условие сокращения факториалов, сформулированное в [5], выполняется для однородных систем линейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют G-функции. В [3; гл. VI, § 4] несложное обобщение конструкции Чудновских позволило распространить это условие на неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений.

Несмотря на положительное решение проблемы сокращения факториалов для G-функций, постоянная, с которой происходит это сокращение, является достаточно грубой. Это обстоятельство связано с тем, что конструкция Чудновских использует неявные построения с помощью принципа Дирихле. В настоящей работе приводится новое решение указанной проблемы для обобщенных гипергеометрических G-функций, сформулированное в статье [11; § 12] в качестве гипотезы. Наше доказательство опирается на явные построения и поэтому дает более точную оценку постоянной, с которой происходит сокращение факториалов. Теоретико-числовое применение полученного результата расширяет множество иррациональных чисел, являющихся значениями гипергеометрических G-функций.

Определим класс G-функций, имеющих рациональные коэффициенты в разложении Тейлора в окрестности нуля. Скажем, что *совокупность функций*

$$f_j(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{jn}z^n,\ \ j=1,\dots,m, \quad f_{jn}\in\mathbb{Q},\ \ j=1,\dots,m,\ \ n=0,1,\dots, \tag{7}$$

принадлежит классу $\mathbf{G}(C,\Phi)$, если функции (7) аналитичны в круге $|z|<C$ и существует последовательность натуральных чисел $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\varphi_k f_{jn}\in\mathbb{Z}, \quad j=1,\dots,m, \ \ n=0,1,\dots,k, \ \ k\in\mathbb{N}, \quad \text{и} \quad \varlimsup_{k\to\infty}\varphi_k^{1/k}\leqslant\Phi.$$

Сформулируем теперь условие сокращения факториалов для систем линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}y_l=Q_{l0}+\sum_{j=1}^{m}Q_{lj}y_j, \quad l=1,\dots,m,\\ Q_{lj}=Q_{lj}(z)\in\mathbb{Q}(z), \quad l=1,\dots,m, \ \ j=0,\dots,m,\end{gathered} \tag{8}$$

которым удовлетворяют G-функции (7).

Пусть многочлен $T(z)\in\mathbb{Q}[z]$ – знаменатель рациональных функций со старшим коэффициентом, равным 1:

$$T(z)Q_{lj}(z)\in\mathbb{Q}[z], \quad l=1,\dots,m, \ \ j=0,\dots,m. \tag{9}$$

Из (8) следует, что для производных порядка n, $n=1,2,\dots$, имеют место соотношения

$$\begin{gathered}\frac{d^n}{dz^n}y_l=Q_{l0}^{[n]}+\sum_{j=1}^{m}Q_{lj}^{[n]}y_j, \quad l=1,\dots,m,\\ Q_{lj}^{[n]}=Q_{lj}^{[n]}(z)\in\mathbb{Q}(z), \quad l=1,\dots,m, \ \ j=0,\dots,m.\end{gathered} \tag{10}$$

Несложные выкладки показывают справедливость следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{gathered}Q_{lj}^{[n]}(z)=\frac{d}{dz}Q_{lj}^{[n-1]}(z)+\sum_{r=1}^{m}Q_{lr}^{[n-1]}(z)Q_{rj}(z),\\ l=1,\dots,m, \ \ j=0,1,\dots,m, \ \ n=1,2,\dots;\end{gathered} \tag{11}$$

поэтому

$$\begin{gathered}T^n(z)Q_{lj}^{[n]}(z)=T(z)\frac{d}{dz}\bigl(T^{n-1}(z)Q_{lj}^{[n-1]}(z)\bigr)-(n-1)T'(z)\cdot T^{n-1}(z)Q_{lj}^{[n-1]}(z)\\ +\sum_{r=1}^{m}T^{n-1}(z)Q_{lr}^{[n-1]}(z)\cdot T(z)Q_{rj}(z),\\ l=1,\dots,m, \ \ j=0,1,\dots,m, \ \ n=1,2,\dots.\end{gathered}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$T^n(z)Q_{lj}^{[n]}(z)\in\mathbb{Q}[z], \quad l=1,\dots,m, \ \ j=0,\dots,m, \ \ n=1,2,\dots.$$

Определение 3. Будем говорить, что *система линейных дифференциальных уравнений* (8) *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $\Psi \geqslant 1$, если существуют натуральные числа $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$\psi_k \frac{T^n(z)Q_{lj}^{[n]}(z)}{n!} \in \mathbb{Z}[z], \qquad l=1,\dots,m, \quad j=0,\dots,m, \quad n=0,1,\dots,k, \quad k\in\mathbb{N},$$
$$\varlimsup_{k\to\infty}\psi_k^{1/k} \leqslant \Psi.$$

Условие сокращения факториалов для системы (8) выполняется, вообще говоря, только если ей удовлетворяет набор линейно независимых над $\mathbb{C}(z)$ G-функций. Подобные системы относятся к классу систем дифференциальных уравнений фуксовского типа. С точностью до мероморфного преобразования пространства решений матрица коэффициентов $Q(z)=\bigl(Q_{lj}(z)\bigr)_{l,j}$ системы (8) фуксовского типа имеет вид

$$Q(z)=\frac{1}{z-\gamma_1}A_1+\dots+\frac{1}{z-\gamma_s}A_s, \tag{12}$$

где $\gamma_1,\dots,\gamma_s$ – регулярные особенности системы (8), $A_1,\dots,A_s$ – числовые матрицы (см. [12; замечание к § 2.4]). В случае (12) знаменатель соответствующей системы (8) равен $T(z)=(z-\gamma_1)\cdots(z-\gamma_s)$.

3. Сокращение факториалов для дифференциальных операторов. В этом пункте мы исследуем одно обобщение оператора дифференцирования d/dz, для которого также выполнено условие сокращения факториалов.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое расширение поля $\mathbb{Q}$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$D=\frac{d}{dz}+\frac{\lambda}{z}, \qquad \lambda\in\mathbb{Q}. \tag{13}$$

Оператор $T(z)D$, где $T(z)=z$, переводит кольцо $\mathbb{K}[z]$ в себя, в то время как сам оператор D отображает $\mathbb{K}[z]$ в $\mathbb{K}(z)$. Поэтому мы несколько расширим область действия определения 1.

Определение 1′. *Знаменателем* произвольного (не обязательно линейного) дифференциального оператора $D\colon \mathbb{K}(z)\to\mathbb{K}(z)$ мы назовем нетривиальный многочлен $T(z)\in\mathbb{K}[z]$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным 1, для которого $T(z)D\colon \mathbb{K}[z]\to\mathbb{K}[z]$. Будем говорить, что *оператор* D *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $\Psi\geqslant 1$, если существует последовательность натуральных чисел $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что

$$\psi_k\frac{T^n(z)D^n}{n!}\colon \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]\to\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z], \qquad n=0,1,\dots,k, \quad k\in\mathbb{N}, \qquad \text{и} \qquad \varlimsup_{k\to\infty}\psi_k^{1/k}\leqslant\Psi.$$

Лемма 3. *Для дифференциального оператора* (13) *справедливы тождества*

$$D^n=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\langle\lambda\rangle_l}{z^l}\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}, \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{14}$$

где символ $\langle\,\cdot\,\rangle_l$ *определяется формулой* (1).

Доказательство. При $n=1$ формула (14) совпадает с определением (13) оператора D. Полагая, что формула (14) справедлива для некоторого натурального n, имеем

$$\begin{aligned}
D^{n+1}&=\biggl(\frac{d}{dz}+\frac{\lambda}{z}\biggr)D^n=\frac{d}{dz}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\langle\lambda\rangle_l}{z^l}\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}+\frac{\lambda}{z}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\langle\lambda\rangle_l}{z^l}\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}\\
&=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\langle\lambda\rangle_l}{z^l}\frac{d^{n-l+1}}{dz^{n-l+1}}-\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{l\cdot\langle\lambda\rangle_l}{z^{l+1}}\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}+\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\lambda\cdot\langle\lambda\rangle_l}{z^{l+1}}\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}\\
&=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\langle\lambda\rangle_l}{z^l}\frac{d^{n+1-l}}{dz^{n+1-l}}+\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\langle\lambda\rangle_{l+1}}{z^{l+1}}\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}\\
&=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{\langle\lambda\rangle_l}{z^l}\frac{d^{n+1-l}}{dz^{n+1-l}}+\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}\frac{\langle\lambda\rangle_l}{z^l}\frac{d^{n+1-l}}{dz^{n+1-l}}\\
&=\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}\frac{\langle\lambda\rangle_l}{z^l}\frac{d^{n+1-l}}{dz^{n+1-l}}.
\end{aligned}$$

Тем самым, формула (14) справедлива и для $n+1$. Согласно принципу математической индукции она верна для всех натуральных n. Лемма доказана.

Пользуясь определением биномиальных коэффициентов, из леммы 3 получаем тождество

$$z^n\frac{D^n}{n!}=\sum_{l=0}^{n}z^{n-l}\cdot\frac{\langle\lambda\rangle_l}{l!}\cdot\frac{1}{(n-l)!}\frac{d^{n-l}}{dz^{n-l}}, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Применяя теперь условия сокращения факториалов для оператора d/dz (лемма 1) и рационального числа λ (лемма 2), получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Дифференциальный оператор* (13) *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $be^{\chi(b)}$, *где* $b=\operatorname{den}\lambda$, *а функция* $\chi(\,\cdot\,)$ *определяется формулой* (5).

