УДК 511.3+517.5

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ЛИНЕЙНЫХ ФОРМАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПОСТОЯННУЮ КАТАЛАНА

ВАДИМ В. ЗУДИЛИН

Н. М. Коробову по случаю 85-летия

Аннотация. В совместной работе [5] Т. Ривоаля и автора для изучения арифметических свойств значений бета-функции Дирихле $\beta(s)$ при четных целых $s \geqslant 2$ была предложена некоторая гипергеометрическая конструкция. В случае постоянной Каталана $G = \beta(2)$ эта конструкция приводит к дополнительным приложениям ([5], раздел 9) таким, как рекурсия второго порядка типа Апери и группа перестановок в смысле Дж. Рина и К. Виолы [4]. В настоящей заметке мы доказываем ожидаемые целочисленные свойства для решений указанной рекурсии, а также предлагаем более простую рекурсию (также второго порядка и типа Апери) для G. Мы 'увеличиваем' группу перестановок из [5], раздел 9, показывая, что полная группа порядка 120 из [4] для $\zeta(2)$ может использоваться в изучении арифметических свойств постоянной Каталана. Подобные рассмотрения больше связаны с вычислительными аспектами и не позволяют доказать (предполагаемую) иррациональность G. В заключение мы приводим гипотезу, с помощью которой иррациональность чисел (таких, как постоянная Каталана) выводится из существования разностных уравнений (рекурсий) второго порядка определенного вида.

Недавно в нашей совместной с Т. Ривоалем статье [5] был получен ряд частичных результатов об иррациональности чисел

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}, \qquad s = 2, 4, 6, 8, \dots .$$

Мы не преуспели в доказательстве (ожидаемой) иррациональности постоянной Каталана $G = \beta(2)$. Однако общая аналитическая конструкция в [5] позволяет получить некоторую рекурсию второго порядка типа Апери для постоянной Каталана; это было проделано полуавтоматически с помощью алгоритма Цайльбергера созидательного телескопирования в [9] и полностью автоматически, благодаря методу Апери ускорения сходимости ('accélération de la convergence'), в [7].

Дата: 21 октября 2002 г.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11J72; Secondary 11J70, 30B50, 33C60.

Ключевые слова и фразы. Постоянная Каталана, обобщенный гипергеометрический ряд.

Нам бы хотелось выразить благодарность С. Фишлеру, Т. Ривоалю и Дж. Сондову за ряд конструктивных предложений, способствовавших улучшению текста статьи.

1. Гипергеометрические ряды

Напомним определение $\mathbb{Q}$-линейных форм от 1 и G, построенных в [5] и [9]:

$$\begin{aligned} r_n &:= u_n G - v_n \\ &= \frac{n!}{8}\sum_{t=0}^{\infty}(2t+n+1)\frac{\prod_{j=1}^{n}(t-j-1)\cdot\prod_{j=1}^{n}(t+j+n)}{\left(\prod_{j=0}^{n}(t+j+\frac12)\right)^3}(-1)^t \\ &= \frac{(-1)^n n!}{8}\,\frac{\Gamma(3n+2)\,\Gamma(n+\frac12)^3\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+\frac32)^3\Gamma(2n+1)} \\ &\quad\times {}_6F_5\left(\begin{matrix}3n+1,\ \frac32 n+\frac32,\ n+\frac12,\ n+\frac12,\ n+\frac12,\ n+1\\ \frac32 n+\frac12,\ 2n+\frac32,\ 2n+\frac32,\ 2n+\frac32,\ 2n+1\end{matrix}\,\middle|\,-1\right), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}|r_n|^{1/n} = \left|\frac{1-\sqrt5}{2}\right|^5, \qquad \lim_{n\to\infty}u_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty}v_n^{1/n} = \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^5.$$

Согласно теореме 1 из [9] имеют место включения

$$2^{4n+3}D_n u_n \in \mathbb{Z}, \qquad 2^{4n+3}D_{2n-1}^3 v_n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

где через D_N обозначается наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, N$, в то время как явные вычисления для $n = 1, 2, \dots, 1000$ показывают, что

$$2^{4n}u_n \in \mathbb{Z}, \qquad 2^{4n}D_{2n-1}^2 v_n \in \mathbb{Z}$$

(см. [9], раздел 4). Цель этого пункта – доказать (по крайней мере асимптотически при $n \to \infty$, т.е. достаточно для всех практических приложений) это экспериментальное наблюдение.

