УДК 511.36

Об арифметических свойствах значений некоторых рядов

В. Г. Чирский

Для рядов $\sum_{h=0}^{\infty} f_h(z)_h$, $f_h \in \mathbb{Z}$, $|f_h| \leqslant \exp(c_0 h \ln n)$, $f_h = 0$, $r_n < h < s_n$, $0 = s_0 \leqslant r_1 \leqslant s_1 < \cdots$, $s_n > r_n(\ln r_n)^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, устанавливается критерий сходимости в поле $\mathbb{Q}_p$ к алгебраическим числам.

Библиография: 2 названия.

В работе рассматриваются ряды вида

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(z)_h, \tag{1}$$

где $(z)_0 = 1$, $(z)_h = z(z+1)\cdots(z+h-1)$, $h \geqslant 1$. Буква c с индексами обозначает положительные постоянные. Пусть

$$f_h \in \mathbb{Z}, \quad |f_h| \leqslant \exp(c_0 h \ln h), \quad h = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть p — любое простое число. Для любого целого числа z ряд (1) сходится в $\mathbb{Q}_p$.

В статье [1] были рассмотрены ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} (p_{i,k})^{-\gamma_{i,k}} (n_{i,k})!, \quad p_{i,k}, n_{i,k} \in \mathbb{N},$$

и указаны условия, при которых эти ряды сходятся во всех локальных полях, причем к алгебраически независимым элементам этих полей.

В этой работе с использованием методов из статьи [2] исследуется вопрос о том, при каких условиях значения ряда (1) в поле $\mathbb{Q}_p$ являются алгебраическими числами.

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда, грант MHS000.

Пусть заданы две последовательности целых чисел $\{s_n\}$ и $\{r_n\}$

$$0 = s_0 \leqslant r_1 < s_1 \leqslant r_2 < s_2 \leqslant \cdots \tag{2}$$

такие, что

$$f_h = 0, \quad r_n < h < s_n, \quad f_{r_n} \neq 0, \quad f_{s_n} \neq 0. \tag{3}$$

Рассмотрим многочлены

$$P_n(z) = \sum_{h=s_n}^{r_{n+1}} f_h (z)_h. \tag{4}$$

Тогда ряд (1) можно переписать в виде

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z). \tag{5}$$

Теорема. *Пусть ε — произвольное положительное число. Пусть последовательности чисел (2) удовлетворяют при $n > c_1$ условию*

$$s_n > r_n (\ln r_n)^{1+\varepsilon}. \tag{6}$$

Пусть p — любое простое число, z_0 — любое целое число. Тогда ряд $f(z_0)$ сходится в $\mathbb{Q}_p$ к алгебраическому числу тогда и только тогда, когда существует $c_2 \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > c_2$

$$P_n(z_0) = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Если условие (7) выполняется, то из равенства (5) следует, что $f(z_0) \in \mathbb{Z}$.

Пусть в поле $\mathbb{Q}_p$ имеет место равенство $f(z_0) = \beta$, где β — алгебраическое число. Обозначим $\beta = \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ — сопряженные с β числа. Пусть $c_3 \in \mathbb{N}$ таково, что все числа $c_3\beta_i$ — целые алгебраические. Рассмотрим многочлены

$$Q_{n,j}(z) = -\beta_j + \sum_{h=0}^{r_n} f_h (z)_h, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{8}$$

и

$$Q_n(z) = c_3^m \prod_{j=0}^{m-1} Q_{n,j}(z). \tag{9}$$

По построению $Q_n(z)$ является симметрической функцией от чисел $c_3\beta_0, \dots, c_3\beta_{m-1}$ и, следовательно, является многочленом от z с целыми рациональными коэффициентами. Имеет место неравенство

$$|Q_n(z_0)|_p \leqslant \exp\bigl(m(r_n + z_0)\ln(r_n + z_0) + c_0 r_n \ln r_n\bigr). \tag{10}$$

Если $Q_n(z_0) \neq 0$, то так как $Q_n(z_0) \in \mathbb{Z}$ и из (10) следует

$$|Q_n(z_0)|_p \geqslant \exp\bigl(-m(r_n + z_0)\ln(r_n + z_0) - c_0 \ln r_n\bigr). \tag{11}$$

С другой стороны, так как $f(z_0) = \beta_0$ из (1), (3) и (8) получаем

$$Q_{n,0}(z_0) = -\sum_{h=s_n}^{\infty} f_h (z_0)_h \in \mathbb{Q}_p$$

и

$$|Q_{n,0}(z_0)|_p \leqslant \exp\left(-s_n \frac{\ln p}{p-1}\right). \tag{12}$$

Из (9) и (12) следует, что

$$|Q_n(z_0)|_p \leqslant \exp\left(-s_n \frac{\ln p}{p-1} + c_4\right). \tag{13}$$

А из (11) и (13) получаем

$$-s_n \frac{\ln p}{p-1} + c_3 > -m(r_n + z_0)\ln(r_n + z_0) - c_0 r_n \ln r_n$$

или

$$s_n \frac{p-1}{\ln p}\bigl(m(r_n + z_0)\ln(r_n + z_0) + c_0 r_n \ln r_n - c_3\bigr).$$

Но при $n > c_4$ это противоречит условию (6). Следовательно, при $n > c_4$

$$Q_n(z_0) = 0.$$

Согласно (8) и (9) это означает, что для любого $n > c_4$ существует номер $j(n) \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ такой, что

$$\sum_{h=0}^{r_n} f_h (z_0)_h = \beta_{j(n)}. \tag{14}$$

Тогда из (3), (4) и (14) получаем при $n > c_4$

$$P_n(z_0) = \beta_{j(n+1)} - \beta_{j(n)}. \tag{15}$$

Далее, $f(z_0)$ — сходящийся ряд. Поэтому из (5) следует, что в $\mathbb{Q}_p$ величина $P_n(z_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Но так как все числа $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}$ различные, из (15) следует, что при $n > c_2$ выполняется равенство (7). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует, что значение ряда (1) в целой точке в поле $\mathbb{Q}_p$ может быть либо целым числом, либо трансцендентным элементом поля $\mathbb{Q}_p$.

Пусть задано бесконечное множество натуральных чисел

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < \cdots .$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z - x_1) \cdots (z - x_n)(z)_{s_n}.$$

Пусть последовательность s_n удовлетворяет неравенству

$$s_{n+1} > (s_n + n)\bigl(\ln(s_n + n)\bigr)^{1+\varepsilon}.$$

Пусть, кроме того, $s_n > x_n$. Преобразуем члены этого ряда:

$$(z - x_1) \cdots (z - x_n) = a_0 + a_1(z + s_n) + a_2(z + s_n)(z + s_n + 1) + \cdots \\ + (z + s_n)(z + s_n + n - 1).$$

В этом разложении коэффициенты $a_0, \ldots, a_{n-1}$ являются целыми числами, причем их абсолютные величины не превосходят, например, $\exp(4s_n \ln s_n)$. Полагая $r_{n+1} = s_n + n$ получаем, что ряд удовлетворяет всем условиям теоремы. При этом роль $P_n(z)$ играют многочлены

$$(z - x_1) \cdots (z - x_n)(z)_{s_n}$$

и $P_n(x_i) = 0, i = 1, \ldots, n, n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, построен пример ряда рассматриваемого вида, принимающего целые значения в заданной совокупности натуральных чисел.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Чирский В. Г.* О рядах, алгебраически независимых во всех локальных полях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., механика. 1994. № 3. С. 93–95.

[2] *Mahler K.* Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients // J. Austral. Math. Soc.. V. 5. Part 1. P. 56–64.