Лемма 3 легко обобщается на случай дифференциального оператора

$$D=\frac{d}{dz}+\frac{\lambda_1}{z-\gamma_1}+\dots+\frac{\lambda_s}{z-\gamma_s}, \qquad \lambda_1,\dots,\lambda_s,\gamma_1,\dots,\gamma_s\in\mathbb{Q}, \tag{15}$$

со знаменателем $T(z)=(z-\gamma_1)\cdots(z-\gamma_s)$. Укажем соответствующие тождества без доказательства.

Лемма 4. *Для дифференциального оператора* (15) *справедливы тождества*

$$D^n = \sum_{\substack{n_0,n_1,\dots,n_s\geqslant 0\\ n_0+n_1+\dots+n_s=n}} \frac{n!}{n_0!\,n_1!\cdots n_s!}\frac{\langle\lambda_1\rangle_{n_1}}{(z-\gamma_1)^{n_1}}\cdots\frac{\langle\lambda_s\rangle_{n_s}}{(z-\gamma_s)^{n_s}}\frac{d^{n_0}}{dz^{n_0}}, \quad n\in\mathbb{N}. \quad (16)$$

Согласно лемме 4 выполнено

$$\frac{T^n(z)D^n}{n!} = \sum_{\substack{n_0,n_1,\dots,n_s\geqslant 0\\ n_0+n_1+\dots+n_s=n}} (z-\gamma_1)^{n-n_1}\cdots(z-\gamma_s)^{n-n_s} \times \frac{\langle\lambda_1\rangle_{n_1}}{n_1!}\cdots\frac{\langle\lambda_s\rangle_{n_s}}{n_s!}\cdot\frac{1}{n_0!}\frac{d^{n_0}}{dz^{n_0}}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

а значит, дифференциальный оператор (15) также удовлетворяет условию сокращения факториалов.

Теорема 2. *Дифференциальный оператор* (15) *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $qbe^{\chi(b)}$, *где* q *– произведение знаменателей чисел* $\gamma_1,\dots,\gamma_s$, $b=\operatorname{den}(\lambda_1,\dots,\lambda_s)$ *– наименьший общий знаменатель чисел* $\lambda_1,\dots,\lambda_s$, *а функция* $\chi(\,\cdot\,)$ *определяется формулой* (5).

4. Сокращение факториалов для квадратных матриц. Числовую квадратную матрицу A размера m можно подставить в любой многочлен; в частности,

$$\langle A\rangle_0 = E, \qquad \langle A\rangle_n = A(A-E)\cdots(A-(n-1)E), \quad n=1,2,\dots,$$

где E – единичная матрица размера m. Если все элементы матрицы A принадлежат алгебраическому расширению $\mathbb{K}$ поля $\mathbb{Q}$, то вполне естественным является следующее определение.

Определение 2′. Скажем, что *матрица* A с элементами из $\mathbb{K}$ *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $\Psi\geqslant 1$, если существуют натуральные числа $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что элементы матриц

$$\psi_k\frac{\langle A\rangle_n}{n!}, \qquad n=0,1,\dots,k, \quad k\in\mathbb{N},$$

принадлежат $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ и

$$\varlimsup_{k\to\infty}\psi_k^{1/k}\leqslant\Psi.$$

Лемма 5. *Если матрица* A *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* Ψ, *то тем же свойством обладает матрица* TAT^{-1}, *где* T *– произвольная невырожденная матрица, элементы которой – алгебраические числа.*

Доказательство основано на применении элементарного тождества

$$(TAT^{-1})^n = TA^nT^{-1}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда, в частности, следует, что

$$\frac{\langle TAT^{-1}\rangle_n}{n!} = T\frac{\langle A\rangle_n}{n!}T^{-1}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Если t_1, t_2 – наименьшие общие знаменатели элементов матриц T, T^{-1} соответственно, а $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность из определения $2'$ для матрицы A, то в качестве соответствующей последовательности для матрицы TAT^{-1} можно взять $\{t_1t_2\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Осталось заметить, что

$$\varlimsup_{k\to\infty}(t_1t_2\psi_k)^{1/k} = \varlimsup_{k\to\infty}\psi_k^{1/k}.$$

Лемма доказана.

Из леммы 5 следует, что сокращение факториалов и вычисление постоянной, с которой оно происходит, достаточно доказать для матрицы, имеющей жорданову нормальную форму.

Лемма 6. *Пусть матрица A состоит из жордановых клеток $A_1, \dots, A_s$, расположенных вдоль главной диагонали и отвечающих (не обязательно различным) собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ соответственно. Тогда матрица $\Delta_n(A) = \langle A\rangle_n/n!$ состоит только из клеток $\Delta_n(A_1), \dots, \Delta_n(A_s)$, расположенных вдоль главной диагонали, причем*

$$\Delta_n(A_l) = \begin{pmatrix} \Delta_n(\lambda_j) & \frac{1}{1!}\Delta_n^{(1)}(\lambda_j) & \frac{1}{2!}\Delta_n^{(2)}(\lambda_j) & \frac{1}{3!}\Delta_n^{(3)}(\lambda_j) & \dots \\ 0 & \Delta_n(\lambda_j) & \frac{1}{1!}\Delta_n^{(1)}(\lambda_j) & \frac{1}{2!}\Delta_n^{(2)}(\lambda_j) & \dots \\ 0 & 0 & \Delta_n(\lambda_j) & \frac{1}{1!}\Delta_n^{(1)}(\lambda_j) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \Delta_n(\lambda_j) \end{pmatrix},$$

$$l = 1, \dots, s.$$

Доказательство. Это утверждение хорошо известно. Более того, оно остается верным, если заменить многочлен $\Delta_n(\,\cdot\,)$ на любую другую функцию аналитическую в круге $|z| < C$, содержащем собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (см., например, [13; гл. 5, § 1, пример 2]).

Замечание 1. Как следует из леммы 6, на главной диагонали матрицы $\Delta_n(A)$ стоят числа $\Delta_n(\lambda_1), \dots, \Delta_n(\lambda_s)$; в соответствии с замечанием к лемме 2 о сокращении факториалов для матрицы A можно говорить лишь в случае рациональных $\lambda_1, \dots, \lambda_s$. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением *рациональных квадратных матриц*, собственные значения которых рациональны. *Знаменателем* $\operatorname{den} A$ рациональной матрицы A назовем наименьший общий знаменатель ее собственных значений. При этом матрица bA не обязательно имеет целочисленные элементы; примером служит матрица

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

знаменатель которой равен 1 (ее собственные значения $0, 1$).

Замечание 2. Для каждого собственного значения λ_l рациональной матрицы A определим натуральное число r_l как максимальный размер жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_l, в нормальной форме матрицы A. Отметим, что

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}, \qquad \lambda_j \leqslant \lambda_l, \quad j \neq l, \tag{17}$$

называется *минимальным многочленом* матрицы A; он делит любой многочлен $P(\lambda)$ такой, что $P(A)=0$. В частности, согласно теореме Гамильтона–Кэли минимальный многочлен делит характеристический многочлен $\det(A-\lambda E)$ матрицы A. Кроме того, если ${}^tA$ – матрица, транспонированная к матрице A, то минимальные (характеристические) многочлены матриц ${}^tA$ и A совпадают.

Лемма 7. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{Q}$, $b=\operatorname{den}\lambda \in \mathbb{N}$ *и* $r \in \mathbb{N}$. *Тогда наименьший общий знаменатель* ψ_k, $k \in \mathbb{N}$, *чисел*

$$\frac{\Delta_n^{(j)}(\lambda)}{j!}, \qquad j=0,1,\dots,r-1, \quad n=0,1,\dots,k,$$

делит

$$b^k d_k^{r-1}\prod_{p\mid b} p^{\tau_p(k)},$$

где d_k *– наименьшее общее кратное чисел* $1,2,\dots,k$, *а* $\tau_p(k)$ *– степень вхождения простого числа* p *в* $k!$ (см. (4)).

Доказательство. Полагая в теореме работы [14] $L=H=k$, $Q=b$, $x=-b\lambda$, $M=r-1$, $\Lambda=1$, получаем требуемое.

Из леммы 7 непосредственно следует

Лемма 8. *Пусть* $b=\operatorname{den}(\lambda_1,\dots,\lambda_s)$ *– наименьший общий знаменатель чисел* $\lambda_1,\dots,\lambda_s \in \mathbb{Q}$; $r_1,\dots,r_s \in \mathbb{N}$, $r=\max_l\{r_l\}$. *Тогда наименьший общий знаменатель* ψ_k, $k \in \mathbb{N}$, *чисел*

$$\frac{\Delta_n^{(j)}(\lambda_l)}{j!}, \qquad j=0,1,\dots,r_l-1, \quad l=1,\dots,s, \quad n=0,1,\dots,k,$$

делит

$$b^k d_k^{r-1}\prod_{p\mid b} p^{\tau_p(k)},$$

где d_k *– наименьшее общее кратное чисел* $1,2,\dots,k$, *а* $\tau_p(k)$ *– степень вхождения простого числа* p *в* $k!$.

Объединяя результаты лемм 5, 6 и 8, получаем следующее утверждение.

