УДК 511.9

Средние квадратичного отклонения по орбитам многомерных регулярных сеток

Н. М. Добровольский, В. С. Ванькова

В работе получены оценки сверху среднего арифметического квадратичного отклонения сеток из произвольной регулярной орбиты.

Библиография: 19 названий.

Рассмотрим произвольную s-мерную сетку $X = \{(x_{k1},\ldots,x_{ks}) \mid k = 0,\ldots,N-1\}$ из s-мерного единичного куба $G_s = [0;1)^s$. Квадратичным отклонением сетки X называется величина

$$D_{s,2}(X) \mid= \int_0^1 \cdots \int_0^1 |D(X,\alpha)|^2\, d\alpha,$$

где

$$D(X,\vec{\alpha}\,) = \sum_{k=0}^{N-1} \prod_{j=1}^{s} \chi(x_{kj},\alpha_j) - N\cdot\alpha_1\cdots\alpha_s$$

— функция локального отклонения сетки X и $\chi(x,\alpha)$ — характеристическая функция промежутка $[0;\alpha)$.

В работе [18] даны определения (см. ниже) многомерных $\vec{p}$-ичных сеток I и II рода, групп преобразований таких сеток G-арифметических сдвигов и G^*-"поразрядных сдвигов", q-регулярных $\vec{p}$-ичных сеток.

Рассмотрим средние арифметические квадратичных отклонений по орбитам групп преобразований $\sigma_{s+1}(GX), \sigma_{s+1}(G^*X), \sigma_s(GY)$, $\sigma_s(G^*Y)$.

Основной результат. *Для любой q-регулярной $\vec{p}$-ичной сетки X вида* (2) *и соответствующей q-регулярной $\vec{p}$-ичной сетки Y вида* (4) *справедливы равенства*:

$$\begin{gathered}\sigma_{s+1}(GX) = \sigma_{s+1}(G^*X) = O(\ln^s N);\\ \sigma_s(GY) = \sigma_s(G^*Y) = O(\ln^s N).\end{gathered} \tag{1}$$

В первом разделе приводятся необходимые определения из работы [18], результаты из работ [11], [18], [19]. Во втором разделе доказывается основной результат. В списке литературы приводятся основные работы К. Рота, Г. Дэвенпорта, Ченя по квадратичному отклонению и работы авторов по рассматриваемой тематике.

§ 1. Обозначения и определения

Пусть натуральное $p \geqslant 2$, произвольное целое $h \geqslant 0$ и $P = p^h$. Для произвольного натурального N определим множества:

$$A(N) = \{0, ..., N-1\}$$

и

$$B(N) = \left\{0, \tfrac{1}{N}, \ldots, \tfrac{N-1}{N}\right\}.$$

Для неотрицательного целого n, заданного в p-ичном разложении

$$n = \sum_{\nu \geqslant 0} n_\nu p^\nu \quad \bigl(n_\nu \in A(p)\bigr),$$

определим функцию ван дер Корпута–Хэммерсли равенством

$$p(n) = \sum_{\nu \geqslant 0} n_\nu p^{-\nu-1}$$

Для неотрицательных целых n и t заданных в p-ичном разложении

$$n = \sum_{\nu \geqslant 0} n_\nu p^\nu, \quad t = \sum_{\nu \geqslant 0} t_\nu p^\nu,$$

где $n_\nu, t_\nu \in A(p)$, определим функцию Ченя равенством

$$p(n,t) = \sum_{\nu \geqslant 0} \left\{ \frac{n_\nu + t_\nu}{p} \right\} \cdot p^{-\nu}.$$

Заметим, что для функции ван дер Корпута–Хэммерсли справедливо $p(n) = p(n,0)$. Пусть

$$x(n) = p\bigl(P\{\tfrac{n}{P}\}\bigr), \quad x(n,t) = p\bigl(P\{\tfrac{n}{P}\}, P\{\tfrac{n}{P}\}\bigr).$$

Заметим, что $x(n), x(n,t)$ — периодические функции целых аргументов с периодом P по каждому аргументу.