Теорема 1. *Для $n = 0, 1, 2, \dots$ выполнено*

$$2^{4n+o(n)}u_n \in \mathbb{Z}, \qquad 2^{4n+o(n)}D_{2n-1}^2 v_n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Замечание. Как следует из приводимого ниже доказательства, $o(n)$-величина в (3) имеет порядок $\log_2(2n)$.

Доказательство. Нам понадобится преобразование Уиппла [1], п. 4.4, формула (2),

$$\begin{aligned} &{}_6F_5\left(\begin{matrix}a,\ 1+\frac12 a,\ b,\ c,\ d,\ e\\ \frac12 a,\ 1+a-b,\ 1+a-c,\ 1+a-d,\ 1+a-e\end{matrix}\,\middle|\,-1\right) \\ &\qquad = \frac{\Gamma(1+a-d)\,\Gamma(1+a-e)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+a-d-e)}\cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix}1+a-b-c,\ d,\ e\\ 1+a-b,\ 1+a-c\end{matrix}\,\middle|\,1\right), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\mathrm{Re}(1+a-d-e)>0$, и преобразование Бейли [1], п. 6.4, формула (1),

$$
\begin{aligned}
&{}_4F_3\left(\begin{matrix} a, & b, & c, & d \\ & k-b, & k-c, & k-d \end{matrix}\,\middle|\, 1\right) \\
&\quad = \frac{\Gamma(k-b)\,\Gamma(k-c)\,\Gamma(k-d)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c)\,\Gamma(d)\,\Gamma(k-b-c)\,\Gamma(k-b-d)\,\Gamma(k-c-d)} \\
&\qquad \times \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(b+t)\,\Gamma(c+t)\,\Gamma(d+t)\,\Gamma(k-a+2t) \times\Gamma(k-b-c-d-t)\,\Gamma(-t)}{\Gamma(k-a+t)\,\Gamma(k+2t)}\,\mathrm{d}t, \qquad (5)
\end{aligned}
$$

где путь интегрирования параллелен мнимой оси за исключением отдельных участков, которые могут быть искривлены, так чтобы убывающая последовательность полюсов функций $\Gamma(k-b-c-d-t)$ и $\Gamma(-t)$ оставалась слева от контура, а возрастающая последовательность полюсов функций $\Gamma(b+t)$, $\Gamma(c+t)$, $\Gamma(d+t)$ и $\Gamma(k-a+2t)$ – справа от него.

Применяя преобразование (4) с $a=3n+1$, $b=c=d=n+\frac{1}{2}$, $e=n+1$, а затем преобразование (5) с $a=2n+2$, $b=n+\frac{1}{2}$, $c=d=n+1$, $k=3n+\frac{5}{2}$, получаем

$$
\begin{aligned}
r_n &= \frac{(-1)^n}{8}\,\frac{(2n+1)!}{n!^2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(n+1+t)^2\Gamma(n+\frac{1}{2}+2t)\,\Gamma(-t)^2}{\Gamma(3n+\frac{5}{2}+2t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^n}{8}\,\frac{(2n+1)!}{n!^2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(n+1+t)^2\Gamma(n+\frac{1}{2}+2t)}{\Gamma(1+t)^2\Gamma(3n+\frac{5}{2}+2t)}\left(\frac{\pi}{\sin \pi t}\right)^2\mathrm{d}t. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Осуществляя сдвиг $n+1+t\mapsto t$ и рассматривая вычеты в убывающей последовательности полюсов подынтегрального выражения в (6) (ср. с [3], лемма 2), мы приходим к формуле

$$
\begin{aligned}
r_n &= \frac{(-1)^{n+1}}{8}\,\frac{(2n+1)!}{n!^2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\Gamma(t)^2\Gamma(-n-\frac{3}{2}+2t)}{\Gamma(-n+t)^2\Gamma(n+\frac{1}{2}+2t)}\right)\bigg|_{t=\nu} \\
&= -\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}R_n(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=\nu}, \qquad (7)
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
R_n(t) &= \frac{(-1)^n}{8}\,\frac{(2n+1)!}{n!^2}\,\frac{\left(\prod_{j=1}^{n}(t-j)\right)^2}{\prod_{j=0}^{2n+1}(2t+j-n-\frac{3}{2})} \\
&= \sum_{l=0}^{n}\left(\frac{A_l}{t+l-\frac{n}{2}-\frac{3}{4}}+\frac{A'_l}{t+l-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}}\right). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Коэффициенты A_l и A'_l, $l=0,1,\dots,n$, в разложении функции $R_n(t)$ в сумму простейших дробей могут быть легко определены с помощью стандартной процедуры:

$$A_l=\frac{(-1)^n}{16}\,\frac{(2n+1)!}{(2l)!\,(2n-2l+1)!}\cdot\biggl(\frac{(t-1)(t-2)\cdots(t-n)}{n!}\bigg|_{t=-l+\frac n2+\frac34}\biggr)^2,$$

$$A_l'=\frac{(-1)^{n+1}}{16}\,\frac{(2n+1)!}{(2l+1)!\,(2n-2l)!}\cdot\biggl(\frac{(t-1)(t-2)\cdots(t-n)}{n!}\bigg|_{t=-l+\frac n2+\frac14}\biggr)^2,$$

$$l=0,1,\dots,n;$$

следовательно,

$$A_l\cdot 2^{6n+4}\in\mathbb Z\quad\text{и}\quad A_l'\cdot 2^{6n+4}\in\mathbb Z,\qquad l=0,1,\dots,n, \tag{9}$$

согласно известным свойствам целозначных многочленов $(t-1)(t-2)\cdots(t-n)/n!$. Используя указанное разложение, продолжим формулу (7) следующим образом:

$$\begin{aligned}r_n&=16\sum_{l=0}^n A_l\cdot\sum_{\mu=0}^\infty\frac{1}{(4\mu+\epsilon)^2}+16\sum_{l=0}^n A_l'\cdot\sum_{\mu=0}^\infty\frac{1}{(4\mu+\epsilon')^2}\\&\quad+16\sum_{l=0}^{m-1}A_l\sum_{\mu=1}^{m-l}\frac{1}{(4\mu-\epsilon)^2}+16\sum_{l=0}^{m'-1}A_l'\sum_{\mu=1}^{m'-l}\frac{1}{(4\mu-\epsilon')^2}\\&\quad-16\sum_{l=m+1}^{n}A_l\sum_{\mu=0}^{l-m-1}\frac{1}{(4\mu+\epsilon)^2}-16\sum_{l=m'+1}^{n}A_l'\sum_{\mu=0}^{l-m'-1}\frac{1}{(4\mu+\epsilon')^2},\end{aligned} \tag{10}$$

где $m=\lfloor (n+1)/2\rfloor$, $m'=\lfloor n/2\rfloor$; $\epsilon=1$ для четного n и $\epsilon=3$ для нечетного n; $\epsilon'=4-\epsilon$; $\lfloor\cdot\rfloor$ обозначает целую часть числа. (Так, например, если n четно, имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^\infty\sum_{l=0}^n\frac{A_l}{(\nu+l-\frac n2-\frac34)^2}\\&\quad=16\sum_{l=0}^{2m}A_l\sum_{\nu=1}^\infty\frac{1}{(4(\nu+l-m-1)+1)^2}=16\sum_{l=0}^{2m}A_l\sum_{\mu=l-m}^\infty\frac{1}{(4\mu+1)^2}\\&\quad=16\sum_{l=0}^{m-1}A_l\biggl(\sum_{\mu=l-m}^{-1}+\sum_{\mu=0}^{\infty}\biggr)\frac{1}{(4\mu+1)^2}+16A_m\sum_{\mu=0}^\infty\frac{1}{(4\mu+1)^2}\\&\qquad+16\sum_{l=m+1}^{2m}A_l\biggl(\sum_{\mu=0}^{\infty}-\sum_{\mu=0}^{l-m-1}\biggr)\frac{1}{(4\mu+1)^2}\\&\quad=16\sum_{l=0}^{2m}A_l\cdot\sum_{\mu=0}^\infty\frac{1}{(4\mu+1)^2}\\&\qquad+16\sum_{l=0}^{m-1}A_l\sum_{\mu=1}^{m-l}\frac{1}{(4\mu-1)^2}-16\sum_{l=m+1}^{2m}A_l\sum_{\mu=0}^{l-m-1}\frac{1}{(4\mu+1)^2},\end{aligned}$$

и аналогичные выкладки проводятся в трех оставшихся случаях.)