Лемма 9. *Пусть* (17) *– минимальный многочлен рациональной матрицы* A; $r=\max_l\{r_l\}$; $b=\operatorname{den}A$; t_1,t_2 *– наименьшие общие знаменатели элементов матриц* T,T^{-1} *соответственно, где* T *– матрица перехода от* A *к ее жордановой нормальной форме. Тогда наименьший общий знаменатель* ψ_k, $k\in\mathbb N$, *элементов матриц*

$$\Delta_n(A), \qquad n=0,1,\dots,k,$$

делит

$$t_1t_2b^kd_k^{r-1}\prod_{p\mid b}p^{\tau_p(k)},$$

где d_k *– наименьшее общее кратное чисел* $1,2,\dots,k$, *а* $\tau_p(k)$ *– степень вхождения простого числа* p *в* $k!$.

С учетом предельных соотношений

$$\varlimsup_{k\to\infty}d_k^{1/k}=e, \qquad \lim_{k\to\infty}\biggl(\prod_{p\mid b}p^{\tau_p(k)}\biggr)^{1/k}=e^{\chi(b)} \tag{18}$$

и замечания 2 к лемме 6 получаем следующее окончательное утверждение.

Теорема 3. *Пусть многочлен*

$$P(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}, \quad \lambda_1,\dots,\lambda_s\in\mathbb Q, \ \lambda_j\ne\lambda_l, \ j\ne l, \tag{19}$$

аннулирует матрицу A (*например,* $P(\lambda)$ *– минимальный или характеристический многочлен*); b *– наименьший общий знаменатель чисел* $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ (*знаменатель матрицы* A); $r=\max_l\{r_l\}$ *– максимальная кратность корней многочлена* (19). *Тогда матрица* A *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $be^{\chi(b)+r-1}$, *где функция* $\chi(\,\cdot\,)$ *определяется формулой* (5).

5. Сокращение факториалов для систем дифференциальных уравнений фуксовского типа. Вернемся к вопросу, обсуждавшемуся в п. 2.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений (8) фуксовского типа и соответствующие системы (10) для производных порядка n, $n=1,2,\dots$; многочлен $T(z)=(z-\gamma_1)\cdots(z-\gamma_s)$ выберем в соответствии с (9). Дополним матрицы неоднородных систем до квадратных нулевыми строками:

$$Q(z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ Q_{10}(z) & Q_{11}(z) & \dots & Q_{1m}(z)\\ Q_{20}(z) & Q_{21}(z) & \dots & Q_{2m}(z)\\ \hdotsfor{4}\\ Q_{m0}(z) & Q_{m1}(z) & \dots & Q_{mm}(z)\end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$Q^{[n]}(z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0\\ Q^{[n]}_{10}(z) & Q^{[n]}_{11}(z) & \dots & Q^{[n]}_{1m}(z)\\ Q^{[n]}_{20}(z) & Q^{[n]}_{21}(z) & \dots & Q^{[n]}_{2m}(z)\\ \hdotsfor{4}\\ Q^{[n]}_{m0}(z) & Q^{[n]}_{m1}(z) & \dots & Q^{[n]}_{mm}(z)\end{pmatrix}, \qquad n=1,2,\dots,$$

и перепишем рекуррентные соотношения (11) в матричном виде:

$$Q^{[n]}(z)=\frac{d}{dz}Q^{[n-1]}(z)+Q^{[n-1]}(z)Q(z),\qquad n=1,2,\dots,$$

откуда

$$\begin{aligned}{}^t\!Q^{[n]}(z)&=\frac{d}{dz}{}^t\!Q^{[n-1]}(z)+{}^t\!Q(z){}^t\!Q^{[n-1]}(z)=\left(\frac{d}{dz}+{}^t\!Q(z)\right){}^t\!Q^{[n-1]}(z)\\&=\left(\frac{d}{dz}+{}^t\!Q(z)\right)^nE,\qquad n=1,2,\dots,\end{aligned}\tag{21}$$

где E – единичная матрица размера $m+1$.

Используя разложение (12), рассмотрим дифференциальный оператор

$$D=\frac{d}{dz}+\frac{1}{z-\gamma_1}{}^tA_1+\dots+\frac{1}{z-\gamma_s}{}^tA_s,\tag{22}$$

где $A_1,\dots,A_s$ – рациональные матрицы. Определим условие сокращения факториалов для оператора (22), заменяя кольцо $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z]$ на $(\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[z])^{(m+1)\times(m+1)}$ в определении $1'$.

Лемма 10. *Если оператор* (22) *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* Ψ, *то система дифференциальных уравнений* (8) *также удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* Ψ.

Доказательство. Согласно соотношениям (21) выполнено

$${}^t\!Q^{[n]}(z)=D^nE,\qquad n=1,2,\dots.\tag{23}$$

Если $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ – последовательность из определения сокращения факториалов для оператора D, то из (23) следует, что матрицы

$$\psi_k\frac{T^n(z){}^t\!Q^{[n]}(z)}{n!},\qquad n=0,1,\dots,k,\quad k\in\mathbb{N},$$

имеют целочисленные элементы. Отсюда получаем утверждение леммы.

К сожалению, лемма 4 неприменима к дифференциальному оператору (22) для *произвольных* матриц $A_1,\dots,A_s$; тождества

$$\begin{aligned}\frac{T^n(z)D^n}{n!}=\sum_{\substack{n_0,n_1,\dots,n_s\geqslant0\\n_0+n_1+\dots+n_s=n}}&(z-\gamma_1)^{n-n_1}\dots(z-\gamma_s)^{n-n_s}\\&\times\frac{\langle{}^tA_1\rangle_{n_1}}{n_1!}\dots\frac{\langle{}^tA_s\rangle_{n_s}}{n_s!}\cdot\frac{1}{n_0!}\frac{d^{n_0}}{dz^{n_0}},\qquad n\in\mathbb{N},\end{aligned}\tag{24}$$

справедливы только в случае *попарно коммутирующих* матриц $A_1,\dots,A_s$.

Учитывая (24), лемму 9 и оценки (18), получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $s = 1$ *или матрицы* $A_1, \dots, A_s$ *попарно коммутируют в случае* $s \geqslant 2$; $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{Q}$ – *собственные значения рациональных матриц* $A_1, \dots, A_s$; $b = \operatorname{den}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$; $r_{jl} \geqslant 0$, $j = 1, \dots, p$, $l = 1, \dots, s$, – *кратность собственного значения* λ_j *в минимальном* (*характеристическом*) *многочлене матрицы* A_l; $r = \max_{j,l}\{r_{jl}\}$ – *максимальная кратность собственных значений. Тогда оператор* (22) *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $be^{\chi(b)+r-1}$, *где функция* $\chi(\,\cdot\,)$ *определена формулой* (5).

Согласно лемме 10 из теоремы 4 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть матрица* (20) *системы линейных дифференциальных уравнений* (8) *имеет вид* (12), *где* $A_1, \dots, A_s$ – *рациональные попарно коммутирующие матрицы. Обозначим через* b *наименьший общий знаменатель собственных значений матриц* $A_1, \dots, A_s$, *через* r *максимальную кратность этих собственных значений в минимальных* (*характеристических*) *многочленах данных рациональных матриц. Тогда система* (8) *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $be^{\chi(b)+r-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае рациональных, но не коммутирующих попарно матриц $A_1, \dots, A_s$ вопрос о вычислении постоянной, с которой происходит сокращение факториалов для дифференциального оператора (22), остается открытым. Чтобы получить обобщение тождеств (16) для оператора

$$D = \frac{d}{dz} + \frac{A_1}{z-\gamma_1} + \dots + \frac{A_s}{z-\gamma_s} \tag{25}$$

определим матрицы $\langle A_1, \dots, A_s\rangle_{\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_s)$, по индукции, полагая

$$\begin{aligned}
&\langle A_1, A_2, \dots, A_s\rangle_{n_1,n_2,\dots,n_s} \\
&\quad= \begin{cases}
0, & \text{если } \boldsymbol{n} \notin (\mathbb{Z}_+)^s, \\
E, & \text{если } \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}, \\
(A_1 - n_1 + 1)\langle A_1, A_2, \dots, A_s\rangle_{n_1-1,n_2,\dots,n_s} & \\
\quad + (A_2 - n_2 + 1)\langle A_1, A_2, \dots, A_s\rangle_{n_1,n_2-1,\dots,n_s} + \cdots & \\
\quad + (A_s - n_s + 1)\langle A_1, A_2, \dots, A_s\rangle_{n_1,n_2,\dots,n_s-1}, & \text{если } \boldsymbol{n} \in (\mathbb{Z}_+)^s.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Если матрицы $A_1, \dots, A_s$ попарно коммутируют, то

$$\begin{gathered}
\langle A_1, \dots, A_s\rangle_{n_1,\dots,n_s} = \frac{(n_1 + \dots + n_s)!}{n_1! \cdots n_s!} \cdot \langle A_1\rangle_{n_1} \cdots \langle A_s\rangle_{n_s}, \\
\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_s) \in (\mathbb{Z}_+)^s.
\end{gathered} \tag{26}$$

Индукцией по k несложно доказать тождества

$$\langle A_1 + \dots + A_s\rangle_k = \sum_{\substack{\boldsymbol{n} \in (\mathbb{Z}_+)^s \\ |\boldsymbol{n}| = k}} \langle A_1, \dots, A_s\rangle_{\boldsymbol{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $|\boldsymbol{n}| = n_1 + \cdots + n_s$, и

$$D^k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{n} \in (\mathbb{Z}_+)^s \\ |\boldsymbol{n}|=k-l}} \frac{\langle A_1, \dots, A_s \rangle_{\boldsymbol{n}}}{(z-\gamma_1)^{n_1} \cdots (z-\gamma_s)^{n_s}} \right) \frac{d^l}{dz^l}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots,$$

для дифференциального оператора (25). В частности,

$$D^k E = \sum_{\substack{\boldsymbol{n} \in (\mathbb{Z}_+)^s \\ |\boldsymbol{n}|=k}} \frac{\langle A_1, \dots, A_s \rangle_{\boldsymbol{n}}}{(z-\gamma_1)^{n_1} \cdots (z-\gamma_s)^{n_s}}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots. \tag{27}$$

6. Приложение к обобщенным гипергеометрическим функциям. Обобщенная гипергеометрическая функция

$$f(z) = F\left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_m \\ \beta_1 + 1, \dots, \beta_m + 1 \end{matrix} \,\middle|\, z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle -\alpha_1 \rangle_n \cdots \langle -\alpha_m \rangle_n}{\langle -\beta_1 - 1 \rangle_n \cdots \langle -\beta_m - 1 \rangle_n} z^n, \tag{28}$$
$$\beta_1, \dots, \beta_m \notin \{-1, -2, \dots\},$$

удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению [15; гл. 5, § 1, лемма 1 при $t = 1$]

$$\big((\delta + \beta_1) \cdots (\delta + \beta_m) - z(\delta + \alpha_1) \cdots (\delta + \alpha_m) \big) y = \beta_1 \cdots \beta_m, \qquad \delta = z \frac{d}{dz},$$

порядка m.