В дальнейшем будем использовать функцию:

$$\delta_N(a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \equiv 0 \pmod{N}, \\ 0, & \text{если} \quad a \not\equiv 0 \pmod{N}. \end{cases}$$

Зададим на множестве $A(P)$ групповую операцию $\oplus$ равенством

$$t_1 \oplus t_2 = P\left\{\frac{t_1 + t_2}{P}\right\},$$

для любых t_1 и t_2 из множества $A(P)$ и обозначим полученную группу через $G(P)$. Очевидно, что $G(P)$ изоморфна $\mathbb{Z}_P$ — группе классов вычетов по модулю P.

Используя p-ичные разложения элементов множества $A(P)$, определим другую групповую операцию $\odot$ равенством

$$t_1 \odot t_2 = \sum_{\nu \in A(h)} \left\{\frac{t_{1\nu} + t_{2\nu}}{p}\right\} \cdot p^{\nu+1}$$

и группу с указанной операцией обозначим через $G^*(P)$. Ясно, что $G^*(P)$ изоморфна группе $(\mathbb{Z}_p)^h$.

Зададим действие группы $G(P)$ на множестве $B(P)$ с помощью периодизированной функции ван дер Корпута–Хэммерсли следующим равенством: для любых $t \in G(P)$ и $z \in B(P)$

$$t * z = x\big(t + P \cdot x(P \cdot z)\big),$$

т.е. если $z = x(n)$, то $t * z = x(n + t)$.

Такое преобразование будем называть арифметическим сдвигом, а $G(P)$ — группой арифметических сдвигов множества $B(P)$.

Аналогично зададим действие группы $G^*(P)$ на множестве $B(P)$ для любых $t \in G^*(P)$ и $z \in B(P)$ с помощью периодизированной функции Ченя следующим образом

$$t \bullet z = x\big(P \cdot x(P \cdot z), t\big),$$

т.е. из $z = x(n)$, следует $t \bullet z = x(n, t)$ и

$$t_1 \bullet (t_2 \bullet z) = x(n, t_1 \odot t_2) = (t_1 \odot t_2) \bullet z.$$

Данное преобразование назовем покоординатно-поразрядным сдвигом, а $G^*(P)$ — группой поразрядных сдвигов множества $B(P)$.

Пусть $p_1, \dots, p_s$ — фиксированные натуральные числа, отличные от 1. Для любого натурального $N \geqslant 2$ определим целые числа $h_1, \dots, h_s, P_1, \dots, P_s$ из условий

$$N < P_\nu = p_\nu^{h_\nu} \leqslant N \cdot p_\nu \quad (\nu = 1, \dots, s).$$

Таким образом, $h_\nu = [\ln N / \ln p_\nu] + 1$, $\vec{h} = (h_1, \dots, h_s)$. Через $x_\nu(n)$ обозначим функцию $x(n)$ при $p = p_\nu$, $h = h_\nu$, $P = P_\nu$ $(\nu = 1, \dots, s)$.

Определение 1. *$\vec{p}$-ичной сеткой* I *рода* или просто *$\vec{p}$-ичной сеткой* называется любая сетка X вида

$$X = \left\{ \left(x_1(m_{1k}), \dots, x_s(m_{sk}), \tfrac{k}{N}\right) \,\middle|\, k \in A(N) \right\}, \tag{2}$$

при этом целые $m_{\nu k}$ должны удовлетворять условию

$$m_{\nu k_1} \not\equiv m_{\nu k_2} \pmod{P_\nu} \quad \text{при} \quad k_1 \neq k_2 \quad (\nu = 1, \dots, s). \tag{3}$$

Определение 2. *$\vec{p}$-ичной сеткой* II *рода* называется сетка Y вида

$$Y = \left\{ \left(x_1(m_{1k}), \dots, x_s(m_{sk})\right) \,\middle|\, k \in A(N) \right\}, \tag{4}$$

где целые $m_{\nu k}$ $(\nu = 1, \dots, s)$ удовлетворяют условиям (3).

Для получения хорошей оценки среднего арифметического квадратичных отклонений сеток из орбиты $\vec{p}$-ичной сетки нам потребуется определение регулярной $\vec{p}$-ичной сетки.