Согласно (8) выполнено $R_n(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$, откуда $\sum_{l=0}^{n} A_l + \sum_{l=0}^{n} A_l' = 0$. Это позволяет записать формулу (10) в требуемой форме $r_n = u_n G - v_n$, где

$$
\begin{aligned}
u_n &= 16(-1)^n \sum_{l=0}^{n} A_l = 16(-1)^{n+1} \sum_{l=0}^{n} A_l', \\
v_n &= -16 \sum_{l=0}^{m-1} A_l \sum_{\mu=1}^{m-l} \frac{1}{(4\mu-\epsilon)^2} - 16 \sum_{l=0}^{m'-1} A_l' \sum_{\mu=1}^{m'-l} \frac{1}{(4\mu-\epsilon')^2} \\
&\quad + 16 \sum_{l=m+1}^{n} A_l \sum_{\mu=0}^{l-m-1} \frac{1}{(4\mu+\epsilon)^2} + 16 \sum_{l=m'+1}^{n} A_l' \sum_{\mu=0}^{l-m'-1} \frac{1}{(4\mu+\epsilon')^2}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

(Снова созидательное телескопирование Цайльбергера, примененное к последовательностям u_n, v_n в (11), приводит к рекурсии типа Апери из [9] для старых последовательностей u_n, v_n в (1); этот факт доказывает совпадение двух представлений (1) и (11) чисел u_n и v_n в последовательности $r_n = u_n G - v_n$.) Формулы (11) для u_n, v_n и соотношения (9) означают, что $2^{6n} u_n, 2^{6n} D_{2n-1}^2 v_n \in \mathbb{Z}$. Наконец, с помощью (2) и того, что порядок 2 в D_N равен $\lfloor \log_2 N \rfloor$, мы получаем необходимые включения (3). Теорема доказана. □

2. Новая рекурсия типа Апери для постоянной Каталана

Рекурсия, полученная в [5], [9], позволяет быстро вычислять число G с высокой степенью точности. Интерпретация (7) решения к рекурсии из [5], [9] подсказала возможную модификацию в выборе параметров приведенной ранее конструкции. Именно, выбираем последовательность

$$
\begin{gathered}
\widetilde{r}_n = \widetilde{u}_n G - \widetilde{v}_n = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \left. \frac{\mathrm{d}\widetilde{R}_n(t)}{\mathrm{d}t} \right|_{t=\nu}, \\
\widetilde{R}_n(t) = \frac{(-1)^n}{2} \frac{(2n)!}{(n-1)!^2} \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(t-j) \cdot \prod_{j=1}^{n}(t-j)}{\prod_{j=0}^{2n}(2t+j-n-\frac{1}{2})}
\end{gathered}
\tag{12}
$$

и применяем к ней алгоритм Цайльбергера созидательного телескопирования с тем, чтобы получить следующий результат.

Теорема 2. *Числа $\widetilde{u}_n$ и $\widetilde{v}_n$ удовлетворяют рекурсии второго порядка*

$$
\begin{aligned}
&(2n)^2(2n+1)^2(20n^2-20n+3)\widetilde{u}_{n+1} - (3520n^6 - 2672n^4 + 196n^2 - 9)\widetilde{u}_n \\
&\quad - (2n)^2(2n+1)(2n-3)(20n^2+20n+3)\widetilde{u}_{n-1} = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

с начальными данными $\widetilde{u}_0 = 0$, $\widetilde{u}_1 = 6$ и $\widetilde{v}_0 = -1$, $\widetilde{v}_1 = 5$. Кроме того, справедливы предельные соотношения

$$
\lim_{n\to\infty} |\widetilde{u}_n G - \widetilde{v}_n|^{1/n} = \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right|^5, \qquad \lim_{n\to\infty} \widetilde{u}_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \widetilde{v}_n^{1/n} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^5
$$

и включения

$$2^{4n+o(n)}\widetilde{u}_n \in \mathbb{Z}, \quad 2^{4n+o(n)}D_{2n-1}^2\widetilde{v}_n \in \mathbb{Z}, \qquad n=0,1,2,\dots. \tag{14}$$

(Доказательство включений (14) проводится в полном соответствии со схемой, использованной в п. 1.)