Для функций

$$f_1(z) = f(z), \quad f_2(z) = \delta f_1(z), \quad \dots, \quad f_m(z) = \delta f_{m-1}(z) \tag{29}$$

получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d}{dz} y_l = \frac{1}{z} y_{l+1}, \qquad l = 1, \dots, m-1, \\ \frac{d}{dz} y_m = \frac{\sigma_1(\boldsymbol{\beta}) - z\sigma_1(\boldsymbol{\alpha})}{z(z-1)} y_m + \frac{\sigma_2(\boldsymbol{\beta}) - z\sigma_2(\boldsymbol{\alpha})}{z(z-1)} y_{m-1} + \cdots \\ + \frac{\sigma_m(\boldsymbol{\beta}) - z\sigma_m(\boldsymbol{\alpha})}{z(z-1)} y_1 - \frac{\sigma_m(\boldsymbol{\beta})}{z(z-1)}, \end{gathered} \tag{30}$$

где $\sigma_l(\,\cdot\,)$, $l = 1, \dots, m$, – симметрические многочлены Виета степени l, т.е.

$$\begin{gathered} (z + \alpha_1)(z + \alpha_2) \cdots (z + \alpha_m) = z^m + \sigma_1(\boldsymbol{\alpha}) z^{m-1} + \cdots + \sigma_{m-1}(\boldsymbol{\alpha}) z + \sigma_m(\boldsymbol{\alpha}), \\ (z + \beta_1)(z + \beta_2) \cdots (z + \beta_m) = z^m + \sigma_1(\boldsymbol{\beta}) z^{m-1} + \cdots + \sigma_{m-1}(\boldsymbol{\beta}) z + \sigma_m(\boldsymbol{\beta}). \end{gathered} \tag{31}$$

С учетом

$$\frac{\sigma_l(\boldsymbol\beta)-z\sigma_l(\boldsymbol\alpha)}{z(z-1)}=\frac{\sigma_l(\boldsymbol\beta)-\sigma_l(\boldsymbol\alpha)}{z-1}-\frac{\sigma_l(\boldsymbol\beta)}{z}, \qquad l=1,\dots,m,$$
$$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$$

перепишем систему дифференциальных уравнений (30) в матричном виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_{m-1}\\ y_m\end{pmatrix}&=\frac{1}{z}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dots\\ 0\\ \sigma_m(\boldsymbol\beta)\end{pmatrix}+\frac{1}{z-1}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dots\\ 0\\ -\sigma_m(\boldsymbol\beta)\end{pmatrix}\\ &+\frac{1}{z}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\\ -\sigma_m(\boldsymbol\beta) & -\sigma_{m-1}(\boldsymbol\beta) & \dots & -\sigma_2(\boldsymbol\beta) & -\sigma_1(\boldsymbol\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_{m-1}\\ y_m\end{pmatrix}\\ &+\frac{1}{z-1}\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & 0 & 0\\ \sigma_m(\boldsymbol\beta)-\sigma_m(\boldsymbol\alpha) & \dots & \sigma_2(\boldsymbol\beta)-\sigma_2(\boldsymbol\alpha) & \sigma_1(\boldsymbol\beta)-\sigma_1(\boldsymbol\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_{m-1}\\ y_m\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{32}$$

Теорема 5 к системе (32) неприменима, так как отвечающие регулярным особенностям $z=0$ и $z=1$ матрицы не коммутируют. Но мы и не ставим цели *сократить факториалы* для системы (32). Точное вычисление постоянной, с которой происходит сокращение факториалов для гипергеометрического дифференциального уравнения, после работы [10] стало неактуальным: использование приближений Паде второго рода (вместо первого) в качестве приближающих функциональных форм дает возможность сокращать факториалы без дополнительных усилий (см. [10] и [16]). Наша цель – посчитать постоянную, с которой происходит сокращение факториалов для системы линейных дифференциальных уравнений, сопряженной к однородной части системы (30); это даст возможность воспользоваться основной теоремой из [17] и получить оценки меры иррациональности значений гипергеометрической функции (28) (без последовательных производных) в рациональных точках.

Сопряженная система для общего случая (8) получается транспонированием и сменой знака матрицы $\bigl(Q_{lj}(z)\bigr)_{l,j=1,\dots,m}$; в нашем случае сопряженная система имеет вид

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_{m-1}\\ y_m\end{pmatrix}=\left(\frac{1}{z}A_1+\frac{1}{z-1}A_2\right)\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \dots\\ y_{m-1}\\ y_m\end{pmatrix}, \tag{33}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_m(\boldsymbol{\beta}) \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \sigma_{m-1}(\boldsymbol{\beta}) \\ 0 & -1 & \dots & 0 & \sigma_{m-2}(\boldsymbol{\beta}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \sigma_2(\boldsymbol{\beta}) \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \sigma_1(\boldsymbol{\beta}) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \sigma_m(\boldsymbol{\alpha}) - \sigma_m(\boldsymbol{\beta}) \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{m-1}(\boldsymbol{\alpha}) - \sigma_{m-1}(\boldsymbol{\beta}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_2(\boldsymbol{\alpha}) - \sigma_2(\boldsymbol{\beta}) \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_1(\boldsymbol{\alpha}) - \sigma_1(\boldsymbol{\beta}) \end{pmatrix}.$$

Первые $m-1$ столбцов матрицы A_2 нулевые, т.е. ранг этой матрицы равен $m-1$. Следовательно, $m-1$ собственных значений $\lambda = 0$ матрицы A_2 входят с кратностью 1 в минимальный многочлен. Оставшееся собственное значение совпадает со следом матрицы A_2 и равно $\gamma = \sigma_1(\boldsymbol{\alpha}) - \sigma_1(\boldsymbol{\beta}) = \alpha_1 + \dots + \alpha_m - \beta_1 - \dots - \beta_m$.

Матрица A_1 с точностью до знака является *клеткой Фробениуса* (см. [13; гл. 6, §6]); ее характеристический многочлен равен

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \lambda E) &= (-1)^m(\lambda^m - \sigma_1\lambda^{m-1} + \sigma_2\lambda^{m-2} + \dots + (-1)^m\sigma_m) \\ &= (-1)^m(\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)\cdots(\lambda - \beta_m). \end{aligned}$$

Поэтому собственные значения матрицы A_1 равны $\beta_1, \dots, \beta_m$.

Лемма 11. *Пусть параметры $\beta_1, \dots, \beta_m$ попарно различны и $\gamma \neq 0$, b – наименьший общий знаменатель чисел $\gamma, \beta_1, \dots, \beta_m$. Тогда система* (33) *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $be^{\chi(b)+2}$, где функция $\chi(\,\cdot\,)$ определяется формулой* (5).

Доказательство. Собственному значению β_j матрицы A_1 отвечает собственный вектор

$$\begin{pmatrix} t_{1j} \\ t_{2j} \\ \dots \\ t_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{m-1}(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_m) \\ \sigma_{m-2}(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_m) \\ \dots \\ \sigma_1(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_m) \\ \sigma_0(\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_m) \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \dots, m,$$

где $\sigma_l(\,\cdot\,)$ – коэффициент при z^{m-1-l} в многочлене

$$(z+\beta_1)\cdots(z+\beta_{j-1})(z+\beta_{j+1})\cdots(z+\beta_m).$$

Для матрицы перехода $T = (t_{lj})_{l,j=1,\dots,m}$ положим $\widetilde{T} = T^{-1} = (\tilde{t}_{lj})_{l,j=1,\dots,m}$. Тогда

$$\tilde{t}_{lj} = (-1)^{m+j}\beta_l^{j-1} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^{m} \frac{1}{\beta_l - \beta_k}, \qquad l, j = 1, \dots, m,$$

матрица $\widetilde{A}_1 = T^{-1}A_1T$ диагональная, $\widetilde{A}_1 = \operatorname{diag}(\beta_1,\dots,\beta_m)$, а матрица $\widetilde{A}_2 = T^{-1}A_2T$ имеет вид

$$\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix} (1\ \dots\ 1), \qquad a_j = -(\beta_j - \alpha_j)\cdot \prod_{\substack{k=1\\ k\ne j}}^{m} \frac{\beta_j-\alpha_k}{\beta_j-\beta_k}, \quad j=1,\dots,m.$$

