О линейной независимости значений рядов Чакалова

К. Ваананен, В. В. Зудилин

В настоящей заметке исследуются арифметические свойства значений функции Чакалова $T_q(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}q^{-\nu(\nu+1)/2}z^{\nu}$, $|q|>1$. Одной из открытых проблем является доказательство линейной независимости значений $T_q(z)$ с различными q; единственный результат в этом направлении [1] имеет сильные ограничения. Мы отсылаем заинтересованного читателя к обзору [2] известных результатов о линейной и алгебраической независимости значений функции Чакалова и других q-рядов.

Теорема 1. *Пусть t_1 и t_2 – два различных положительных целых, а числа $q\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$ и $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ мультипликативно независимы*[1]. *Тогда числа 1, $T_{q^{t_1}}(\alpha)$ и $T_{q^{t_2}}(\alpha)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Отметим, что функция $f_t(z)=T_{q^t}(\alpha z^t)$, $t\in\mathbb{N}$, удовлетворяет функциональному уравнению $\alpha z^t f_t(z)=f_t(qz)-1$. Для доказательства теоремы 1 мы по существу используем метод из [3] применительно к функциям $g_i(z)=f_{t_i}(z^{m_i})$, $i=1,2$, $m_i\in\mathbb{N}$, удовлетворяющим $\alpha_i z^{s_i}g_i(z)=g_i(qz)-q_i(z)$, где $q_i(z)=\sum_{l=0}^{m_i-1}\alpha^l q^{t_i\{\binom{m_i}{2}-\binom{m_i-l}{2}\}}z^{t_im_il}$, $\alpha_i=\alpha^{m_i}q^{t_im_i(m_i-1)/2}$ и $s_i=t_im_i^2$. Масштабирование $z\mapsto z^{m_i}$ является новым и ключевым моментом нашей конструкции. Существует бесконечное число пар $(m_1,m_2)\in\mathbb{N}^2$, для которых

$$|s_1-s_2|=|t_1m_1^2-t_2m_2^2|\leqslant c_0 \tag{1}$$

с фиксированной постоянной $c_0>0$ (если $\tau=\sqrt{t_1/t_2}$ рационально, то мы даже можем выбрать $c_0=0$, в то время как в случае иррационального τ указанные пары возникают, например, из подходящих дробей непрерывной дроби для τ). После выбора пары (m_1,m_2), удовлетворяющей (1), занумеруем функции $g_1(z)$ и $g_2(z)$ таким образом, что $s_1\leqslant s_2\leqslant s_1+c_0$.

С помощью принципа Дирихле строятся совместные рациональные приближения к функциям $g_1(z)$ и $g_2(z)$.

Лемма 1. *Для заданных ε, $0<\varepsilon<1/2$, и положительного целого n существуют ненулевой многочлен $P(z)=\sum_{j=0}^{n}p_jz^j\in\mathbb{Z}[z]$ и многочлены $Q_i(z)\in\mathbb{Q}[z]$, $\deg Q_i\leqslant n$, $i=1,2$, такие, что выполняются следующие условия*:

(i) $|p_j|\leqslant|q|^{\lambda n^2/M+O(n)}$, *где* $\lambda=\lambda(\varepsilon)=(1-2\varepsilon)(3-2\varepsilon)^2/(8\varepsilon)$ *и* $M=2s_1$;

(ii) *после домножения на $q^{n^2/M+O(n)}$ коэффициенты многочленов $Q_i(z)$ становятся целыми*;

(iii) *если определить $R_i(z)=P(z)g_i(z)-Q_i(z)$, $i=1,2$, то $\operatorname{ord}_{z=0}R_i(z)\geqslant\frac32n-\varepsilon n$ и $|R_i(z)|\leqslant|q|^{\lambda n^2/M+O(n)}|z|^{\frac32n-\varepsilon n}$ при условии $|z|\ll1$.*

Применяя функциональное уравнение для $g_i(z)$, строим дальнейшие приближения на основе леммы 1. Именно, начиная с $R_{i0}(z)=P_0(z)g_i(z)-Q_{i0}(z)=P(z)g_i(z)-Q_i(z)$, $i=1,2$, определим для $k=1,2$ $R_{ik}(z)=\alpha_i^{-1}z^{s_2-s_i}R_{i,k-1}(qz)=P_k(z)g_i(z)-Q_{ik}(z)$, $i=1,2$. По аналогии с [1; лемма 2] в случае $s_1<s_2$ или с [3; лемма 3] в случае $s_1=s_2$ имеет место следующая лемма о необращении в нуль.

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070. Начало работы было положено во время пребывания второго автора на факультете математических наук Университета Оулу в декабре 2006 г. Автор благодарит сотрудников факультета за гостеприимство.

[1] Это означает, что единственный набор целых i, j, удовлетворяющих равенству $\alpha^iq^j=1$, тривиален: $i=j=0$.