Коэффициенты рекурсии (13) являются многочленами с целыми коэффициентами в терминах параметра $2n$; разностное уравнение (13) выглядит несколько проще рекурсии из [5], [9]. Так же, как и в теоремах 2, 3 из [9], ряд (12) приводит к непрерывной дроби

$$6G = 5 + \frac{516|}{|q(2)} + \frac{p(3)|}{|q(4)} + \frac{p(5)|}{|q(6)} + \dots + \frac{p(2n-1)|}{|q(2n)} + \dots,$$

$$p(n) = (5n^2-20n+18)(n-2)(n-1)^2n^2(n+1)^2(n+2)(5n^2+20n+18),$$

$$q(n) = 55n^6 - 167n^4 + 49n^2 - 9,$$

и кратному эйлерову интегралу

$$\widetilde{u}_nG - \widetilde{v}_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{x^{n-3/2}(1-x)^ny^{n-1}(1-y)^{n-1/2}}{(1-xy)^n}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$n=1,2,3,\dots.$$

3. Группа перестановок, связанная с постоянной Каталана

Зафиксируем параметры h_0,h_1,h_2,h_3,h_4, удовлетворяющие условиям

$$h_0,h_4\in\mathbb{Z}, \qquad h_1,h_2,h_3\in\mathbb{Z}+\tfrac12, \tag{15}$$

$$h_j>0 \quad \text{и} \quad 1+h_0-h_j-h_l>0 \qquad \text{для } j,l=1,2,3,4. \tag{16}$$

Как показано в [5], лемма 2, величина

$$\frac{\Gamma(1+h_0)\,\Gamma(h_3)\,\Gamma(h_4)\,\Gamma(1+h_0-h_1-h_3)\,\Gamma(1+h_0-h_2-h_4)\,\Gamma(1+h_0-h_3-h_4)}{\Gamma(1+h_0-h_1)\,\Gamma(1+h_0-h_2)\,\Gamma(1+h_0-h_3)\,\Gamma(1+h_0-h_4)}$$
$$\times\,{}_6F_5\left(\begin{matrix} h_0,\ 1+\frac12h_0, & h_1, & h_2, & h_3, & h_4 \\ \frac12h_0, & 1+h_0-h_1, & 1+h_0-h_2, & 1+h_0-h_3, & 1+h_0-h_4\end{matrix}\;\middle|\; -1\right) \tag{17}$$

принадлежит пространству $\mathbb{Q}G+\mathbb{Q}$. (На самом деле, в [5] ${}_6F_5$-ряд умножается на другое отношение гамма-множителей, однако с точностью до кратного из $\mathbb{Q}$ эти отношения совпадают.)

В терминах новых параметров

$$a_1 = 1+h_0-h_1-h_2, \quad a_2=h_3, \quad a_3=h_4,$$
$$b_2 = 1+h_0-h_1, \quad b_3 = 1+h_0-h_2$$

с помощью преобразования Уиппла (4) мы можем представить величину (17) следующим образом:

$$\frac{\Gamma(a_2)\,\Gamma(a_3)\,\Gamma(b_2-a_2)\,\Gamma(b_3-a_3)}{\Gamma(b_2)\,\Gamma(b_3)}\cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} a_1,\, a_2,\, a_3 \\ b_2,\, b_3 \end{matrix}\,\middle|\, 1\right)$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{x^{a_2-1}(1-x)^{b_2-a_2-1}y^{a_3-1}(1-y)^{b_3-a_3-1}}{(1-xy)^{a_0}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{18}$$

Наконец, выберем третье 10-элементное множество $\boldsymbol{c}$:

$$c_{00} = (b_2+b_3) - (a_1+a_2+a_3) - 1,$$
$$c_{jl} = \begin{cases} a_j - 1, & \text{если } l = 1, \\ b_l - a_j - 1, & \text{если } l = 2, 3, \end{cases} \qquad j, l = 1, 2, 3 \tag{19}$$

(значит, все $c_{jl} > -1$ согласно (16)), для того чтобы получить двойной интеграл

$$H(\boldsymbol{c}) = \int_0^1\int_0^1 \frac{x^{c_{21}}(1-x)^{c_{22}}y^{c_{31}}(1-y)^{c_{33}}}{(1-xy)^{c_{11}+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{20}$$

лежащий в $\mathbb{Q}G+\mathbb{Q}$. Удобно представить множество (19) в виде $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}', \boldsymbol{c}'')$, где наборы

$$\boldsymbol{c}' = (c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31}) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{c}'' = (c_{11}, c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32})$$