Запишем матрицы $Q^{[n]}(z)$, $n=0,1,2,\dots$, из определения 3 для системы дифференциальных уравнений (33). Согласно (23) и (27) имеем

$$\begin{aligned} {}^tQ^{[n]}(z) &= \left(\frac{d}{dz} + \frac{1}{z}{}^tA_1 + \frac{1}{z-1}{}^tA_2\right)^n E \\ &= \sum_{\substack{n_1,n_2\geqslant 0\\ n_1+n_2=n}} \frac{\langle {}^tA_1, {}^tA_2\rangle_{n_1,n_2}}{z^{n_1}(z-1)^{n_2}}, \qquad n=0,1,2,\dots, \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\langle {}^tA_1, {}^tA_2\rangle_{n_1,n_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } n_1<0 \text{ или } n_2<0,\\ E, & \text{если } n_1=n_2=0,\\ ({}^tA_1-n_1+1)\langle {}^tA_1, {}^tA_2\rangle_{n_1-1,n_2} & \\ \quad + ({}^tA_2-n_2+1)\langle {}^tA_1, {}^tA_2\rangle_{n_1,n_2-1} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(см. замечание к теореме 5). Отметим также, что разложения в сумму простейших

$$\frac{1}{z^{n_1+1}(1-z)^{n_2+1}} = \sum_{k=0}^{n_1}\binom{n_1+n_2-k}{n_2}\frac{1}{z^{k+1}} + \sum_{k=0}^{n_2}\binom{n_1+n_2-k}{n_1}\frac{1}{(1-z)^{k+1}}, \qquad n_1,n_2=0,1,2,\dots, \tag{35}$$

и перегруппировка слагаемых в тождествах (34) не позволяют вычислить постоянную, с которой происходит сокращение факториалов для системы (33), ввиду некоммутативности матриц ${}^tA_1, {}^tA_2$.

Полагая

$$B_1 = {}^t\widetilde{A}_1 = \operatorname{diag}(\beta_1,\dots,\beta_m), \qquad B_2 = {}^t\widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1\\ \dots\\ 1\end{pmatrix}(a_1\ \dots\ a_m),$$

из (34) получаем

$${}^t\big(T^{-1}Q^{[n]}(z)T\big) = \sum_{\substack{n_1,n_2\geqslant 0\\ n_1+n_2=n}} \frac{\langle B_1,B_2\rangle_{n_1,n_2}}{z^{n_1}(z-1)^{n_2}}, \qquad n=0,1,2,\dots. \tag{36}$$

Зафиксируем теперь пару целых неотрицательных n_1,n_2. В случае $n_2=0$ знаменатель матрицы

$$\frac{\langle B_1,B_2\rangle_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)!} = \frac{\langle B_1\rangle_{n_1}}{n_1!}$$

согласно лемме 9 делит $b_0^k \prod_{p|b_0} p^{\tau_p(k)}$ для любого $k \geqslant n_1 = n_1 + n_2$; здесь $b_0 = \operatorname{den}(\beta_1, \dots, \beta_m)$.

Пусть, далее, $n_2 > 0$. Согласно рекуррентным соотношениям для $\langle B_1, B_2\rangle_{n_1,n_2}$ (и формуле (26) в случае, когда матрицы коммутируют) заключаем, что матрица $\langle B_1, B_2\rangle_{n_1,n_2}$ представляет собой сумму $N = (n_1+n_2)!/(n_1!\,n_2!)$ слагаемых, каждое из которых с точностью до порядка множителей совпадает с $\langle B_1\rangle_{n_1}\langle B_2\rangle_{n_2}$:

$$\langle B_1, B_2\rangle_{n_1,n_2} = \sum_{r=1}^{N} B^{(r)}. \tag{37}$$

Сразу отметим, что если хотя бы одна из квадратных матриц X_1 и X_2 диагональна, то главные диагонали матриц X_1X_2 и X_2X_1 совпадают. Поскольку матрицы $B_1 - lE$, $l = 0, 1, \dots, n_1 - 1$, диагональны, главная диагональ каждого слагаемого в (37) совпадает с главной диагональю матрицы $\langle B_1\rangle_{n_1}\langle B_2\rangle_{n_2}$. Матрица B_2 удовлетворяет соотношению

$$B_2^2 = (a_1 + \dots + a_m)B_2 = \operatorname{Tr} B_2 \cdot B_2 = \gamma B_2,$$

откуда $\langle B_2\rangle_{n_2} = \langle \gamma - 1\rangle_{n_2-1} B_2$ и

$$\langle B_1\rangle_{n_1}\langle B_2\rangle_{n_2} = \langle \gamma - 1\rangle_{n_2-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1\langle\beta_1\rangle_{n_1} & a_2\langle\beta_1\rangle_{n_1} & \dots & a_m\langle\beta_1\rangle_{n_1} \\ a_1\langle\beta_2\rangle_{n_1} & a_2\langle\beta_2\rangle_{n_1} & \dots & a_m\langle\beta_2\rangle_{n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1\langle\beta_m\rangle_{n_1} & a_2\langle\beta_m\rangle_{n_1} & \dots & a_m\langle\beta_m\rangle_{n_1} \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Рассмотрим любое из слагаемых $B = B^{(r)}$, $1 \leqslant r \leqslant N$, входящих в (37). Множитель $B_1 - jE$ в этом слагаемом появляется левее (т.е. позднее) множителя $B_1 - lE$ тогда и только тогда, когда $j > l$; то же самое можно сказать о порядке появления в B множителей $B_2 - jE$ и $B_2 - lE$. Выделяя первое (и единственное) появление множителя B_2 в слагаемом B, находим

$$\begin{aligned} B = X \cdot B_2 \cdot \langle B_1\rangle_s = X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} (a_1 \ \dots \ a_m) \cdot \operatorname{diag}\bigl(\langle\beta_1\rangle_s, \dots, \langle\beta_m\rangle_s\bigr) \\ = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \bigl(a_1\langle\beta_1\rangle_s \ a_2\langle\beta_2\rangle_s \ \dots \ a_m\langle\beta_m\rangle_s\bigr) \\ = \begin{pmatrix} a_1\langle\beta_1\rangle_s x_1 & a_2\langle\beta_2\rangle_s x_1 & \dots & a_m\langle\beta_m\rangle_s x_1 \\ a_1\langle\beta_1\rangle_s x_2 & a_2\langle\beta_2\rangle_s x_2 & \dots & a_m\langle\beta_m\rangle_s x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1\langle\beta_1\rangle_s x_m & a_2\langle\beta_2\rangle_s x_m & \dots & a_m\langle\beta_m\rangle_s x_m \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{39}$$

Сравнение главных диагоналей матриц (38) и (39) дает

$$x_l = \langle \gamma - 1\rangle_{n_2-1} \cdot \langle \beta_l - s\rangle_{n_1-s}, \qquad l = 1, \dots, m.$$

Таким образом, каждое слагаемое, входящее в (37), имеет вид

$$B = \langle \gamma - 1 \rangle_{n_2 - 1} \cdot \Big(a_j \langle \beta_j \rangle_s \langle \beta_l - s \rangle_{n_1 - s} \Big)_{l,j=1,\dots,m}$$

для некоторого s, $0 \leqslant s < n_1$. Полагая $a = \operatorname{den}(a_1, \dots, a_m)$, $b = \operatorname{den}(\gamma, \beta_1, \dots, \beta_m)$, g_k – наименьшее общее кратное чисел

$$\frac{k!}{k_0!\,k_1!\,k_2!}, \qquad k_0, k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad k_0 + k_1 + k_2 = k, \tag{40}$$

и учитывая условие $\gamma \neq 0$, согласно лемме 9 получаем, что наименьший общий знаменатель элементов матрицы

$$\frac{\gamma B}{(n_1 + n_2)!} = \frac{s!\,(n_1 - s)!\,n_2!}{(n_1 + n_2)!} \cdot \frac{\gamma B}{s!\,(n_1 - s)!\,n_2!}$$

делит

$$g_k \cdot a b^k \prod_{p \mid b} p^{\tau_p(k)} \tag{41}$$

для любого $k \geqslant n_1 + n_2$; ввиду произвольности выбора слагаемого B в сумме (37) заключаем, что наименьший общий знаменатель элементов матрицы

$$\frac{\gamma \langle B_1, B_2 \rangle_{n_1, n_2}}{(n_1 + n_2)!} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\gamma B^{(r)}}{(n_1 + n_2)!}$$

также делит число (41) для любого $k \geqslant n_1 + n_2$.

Степень вхождения простого p в каждое число (40) согласно (4) равна

$$\tau_p(k) - \tau_p(k_0) - \tau_p(k_1) - \tau_p(k_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{k}{p^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k_0}{p^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k_1}{p^m} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k_2}{p^m} \right\rfloor \right), \tag{42}$$
$$k_0, k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad k_0 + k_1 + k_2 = k.$$

Суммирование в (42) происходит только по $m \leqslant \lfloor \log k / \log p \rfloor$; кроме того,

$$\lfloor \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 \rfloor - \lfloor \xi_1 \rfloor - \lfloor \xi_2 \rfloor - \lfloor \xi_3 \rfloor \leqslant 2, \qquad \xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, для всех простых $p \leqslant k$ выполнено

$$\tau_p(k) - \tau_p(k_0) - \tau_p(k_1) - \tau_p(k_2) \leqslant 2 \left\lfloor \frac{\log k}{\log p} \right\rfloor \leqslant 2 \frac{\log k}{\log p},$$
$$k_0, k_1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad k_0 + k_1 + k_2 = k.$$

Эти неравенства дают оценку

$$g_k \leqslant \prod_{p \leqslant k} p^{2 \log k / \log p} = e^{2\pi(k) \log k},$$

где $\pi(k)$ – количество простых, не превосходящих k, откуда

$$\varlimsup_{k \to \infty} g_k^{1/k} \leqslant e^2. \tag{43}$$

С учетом полученного предельного соотношения, тождеств (36) и леммы 5 мы получаем, что система однородных дифференциальных уравнений (33) удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $be^{\chi(b)+2}$. Лемма доказана.