Лемма 2. *Определитель*

$$\Delta(z) := \begin{vmatrix} P_0(z) & Q_{10}(z) & Q_{20}(z) \\ P_1(z) & Q_{11}(z) & Q_{21}(z) \\ P_2(z) & Q_{12}(z) & Q_{22}(z) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Сравнивая степень и порядок нуля многочлена $\Delta(z)$ в нуле, заключаем, что для любого $\rho \geqslant 0$ найдется целое ν такое, что $\rho n \leqslant \nu \leqslant \rho n + 2\varepsilon n + 3s_2$ и $\Delta(q^{-\nu}) \neq 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, что $\varepsilon < \min\{1/2, 1/(6c_0)\}$, и выберем пару $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$, удовлетворяющую (1) и неравенству $(1+\lambda)/M < (1-6c_0\varepsilon)(1-2\varepsilon)/(32c_0)$. Воспользуемся приведенной выше конструкцией с этой парой и с $\rho = (1-6c_0\varepsilon)/(4c_0)$. Для каждого n получаем линейные формы $r_{ik}(\nu) = \alpha_i^\nu q^{(s_2-s_i)\nu(\nu+1)/2} R_{ik}(q^{-\nu}) = p_k(\nu)g_i(1) - q_{ik}(\nu)$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$, причем рациональные коэффициенты $p_k(\nu)$ и $q_{ik}(\nu)$ после домножения на $D_\nu \leqslant |q|^{n^2/M + n\nu + O(n+\nu)}$ становятся целыми. Предполагая, что теорема 1 неверна, т.е. числа 1 и $g_i(1) = f_{t_i}(1) = T_{q^{t_i}}(\alpha)$, $i = 1, 2$, линейно зависимы над $\mathbb{Q}$, имеем линейное соотношение $L = h_0 + h_1 g_1(1) + h_2 g_2(1) = 0$ с некоторыми целыми h_0, h_1, h_2, не равными одновременно нулю. Тогда

$$0 = D_\nu p_k(\nu) L = D_\nu(h_0 p_k(\nu) + h_1 q_{1k}(\nu) + h_2 q_{2k}(\nu)) + D_\nu(h_1 r_{1k}(\nu) + h_2 r_{2k}(\nu)) \qquad (2)$$

и необращение в нуль определителя

$$\begin{vmatrix} p_0(\nu) & q_{10}(\nu) & q_{20}(\nu) \\ p_1(\nu) & q_{11}(\nu) & q_{21}(\nu) \\ p_2(\nu) & q_{12}(\nu) & q_{22}(\nu) \end{vmatrix} = (\alpha_1\alpha_2)^\nu q^{(2s_2-s_1)\nu(\nu+1)/2} \Delta(q^{-\nu})$$

влечет существование $k \in \{0, 1, 2\}$ такого, что слагаемое $D_\nu(h_0 p_k(\nu) + h_1 q_{1k}(\nu) + h_2 q_{2k}(\nu))$ в (2) отлично от нуля. С другой стороны, это число является целым, так что $D_\nu |h_1 r_{1k}(\nu) + h_2 r_{2k}(\nu)| \geqslant 1$ в соответствии с (2). Мы приходим к противоречию с тем, что $D_\nu(h_1 r_{1k}(\nu) + h_2 r_{2k}(\nu)) \to 0$ при $n \to \infty$ согласно лемме 1 и нашему выбору параметров. Тем самым теорема 1 доказана.

Теорема 1 остается верной при замене $\mathbb{Q}$ на произвольное мнимое квадратичное поле $\mathbb{I}$, а $\mathbb{Z}$ на кольцо $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ целых поля $\mathbb{I}$. Метод из [3] и небольшая модификация доказательства теоремы 1 приводит к следующему общему результату (ср. с [1]).

Теорема 2. *Пусть $q \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, $|q| > 1$. Предположим, что $t_1, \dots, t_l$ – различные положительные целые и ненулевое число $\alpha \in \mathbb{I}$ мультипликативно независимо с q. Тогда $l+1$ чисел 1 и $T_{q^{t_k}}(\alpha)$, $k = 1, \dots, l$, линейно независимы над $\mathbb{I}$. Кроме того, если q и $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ из $\mathbb{I} \setminus \{0\}$ мультипликативно независимы, то числа 1 и $T_{q^{t_k}}(\alpha_k)$, $k = 1, \dots, l$, линейно независимы над $\mathbb{I}$.*

В доказательстве этой теоремы условие (1) заменяется неравенством, вытекающим из теоремы Кронекера о совместных приближениях.

Подчеркнем, что ввиду количественного характера метода, применяемого в наших доказательствах, можно оценить снизу линейные формы с целыми коэффициентами от рассматриваемых чисел.

Список литературы

[1] M. Amou, K. Väänänen, *Monatsh. Math.*, **144**:1 (2005), 1–11. **[2]** P. Bundschuh, *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, **1219** (2001), 110–121. **[3]** K. Väänänen, *Math. Ann.*, **325**:1 (2003), 123–136.

К. Ваананен (K. Väänänen)
Department of Mathematical Sciences,
University of Oulu, Finland
E-mail: kvaanane@sun3.oulu.fi

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
18.01.2007

В. В. Зудилин (W. Zudilin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: wadim@mi.ras.ru