интерпретируются как циклически упорядоченные множества (т.е. c_{00} следует за c_{31} в $\boldsymbol{c}'$ и c_{11} следует за c_{32} в $\boldsymbol{c}''$). Очевидно, каждый элемент из $\boldsymbol{c}''$ может быть выражен в терминах элементов из $\boldsymbol{c}'$, и наоборот. Используя соотношения (15) и подытоживая сказанное выше, мы получаем следующее

Утверждение. *Пусть*

$$c_{00}, c_{21}, c_{33} \in \mathbb{Z}+\tfrac{1}{2} \quad \textit{и} \quad c_{22}, c_{31} \in \mathbb{Z} \tag{21}$$

для элементов в $\boldsymbol{c}'$ *(или, что то же самое,* $c_{13}, c_{12}, c_{32} \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ *и* $c_{11}, c_{23} \in \mathbb{Z}$ *для элементов в* $\boldsymbol{c}''$*) и пусть все элементы в* $\boldsymbol{c}$ *больше* -1*. Тогда* $H(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Q}G+\mathbb{Q}$.

Абстрагируясь от свойств (21) полуцелочисленности параметров $\boldsymbol{c}$, отметим, что ${}_3F_2$-представление (18) и эквивалентное ему ${}_6F_5$-представление (17) приводят к следующей групповой структуре (ср. с [6] или [1], пп. 3.5–3.6). Каждая перестановка параметров a_1, a_2, a_3 в (18) или параметров h_1, h_2, h_3, h_4 в (17) дает гипергеометрический ряд такого же типа (но с другим отношением гамма-множителей перед ним). Так, например, транспозиция $\mathfrak{h} = (h_1\ h_4)$ преобразует параметры $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ следующим образом:

$$\mathfrak{h}\colon \begin{pmatrix} a_1,\, a_2,\, a_3 \\ b_2,\, b_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_3-a_3, & a_2, & b_3-a_1 \\ & b_2+b_3-a_1-a_3, & b_3 \end{pmatrix}$$

– и отвечает преобразованию Томэ [1], п. 3.2. Таким образом, естественно возникает группа $\mathfrak{G}$, порожденная всеми такими перестановками. Преимуществом избыточного 10-элементного множества $\boldsymbol{c}$ является то, что $\mathfrak{G}$ действует на параметры $\boldsymbol{c}$ обычными перестановками. Как показал Ф. Уиппл [6], группа $\mathfrak{G}$ имеет порядок 120. Возможный выбор образующих группы $\mathfrak{G}$ включает транспозиции $\mathfrak{a}_1 = (a_1\ a_3)$, $\mathfrak{a}_2 = (a_2\ a_3)$, $\mathfrak{b} = (b_2\ b_3)$ и рассмотренную выше $\mathfrak{h} = (h_1\ h_4)$ (см. [8], раздел 6); действие этих перестановок на параметры $\boldsymbol{c}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= (c_{11}\ c_{31})(c_{12}\ c_{32})(c_{13}\ c_{33}), \qquad & \mathfrak{a}_2 &= (c_{21}\ c_{31})(c_{22}\ c_{32})(c_{23}\ c_{33}), \\ \mathfrak{b} &= (c_{12}\ c_{13})(c_{22}\ c_{23})(c_{32}\ c_{33}), \qquad & \mathfrak{h} &= (c_{00}\ c_{22})(c_{11}\ c_{33})(c_{13}\ c_{31}). \end{aligned} \tag{22}$$

Теорема 3. *Пусть величина $H(\boldsymbol{c})$ определяется как двойной интеграл в* (20)*, или как ${}_3F_2$-ряд в* (18)*, или как ${}_6F_5$-ряд в* (17)*. Пусть, далее, $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}_{10}$ есть группа перестановок множества $\boldsymbol{c}$, порожденная перестановками* (22)*. Предположим, что все элементы в $\boldsymbol{c}$ больше -1.*

Тогда

(i) *величина*

$$\frac{H(\boldsymbol{c})}{\Pi(\boldsymbol{c})}, \qquad \textit{где} \quad \Pi(\boldsymbol{c}) = \Gamma(c_{00})\,\Gamma(c_{21})\,\Gamma(c_{22})\,\Gamma(c_{33})\,\Gamma(c_{31}), \tag{23}$$

является $\mathfrak{G}$-инвариантной;

(ii) *если множество $\boldsymbol{c}$ $\mathfrak{G}$-эквивалентно множеству, удовлетворяющему условию* (21)*, то $H(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Q}G + \mathbb{Q}$.*

Доказательство. (i) Инвариантность величины (23) под действием группы $\mathfrak{G}$ достаточно проверить для перестановок из списка (22); это рутинная работа, использующая преобразование Уиппла для проверки $\mathfrak{h}$-инвариантности.