Замечание 1. Повторяя приведенные рассуждения в случае $\gamma = 0$, для любого слагаемого в (37) получаем

$$B = (-1)^{n_2-1}(n_2-1)! \cdot \Big(a_j\langle\beta_j\rangle_s\langle\beta_l - s\rangle_{n_1-s}\Big)_{l,j=1,\dots,m}$$

с некоторым s, $0 \leqslant s < n_1$, откуда наименьший общий знаменатель элементов матрицы

$$\frac{\langle B_1, B_2\rangle_{n_1,n_2}}{(n_1+n_2)!}$$

для любого $k \geqslant n_1 + n_2$ делит

$$d_k g_k \cdot ab^k \prod_{p\mid b} p^{\tau_p(k)},$$

где d_k – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, k$. С учетом предельных соотношений (18) и (43) сокращение факториалов в этом случае происходит с постоянной $be^{\chi(b)+3}$.

Замечание 2. Доказательство леммы 11 годится для подсчета (той же самой) постоянной, с которой происходит сокращение факториалов у исходной неоднородной системы (32) в случае попарно различных параметров $\beta_1, \dots, \beta_m$.

Следующие утверждения относятся к арифметическим и алгебраическим свойствам функций (29).

Лемма 12. *Пусть b_1, b_2 – знаменатели чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$; b – наименьшее общее кратное чисел b_1, b_2. Обозначим через $\varphi_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, наименьший общий знаменатель рациональных чисел*

$$\frac{\langle -\alpha\rangle_n}{\langle -\beta\rangle_n}, \qquad n = 0, 1, \dots, k.$$

Тогда

$$\varlimsup_{k\to\infty} \varphi_k^{1/k} \leqslant \Phi = e^{\rho(b_2)}\frac{b_1}{b},$$

где

$$\rho(b) = \frac{b}{\varphi(b)} \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant b\\ (n,b)=1}} \frac{1}{n}, \quad \varphi(b) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant b\\ (n,b)=1}} 1, \qquad b \in \mathbb{N}. \tag{44}$$

Доказательство. Наименьшие общие знаменатели чисел

$$\langle -\alpha\rangle_n, \quad n = 0, 1, \dots, k, \qquad \langle -\beta\rangle_n, \quad n = 0, 1, \dots, k,$$

равны соответственно b_1^k и b_2^k. Наименьший общий знаменатель чисел

$$\frac{1}{\langle -\beta\rangle_n}, \qquad n = 0, 1, \dots, k,$$

равен наименьшему общему кратному d_k чисел

$$-a + b_2(n-1), \quad n = 1, \dots, k, \qquad a = b_2\beta \in \mathbb{Z}.$$

Согласно [17; лемма 3.2] справедлива оценка

$$\varlimsup_{k\to\infty} \frac{\log d_k}{k} \leqslant \rho(b_2),$$

где функция $\rho(\,\cdot\,)$ определяется равенством (44). Это доказывает лемму.

Лемма 13. *Пусть q_1, q_2 – произведения знаменателей чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно; b – наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2; $b_1, \dots, b_m$ – знаменатели чисел $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно. Тогда функция* (28) *принадлежит классу $\mathbf{G}(1, \Phi)$, где $\Phi = e^{\rho(b_1)+\dots+\rho(b_m)} q_1/b$.*

Доказательство. Оценка величины Φ вытекает из леммы 12. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\langle -\lambda\rangle_n}{n!}\right|^{1/n} = 1, \qquad \lambda \notin \{-1, -2, \dots\},$$

область сходимости ряда (28) – круг $|z| < 1$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Если $f(z) \in \mathbf{G}(C, \Phi)$, то $\delta f(z) \in \mathbf{G}(C, \Phi)$, где $\delta = z\frac{d}{dz}$.*

Доказательство. Это утверждение очевидно. Если ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

функции $f(z)$ сходится в круге $|z| < C$, то в этом же круге сходится ряд

$$\delta f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n z^n.$$

Если последовательность натуральных чисел $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ выбрана так, что

$$\varphi_k f_n \in \mathbb{Z}, \qquad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N},$$

то

$$\varphi_k n f_n \in \mathbb{Z}, \qquad n = 0, 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, $\delta f(z) \in \mathbf{G}(C, \Phi)$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть q_1, q_2 – произведения знаменателей чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно; b – наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2; $b_1, \dots, b_m$ – знаменатели чисел $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно. Тогда совокупность функций* (29) *принадлежит классу $\mathbf{G}(1, \Phi)$, где $\Phi = e^{\rho(b_1)+\dots+\rho(b_m)} q_1/b$.*

Лемма 15. *Вронскиан* (*определитель матрицы фундаментальной системы решений*) *$W(z)$ линейного однородного дифференциального уравнения*

$$\big((\delta+\beta_1)\cdots(\delta+\beta_m) - z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_m)\big)y = 0, \qquad \delta = z\frac{d}{dz}, \tag{45}$$

порядка m удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\big((\delta+\beta) - z(\delta+\alpha)\big)y = 0, \qquad \alpha = \sigma_1(\boldsymbol{\alpha}), \quad \beta = \sigma_1(\boldsymbol{\beta}), \tag{46}$$

и, следовательно, для рациональных α, β является алгебраической функцией:

$$W(z) = Cz^{-\beta}(1-z)^{\alpha-\beta}, \qquad C \in \mathbb{C}. \tag{47}$$

Доказательство. Вронскиан $W(z)$ дифференциального уравнения (45) совпадает с вронскианом системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}y_l = \frac{1}{z}y_{l+1}, \qquad l = 1, \dots, m-1,$$

$$\frac{d}{dz}y_m = \frac{\sigma_1(\boldsymbol{\beta}) - z\sigma_1(\boldsymbol{\alpha})}{z(z-1)}y_m + \frac{\sigma_2(\boldsymbol{\beta}) - z\sigma_2(\boldsymbol{\alpha})}{z(z-1)}y_{m-1} + \dots + \frac{\sigma_m(\boldsymbol{\beta}) - z\sigma_m(\boldsymbol{\alpha})}{z(z-1)}y_1. \tag{48}$$

Согласно теореме Лиувилля [18; гл. 3, § 27, п. 6] он удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dz}y = \operatorname{Tr} Q(z) \cdot y, \tag{49}$$

где $\operatorname{Tr} Q(z) = (\beta - z\alpha)/(z(z-1))$ – след матрицы системы (48). Уравнение (49) можно переписать в виде (46). Его решение (47) находится непосредственным интегрированием.

Сформулируем некоторые достаточные условия из [19] на параметры функции (28) для того, чтобы функции (29) были алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$:

1) *линейная неприводимость*: $\alpha_l - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ для всех $l, j = 1, \dots, m$;
2) *неприводимость Белого* [19; гл. 3, лемма 3.5.3]: для любой пары натуральных чисел $m_1, m_2, m_1 + m_2 = m$, не существует чисел $u, v \in \mathbb{Q}$ таких, что либо

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \sim \left(\frac{u}{m_1}, \frac{u+1}{m_1}, \dots, \frac{u+m_1-1}{m_1}, \frac{v}{m_2}, \frac{v+1}{m_2}, \dots, \frac{v+m_2-1}{m_2}\right),$$
$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \sim \left(\frac{u+v}{m}, \frac{u+v+1}{m}, \dots, \frac{u+v+m-1}{m}\right),$$

либо

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \sim \left(\frac{u+v}{m}, \frac{u+v+1}{m}, \dots, \frac{u+v+m-1}{m}\right),$$
$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \sim \left(\frac{u}{m_1}, \frac{u+1}{m_1}, \dots, \frac{u+m_1-1}{m_1}, \frac{v}{m_2}, \frac{v+1}{m_2}, \dots, \frac{v+m_2-1}{m_2}\right);$$

3) *куммеровская неприводимость* [19; гл. 3, лемма 3.5.6]: не существует делителя $m_0 \geqslant 2$ числа m такого, что

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \sim \left(\alpha_1 + \frac{1}{m_0}, \alpha_2 + \frac{1}{m_0}, \dots, \alpha_m + \frac{1}{m_0}\right),$$
$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \sim \left(\beta_1 + \frac{1}{m_0}, \beta_2 + \frac{1}{m_0}, \dots, \beta_m + \frac{1}{m_0}\right);$$

4) $2\gamma \notin \mathbb{Z}$, где $\gamma = \alpha_1 + \dots + \alpha_m - \beta_1 - \dots - \beta_m$.

Запись $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \sim (\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ означает, что для некоторой перестановки $\sigma\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\}$ при всех $l = 1, \dots, m$ выполнено $\lambda_l - \lambda'_{\sigma(l)} \in \mathbb{Z}$.

Лемма 16. *Пусть числа* $\alpha_1,\dots,\alpha_m,\beta_1,\dots,\beta_m\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}$ *удовлетворяют условиям* 1)–4). *Тогда функции* (29), *где* $f(z)$ *определяется рядом* (28), *алгебраически независимы над полем* $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство. Согласно [19; гл. 3, теорема 3.5.8] в случае выполнения условий 1)–4) группа Галуа однородного линейного дифференциального уравнения (45) порядка m изоморфна группе $\mathrm{SL}_m(\mathbb{C})$. Это означает, что функции, входящие в фундаментальную систему решений уравнения (45), связаны единственным алгебраическим соотношением над полем $\mathbb{C}(z)$ – определитель этой фундаментальной системы решений является алгебраической функцией (лемма 15). Следовательно, если $g(z)$ – любое нетривиальное решение уравнения (45), то функции $g(z),\delta g(z),\dots,\delta^{m-1}g(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Из теоремы Нестеренко [20; теорема 2] (см. также [15; гл. 9, §6, теорема 2]) следует, что либо функции (29) алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, либо все они принадлежат $\mathbb{C}(z)$. Второй случай невозможен, поскольку функция (28) не является рациональной. Лемма доказана.

Теорема 6. *Пусть параметры* $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ *и* $\beta_1,\dots,\beta_m$ *функции* (28) *удовлетворяют условиям* 1)–4), $\beta_1,\dots,\beta_m$ *попарно различны*, ξ – *некоторое рациональное число*, $\xi=a_1/a_2\ne0$, $a_2=\operatorname{den}\xi\in\mathbb{N}$, *и* $\varepsilon<1/(m+2)$ – *произвольная положительная постоянная. Обозначим через* b_0 *наименьший общий знаменатель чисел* $\gamma,\beta_1,\dots,\beta_m$, *через* q_1 *и* q_2 *произведения знаменателей чисел* $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ *и* $\beta_1,\dots,\beta_m$ *соответственно, через* b *наименьшее общее кратное чисел* q_1,q_2, *через* H *максимум модуля коэффициентов многочленов* (31). *Положим* $\Phi=e^{\rho(\operatorname{den}\beta_1)+\dots+\rho(\operatorname{den}\beta_m)}q_1/b$,

$$C_0=\bigl(8b_0He^{\chi(b_0)+3}\bigr)^{\varepsilon(1-\log\varepsilon)}\Phi^{1+\varepsilon+(2-(m-1)\varepsilon)/(\varepsilon^m(m-1)!)},$$
$$\eta_0=\frac{(1+\varepsilon)\log a_2+\log C_0}{(1-(m+2)\varepsilon)\log a_2-\log C_0-(2-(m+1)\varepsilon)\log|a_1|},$$

где функции $\chi(\,\cdot\,)$ *и* $\rho(\,\cdot\,)$ *определяются формулами* (5) *и* (44) *соответственно. Если для заданного* ξ *выполнено условие* $\eta_0>0$, *иными словами, если*

$$a_2^{1-(m+2)\varepsilon}>C_0|a_1|^{2-(m+1)\varepsilon},$$

то число $f(\xi)$ *иррационально. Более того, для любого* $\eta>\eta_0$ *и произвольных* $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$, $q>q_*(\xi,\varepsilon,\eta)$, *справедлива оценка*

$$\left|f(\xi)-\frac{p}{q}\right|>q^{-1-\eta}.$$

Доказательство. Пусть $T_0(z)=bT(z)=bz(z-1)$ – общий знаменатель системы дифференциальных уравнений (32), которой удовлетворяют совокупность функций (29) из класса $\mathbf{G}(1,\Phi)$ (см. следствие из леммы 14); при этом

$$T_0(z)Q_{lj}(z)\in\mathbb{Z}[z],\qquad l=1,\dots,m,\quad j=0,\dots,m.$$

Тогда

$$\max\Big\{\deg T_0 - 1, \max_{l,j}\{\deg T_0 Q_{lj}\}\Big\} = 1, \qquad \max\Big\{H(T_0), \max_{l,j}\{H(T_0 Q_{lj})\}\Big\} = bH.$$

Из условия 4) следует, что $\gamma \neq 0$. Согласно лемме 11 сокращение факториалов для системы дифференциальных уравнений (33), сопряженной к однородной части системы (32), происходит с постоянной $\Psi = b_0 e^{\chi(b_0)+2}$ (с постоянной $\Psi = b_0 e^{\chi(b_0)+2}/b$, если в определении 3 многочлен $T(z)$ заменить на $T_0(z)$). Из леммы 16 следует алгебраическая независимость функций (29) над полем $\mathbb{C}(z)$. Применяя теперь основную теорему и неравенства (0.9) из работы [17], получаем требуемое утверждение.

7. Сокращение факториалов для линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} y_l = \sum_{j=1}^{m} A_{lj} y_j, \quad l = 1, \ldots, m, \qquad A_{lj} \in \mathbb{C}, \quad l, j = 1, \ldots, m, \tag{50}$$

и связанный с ней дифференциальный оператор

$$\mathscr{A} = [A] = \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} A_{lj} y_j \frac{\partial}{\partial y_l}, \qquad A = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & \ldots & A_{mm} \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Таким образом, с каждой матрицей A можно связать дифференциальный оператор $[A]$ согласно формуле (51). Отметим, прежде всего, свойство линейности

$$[\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2] = \lambda_1 [A_1] + \lambda_2 [A_2], \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C},$$

для любых квадратных матриц A_1 и A_2 размера m.

Для дифференциальных операторов $[A]$ и $[B]$ введем операции формального умножения

$$\begin{aligned}
[A] \cdot [B] &= \left(\sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} A_{lj} y_j \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} B_{ik} y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} A_{lj} y_j \right) \left(\sum_{k=1}^{m} B_{ik} y_k \right) \frac{\partial^2}{\partial y_l \, \partial y_i} = [B] \cdot [A]
\end{aligned}$$

и композиции

$$\begin{aligned}
[B] \circ [A] &= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} B_{ik} y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \circ \left(\sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} A_{lj} y_j \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} B_{ik} y_k \sum_{l=1}^{m} A_{li} \frac{\partial}{\partial y_l} + \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} B_{ik} y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} A_{lj} y_j \frac{\partial}{\partial y_l} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} A_{li} B_{ik} y_k \frac{\partial}{\partial y_l} + \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} A_{lj} y_j \right) \left(\sum_{k=1}^{m} B_{ik} y_k \right) \frac{\partial^2}{\partial y_l \, \partial y_i} \\
&= [AB] + [A] \cdot [B].
\end{aligned}$$

Помимо очевидной ассоциативности каждая из этих операций дистрибутивна относительно сложения. Коммутативность имеет место только для операции формального умножения, хотя порядок множителей в композиции

$$\mathscr{A}_n = ([A]-n+1)\circ([A]-n+2)\circ\dots\circ([A]-1)\circ[A] \tag{52}$$

не имеет значения. Отметим также “дифференциальное свойство” операции композиции:

$$[B]\circ([A_1]\cdot[A_2]) = ([B]\circ[A_1])\cdot[A_2]+[A_1]\cdot([B]\circ[A_2]).$$

Под $[A]^n$ будем понимать формальное произведение n операторов $[A]$.

Определение 4. Скажем, что *дифференциальный оператор* (51) (или *система уравнений* (50)), отвечающий матрице A, *удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной* $\Psi \geqslant 1$, если существует последовательность натуральных чисел $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что операторы

$$\psi_k\frac{1}{n!}\mathscr{A}_n, \qquad n=0,1,\dots,k, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{53}$$

переводят кольцо $\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_m]$ в себя и

$$\varlimsup_{k\to\infty}\psi_k^{1/k}\leqslant\Psi.$$

Лемма 17. *Для дифференциального оператора* (52) *выполнено тождество*

$$\frac{1}{n!}\mathscr{A}_n = \sum_{\substack{s_1,s_2,\dots,s_n\geqslant 0\\ s_1+2s_2+\dots+ns_n=n}} \frac{1}{s_1!}[A]^{s_1}\cdot\frac{1}{s_2!}\left[\frac{\langle A\rangle_2}{2!}\right]^{s_2}\cdots\frac{1}{s_n!}\left[\frac{\langle A\rangle_n}{n!}\right]^{s_n}, \tag{54}$$

где символ $\langle\,\cdot\,\rangle_n$ *определяется формулой* (1).