(ii) Чтобы вывести включение $H(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Q}G + \mathbb{Q}$ из части (i), остается показать, что $\Pi(\sigma\boldsymbol{c})/\Pi(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Q}$ для множества $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющего условию (21), и всех перестановок $\sigma \in \mathfrak{G}$ или, эквивалентно, для $\sigma \in \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}, \mathfrak{h}\}$ (под $\sigma\boldsymbol{c}$ мы понимаем действие перестановки $\sigma \in \mathfrak{G}$ на множество $\boldsymbol{c}$). Последнее утверждение следует из того, что гамма-множители в

$$\Pi(\boldsymbol{c}), \quad \Pi(\mathfrak{a}_1\boldsymbol{c}), \quad \Pi(\mathfrak{a}_2\boldsymbol{c}), \quad \Pi(\mathfrak{b}\boldsymbol{c}), \quad \Pi(\mathfrak{h}\boldsymbol{c})$$

имеют в точности по три параметра из $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ и по два параметра из $\mathbb{Z}$. □

Другое (не менее изящное) описание группы $\mathfrak{G}$ в терминах двойных интегралов (20) и их бирациональных преобразований можно найти в работе [4].

Согласно [4] в случае, когда все элементы $\boldsymbol{c}$ – неотрицательные целые числа, имеет место включение $H(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}$, где $\zeta(2) = \pi^2/6$. Более того, в этом случае $D_{m_1} D_{m_2} H(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Z}\zeta(2) + \mathbb{Z}$, где $m_1 \geqslant m_2$ являются двумя последовательно достижимыми максимумами множества $\boldsymbol{c}$. Последнее включение и

$\mathfrak{G}$-инвариантность величины $H(\boldsymbol{c})/\Pi(\boldsymbol{c})$ позволяют установить хорошую оценку для меры иррациональности числа $\zeta(2)$ (детали см. в [4]).

Теоремы 1–3 подсказывают похожее включение

$$2^{2M+o(M)} D_{m_1} D_{m_2} H(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Z}G + \mathbb{Z} \tag{24}$$

в случае, когда множество $\boldsymbol{c}$ $\mathfrak{G}$-эквивалентно множеству с условием (21); здесь M – сумма двух целочисленных параметров в $\boldsymbol{c}' = (c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31})$, а $m_1 \geqslant m_2$ – два последовательно достижимых максимума множества $\boldsymbol{c}$. К сожалению, включений (24) не достаточно для доказательства иррациональности постоянной Каталана даже с помощью мощного группового подхода, разработанного в [4] (см. также [8]).

4. Разностные уравнения и иррациональность

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} D_{2n-1}^{1/n} = e^2$$

согласно асимптотическому закону распределения простых чисел, теорема 1 (с равенством (1)) или теорема 2 не приводят к иррациональности постоянной Каталана. Существует ли связь между иррациональностью и разностными уравнениями типа Апери? Нам бы хотелось завершить эту заметку следующим наблюдением.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ удовлетворяет геометрическому условию[1], если наименьший общий знаменатель чисел $x_0, x_1, \ldots, x_n$ растет не быстрее геометрической прогрессии при $n \to \infty$.

Пусть для заданной рекурсии второго порядка

$$x_{n+1} + a(n)x_n + b(n)x_{n-1} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} a(n) = a_0 \in \mathbb{Q}, \quad \lim_{n\to\infty} b(n) = b_0 \in \mathbb{Q}, \tag{25}$$

корни λ_1 и λ_2 характеристического многочлена $\lambda^2 + a_0\lambda + b_0$ удовлетворяют неравенствам $0 < |\lambda_1| < |\lambda_2|$. Тогда теорема Перрона (см., например, [2], гл. V, раздел 5) гарантирует существование двух линейно независимых решений $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda_1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lambda_2. \tag{26}$$

Гипотеза. *В приведенных обозначениях пусть оба решения $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ рекурсии (25) рациональны и удовлетворяют геометрическому условию. Тогда λ_1 и λ_2 – рациональные числа.*

---

[1] Мы вынуждены заменить стандартный термин 'G-условие' фразой 'геометрическое условие', так как прописная буква G уже зарезервирована для постоянной Каталана.