Доказательство проведем индукцией по n. База индукции $n=1$ очевидна. Пусть тождество (54) справедливо для заданного n. Положим

$$U(s_1,s_2,\dots,s_n) = \frac{1}{s_1!}[A]^{s_1}\cdot\frac{1}{s_2!}\left[\frac{\langle A\rangle_2}{2!}\right]^{s_2}\cdots\frac{1}{s_n!}\left[\frac{\langle A\rangle_n}{n!}\right]^{s_n} \tag{55}$$

и перепишем (54) в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\mathscr{A}_n &= \sum_{\substack{s_1,s_2,\dots,s_n\geqslant 0\\ s_1+2s_2+\dots+ns_n=n}} U(s_1,s_2,\dots,s_n)\\ &= \sum_{\substack{s_1,s_2,\dots,s_n,s_{n+1}\geqslant 0\\ s_1+2s_2+\dots+ns_n+(n+1)s_{n+1}=n}} U(s_1,s_2,\dots,s_n,s_{n+1})\end{aligned}$$

(здесь, очевидно, $s_{n+1}=0$). Поскольку

$$([A]-i)\circ[\langle A\rangle_i] = [A]\cdot[\langle A\rangle_i]+[\langle A\rangle_{i+1}],$$

имеем

$$
\begin{aligned}
&([A]-n)\circ U(s_1,s_2,\dots,s_n,s_{n+1})\\
&\quad=(s_1+1)U(s_1+1,s_2,\dots,s_n,s_{n+1})\\
&\qquad+2(s_2+1)U(s_1-1,s_2+1,s_3,\dots,s_n,s_{n+1})\\
&\qquad+3(s_3+1)U(s_1,s_2-1,s_3+1,s_4,\dots,s_n,s_{n+1})+\cdots\\
&\qquad+(n+1)(s_{n+1}+1)U(s_1,s_2,\dots,s_{n-1},s_n-1,s_{n+1}+1),\\
&s_1,s_2,\dots,s_n,s_{n+1}\geqslant 0,\qquad s_1+2s_2+\dots+ns_n+(n+1)s_{n+1}=n.
\end{aligned}
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+1)!}\mathscr{A}_{n+1}=\frac{[A]-n}{n+1}\circ\frac{1}{n!}\mathscr{A}_n\\
&\quad=\sum_{\substack{s_1,s_2,\dots,s_n,s_{n+1}\geqslant 0\\ s_1+2s_2+\dots+ns_n+(n+1)s_{n+1}=n}}\frac{s_1+1}{n+1}U(s_1+1,s_2,\dots,s_n,s_{n+1})\\
&\qquad+\frac{2(s_2+1)}{n+1}U(s_1-1,s_2+1,s_3,\dots,s_n,s_{n+1})+\cdots\\
&\qquad+\frac{(n+1)(s_{n+1}+1)}{n+1}U(s_1,s_2,\dots,s_{n-1},s_n-1,s_{n+1}+1)\\
&\quad=\sum_{\substack{s'_1,s'_2,\dots,s'_{n+1}\geqslant 0\\ s'_1+2s'_2+\dots+(n+1)s'_{n+1}=n+1}}\frac{s'_1+2s'_2+\dots+(n+1)s'_{n+1}}{n+1}U(s'_1,s'_2,\dots,s'_{n+1})\\
&\quad=\sum_{\substack{s'_1,s'_2,\dots,s'_{n+1}\geqslant 0\\ s'_1+2s'_2+\dots+(n+1)s'_{n+1}=n+1}}U(s'_1,s'_2,\dots,s'_{n+1}),
\end{aligned}
$$

что означает справедливость тождества (54) для $n+1$. Лемма доказана.

Лемма 18. *Если коэффициенты матрицы B целочисленны, то дифференциальный оператор $[B]^s/s!$ переводит кольцо $\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_m]$ в себя.*

Доказательство. Запишем дифференциальный оператор $[B]$ в виде

$$
[B]=\sum_{l=1}^m b_l\frac{\partial}{\partial y_l},\qquad b_l=\sum_{j=1}^m B_{lj}y_j\in\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_m].
$$

Тогда дифференциальный оператор

$$
\frac{1}{s!}[B]^s=\frac{1}{s!}\biggl(\sum_{l=1}^m b_l\frac{\partial}{\partial y_l}\biggr)^s=\sum_{\substack{l_1,\dots,l_m\geqslant 0\\ l_1+\dots+l_m=s}}\frac{b_1^{l_1}}{l_1!}\frac{\partial^{l_1}}{\partial y_1^{l_1}}\cdots\frac{b_m^{l_m}}{l_m!}\frac{\partial^{l_m}}{\partial y_m^{l_m}}
$$

переводит кольцо $\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_m]$ в себя, так как этим свойством обладают операторы

$$\frac{1}{l_j!}\frac{\partial^{l_j}}{\partial y_j^{l_j}}, \qquad j=1,\dots,m$$

(пример 1), и, кроме того,

$$b_j^{l_j}\in\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_m], \qquad j=1,\dots,m.$$

Лемма доказана.

Лемма 19. *Пусть $s_1,s_2,\dots,s_k$ – целые неотрицательные числа, p – простое число. Тогда*

$$s_1\tau_p(1)+s_2\tau_p(2)+\dots+s_k\tau_p(k)\leqslant\tau_p(s_1+2s_2+\dots+ks_k), \tag{56}$$

где $\tau_p(k)$ – степень вхождения числа p в $k!$ (см. (4)).

Доказательство. Отметим, прежде всего, что для действительных $\xi_1,\dots,\xi_k$ имеет место неравенство

$$\lfloor\xi_1\rfloor+\dots+\lfloor\xi_k\rfloor\leqslant\lfloor\xi_1+\dots+\xi_k\rfloor$$

(см. [2; отд. 8, гл. 1, § 1, задача 7]). Отсюда следует, что

$$s_1\lfloor\xi_1\rfloor+s_2\lfloor\xi_2\rfloor+\dots+s_k\lfloor\xi_k\rfloor\leqslant\lfloor s_1\xi_1+s_2\xi_2+\dots+s_k\xi_k\rfloor. \tag{57}$$

Последовательно подставляя в (57) значения

$$\xi_n=\frac{n}{p},\frac{n}{p^2},\frac{n}{p^3},\dots, \qquad n=1,\dots,k,$$

и суммируя полученные неравенства, согласно формуле (4) получаем (56). Лемма доказана.

Теорема 7. *Пусть дифференциальный оператор* (51) *отвечает рациональной матрице A, $\operatorname{den}A=b$, минимальный многочлен которой не имеет кратных корней; t_1,t_2 – наименьшие общие знаменатели элементов матриц T и T^{-1} соответственно, где T – матрица перехода от A к ее жордановой нормальной форме. Тогда оператор $[A]$ удовлетворяет условию сокращения факториалов с постоянной $t_1t_2be^{\chi(b)}$.*

Доказательство. Пусть k – произвольное натуральное число. Согласно лемме 9 матрицы

$$t_1t_2b^n\prod_{p|b}p^{\tau_p(n)}\cdot\frac{\langle A\rangle_n}{n!},\qquad n=0,1,\dots,k,$$

имеют целочисленные элементы. Поэтому из леммы 18 следует, что дифференциальный оператор (55) после умножения на

$$(t_1t_2)^nb^n\prod_{p|b}p^{s_1\tau_p(1)+s_2\tau_p(2)+\dots+s_n\tau_p(n)} \tag{58}$$

переводит кольцо $\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_m]$ в себя. Поскольку $s_1+2s_2+\dots+ns_n=n\leqslant k$, из леммы 19 следует, что число (58) делит

$$\psi_k=(t_1t_2)^kb^k\prod_{p|b}p^{\tau_p(k)}.$$

Применим тождество леммы 17. Для последовательности $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ операторы (53) переводят кольцо $\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_m]$ в себя. Оценка (18) завершает доказательство теоремы.

Замечание. С системой дифференциальных уравнений (8), (12) фуксовского типа связан дифференциальный оператор

$$D=\frac{d}{dz}+\frac{1}{z-\gamma_1}[A_1]+\dots+\frac{1}{z-\gamma_s}[A_s].$$

Это обстоятельство позволяет с помощью теоремы 7 дать другое доказательство теоремы 5 в случае попарно коммутирующих матриц $A_1,\dots,A_s$, минимальный многочлен каждой из которых не имеет кратных корней. При этом, однако, получается несколько худшая (по сравнению с теоремой 5) постоянная Ψ.

Список литературы

1. *Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б.* Введение в теорию чисел. М.: Изд-во МГУ, 1995.
2. *Полиа Г., Сегё Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. 3 изд. М.: Наука, 1978.
3. *André Y.* G-functions and geometry. Aspects Math. (A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn). V. E13. Braunschweig: Vieweg, 1989.
4. *Галочкин А. И.* О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E-функций // Матем. заметки. 1981. Т. 29. №1. С. 3–14.
5. *Галочкин А. И.* Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса // Матем. сб. 1974. Т. 95 (137). №3. С. 396–417.
6. *Siegel C. L.* Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Wiss. Phys.-Math. Kl. 1929–1930. №1. P. 1–70.
7. *Нурмагомедов М. С.* Об арифметических свойствах значений G-функций // Матем. сб. 1971. Т. 85 (127). №3. С. 339–365.
8. *Галочкин А. И.* Оценки снизу линейных форм от значений некоторых G-функций // Матем. заметки. 1975. Т. 18. №4. С. 541–552.
9. *Beukers F., Matalo-aho T., Väänänen K.* Remarks on the arithmetic properties of the values of hypergeometric functions // Acta Arith. 1983. V. 42. P. 281–289.

10. *Chudnovsky D. V., Chudnovsky G. V.* Applications of Padé approximations to Diophantine inequalities in values of G-functions // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1135. P. 9–51.
11. *Chudnovsky G. V.* Measures of irrationality, transcendence and algebraic independence. Recent progress // Number Theory Days, 1980 (Exeter, 1980). London Math. Soc. Lecture Notes Ser. V. 56. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. P. 11–82.
12. *Yoshida M.* Fuchsian differential equations. Aspects Math. (A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn). V. E11. Braunschweig: Vieweg, 1987.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1983.
14. *Матвеев Е. М.* Об арифметических свойствах значений обобщенных биномиальных многочленов // Матем. заметки. 1993. Т. 54. №4. С. 76–81.
15. *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
16. *Галочкин А. И.* Оценки снизу линейных форм от значений G-функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. №3. С. 23–29.
17. *Зудилин В. В.* О мере иррациональности значений G-функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. №1. С. 87–114.
18. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1971.
19. *Katz N. M.* Exponential sums and differential equations. Ann. of Math. Stud. V. 124. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1990.
20. *Нестеренко Ю. В.* Об алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям // Матем. заметки. 1969. Т. 5. №5. С. 587–598.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Поступила в редакцию
17.01.2000