Эта гипотеза превращается в тривиальное наблюдение, когда коэффициенты $a(n) = a_0$ и $b(n) = b_0$ рекурсии (25) постоянны; мы оставляем это читателю в качестве упражнения.

Чтобы показать, как иррациональность G следует из приведенной гипотезы, нам только остается заметить, что если G рационально, то решения $\{\widetilde{u}_n\}$ и $\{\widetilde{r}_n\} = \{\widetilde{u}_n G - \widetilde{v}_n\}$ рекурсии (13) также рациональны, удовлетворяют геометрическому условию и образуют базис Перрона, в то время как корни $(11 \pm 5\sqrt{5})/2 = \bigl((1 \pm \sqrt{5})/2\bigr)^5$ характеристического многочлена очевидно иррациональны.

Геометрическое условие не может быть удалено из предположений гипотезы[2]. Действительно, выбирая $\lambda = (11 + 5\sqrt{5})/2$ и $\lambda_1 = -1/\lambda$, $\lambda_2 = \lambda$, положим

$$x_n = \frac{(-1)^n}{\lfloor \lambda^n \rfloor} \in \mathbb{Q}, \quad y_n = \lfloor \lambda^n \rfloor \in \mathbb{Z}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{27}$$

Тогда $x_n \sim \lambda_1^n$ и $y_n \sim \lambda_2^n$ при $n \to \infty$, так что отношения (26) выполнены. Кроме того, последовательности (27) удовлетворяют рекурсии (25) с

$$\left.\begin{aligned} b(n) &= -\frac{\lfloor \lambda^{n-1} \rfloor}{\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor} \cdot \frac{\lfloor \lambda^n \rfloor^2 + \lfloor \lambda^{n+1} \rfloor^2}{\lfloor \lambda^{n-1} \rfloor^2 + \lfloor \lambda^n \rfloor^2}, \\ a(n) &= \frac{\lfloor \lambda^n \rfloor}{\lfloor \lambda^{n-1} \rfloor} \cdot b(n) + \frac{\lfloor \lambda^n \rfloor}{\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor}, \end{aligned}\right. \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Литература

[1] W. N. Bailey *Generalized hypergeometric series*, Cambridge Math. Tracts **32** (Cambridge University Press, Cambridge 1935); 2nd reprinted edition (Stechert-Hafner, New York 1964)

[2] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, 3-е изд. (Наука, Москва 1967)

[3] Ю. В. Нестеренко, Некоторые замечания о $\zeta(3)$, Матем. заметки **59,** no. 6, 865–880 (1996)

[4] G. Rhin, C. Viola, On a permutation group related to $\zeta(2)$, Acta Arith. **77,** no. 1, 23–56 (1996)

[5] T. Rivoal, W. Zudilin, Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant, Prépubl. de l'Institut de Math. de Jussieu, no. 315 (January 2002)

[6] F. J. W. Whipple, A group of generalized hypergeometric series: relations between 120 allied series of the type $F[a, b, c; d, e]$, Proc. London Math. Soc. (2) **23,** 104–114 (1925)

[7] D. Zeilberger, Computerized deconstruction, Adv. Appl. Math. (2002) (to appear)

[8] W. Zudilin, Arithmetic of linear forms involving odd zeta values, E-print `math.NT/0206176` (August 2001)

[9] W. Zudilin, Apéry-like difference equation for Catalan's constant, E-print `math.NT/0104249` (January 2002)

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Воробьёвы горы, ГСП-2, Москва 119992
URL: `http://wain.mi.ras.ru/`
E-mail address: `wadim@ips.ras.ru`

[2]Возможно, гипотеза остается верной после замены геометрического условия на условие $a(n), b(n) \in \mathbb{Q}(n)$; однако многие известные случаи (например, рекурсия, отвечающая непрерывной дроби Нестеренко для $\zeta(3)$ в [3], теорема 2) останутся вне сферы применения этой новой гипотезы.