Пусть

$$b(\vec{p}, \vec{n}\,) = p_1^{n_1} \cdots p_s^{n_s}. \tag{5}$$

Для произвольных целых $a_1, \dots, a_s, a, q, n_1, \dots, n_s, r$ обозначим

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \Pi^*\left(\frac{a_1}{p_1^{n_1}}, \dots, \frac{a_s}{p_s^{n_s}}, \frac{a \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q}{N}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{s} \left[\frac{a_j}{p_j^{n_j}}; \frac{a_j + 1}{p_j^{n_j}}\right) \times \left[\frac{a \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q}{N}; \frac{(a+1) \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q}{N}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

– прямоугольный параллелепипед объема q/N;

$$\begin{aligned} \Pi^{**} &= \Pi^{**}\left(\frac{a_1}{p_1^{n_1}}, \dots, \frac{a_s}{p_s^{n_s}}, \frac{a \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q}{N}, \frac{a \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q + r}{N}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{s} \left[\frac{a_j}{p_j^{n_j}}; \frac{a_j + 1}{p_j^{n_j}}\right) \times \left[\frac{a \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q}{N}; \frac{a \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q + r}{N}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

– прямоугольный параллелепипед объема $r / \big(N \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,)\big)$.

Определение 3. Параллелепипед Π^* вида (6) будем называть *$\vec{p}$-ичным параллелепипедом ранга $\vec{n}$ типа q*, если целые $a_1, \ldots, a_s, a, q$, $n_1, \ldots, n_s$ связаны соотношениями:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant a_j \leqslant p_j^{n_j} - 1, \quad n_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, s); \\ a \geqslant 0, \quad (a+1) \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q \leqslant N, \quad q \geqslant 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Очевидно, что при фиксированном ранге $\vec{n}$ и типе q имеется ровно $b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot \big[N/\big(b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q\big)\big]$ $\vec{p}$-ичных параллелепипедов.

Определение 4. Параллелепипед Π^{**} вида (7) будем называть *неполным $\vec{p}$-ичным параллелепипедом ранга $\vec{n}$ типа q*, если целые $a_1, \ldots, a_s, a, q, n_1, \ldots, n_s, r$ связаны соотношениями:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant a_j \leqslant p_j^{n_j} - 1, \quad n_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \ldots, s); \\ a \geqslant 0, \quad a \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q \leqslant N, \quad q \geqslant 1; \\ 1 \leqslant r \leqslant \min\big(b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q - 1, N - a \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,) \cdot q\big). \end{gathered} \tag{9}$$

Обозначим через $Z^* = Z^*(X)$, $Z^{**} = Z^{**}(X)$ — количество точек сетки X, попавших соответственно в параллелепипеды Π^*, Π^{**}.

Определение 5. $\vec{p}$-ичную сетку X вида (2) и соответствующую $\vec{p}$-ичную сетку Y II рода вида (4) назовем *q-регулярными*, если для любого $\vec{p}$-ичного параллелепипеда Π^* вида (6) объема q/N

$$Z^* = q,$$

и для любого неполного p-ичного параллелепипеда Π^{**} вида (7) объема $r/\big(N \cdot b(\vec{p}, \vec{n}\,)\big) < q/N$

$$Z^{**} \leqslant q.$$

Замечание. Если $q = 1$, то q-регулярная $\vec{p}$-ичная сетка называется просто *регулярной $\vec{p}$-ичной сеткой*.

Как известно, для квадратичного отклонения произвольной сетки

$$X = \{\, \vec{x}_k = (x_{1k}, \ldots, x_{sk}) \mid k \in A(N) \,\}$$

справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} D_{s,2}(X) = \sum_{k,n \in A(N)} \prod_{j=1}^{s} \big(1 - \max(x_{jk}, x_{jn})\big) \\ - \frac{N}{2^{s-1}} \sum_{k \in A(N)} \prod_{j=1}^{s} (1 - x_{jk}^2) + \frac{N^2}{3^s}. \end{aligned}$$

Для произвольных $\vec{p}$-ичных сеток X — I рода и Y — II рода вида введем следующие обозначения.

$$V_s(k,n) = \prod_{j=1}^{s} \Big(1 - \max\big(x_j(m_{jk}), x_j(m_{jn})\big)\Big);$$

$$V_s(k,n,\vec{t}) = \prod_{j=1}^{s} \Big(1 - \max\big(x_j(m_{jk}+t_j), x_j(m_{jn}+t_j)\big)\Big);$$

$$V_s^*(k,n,\vec{t}) = \prod_{j=1}^{s} \Big(1 - \max\big(x_j(m_{jk},t_j), x_j(m_{jn},t_j)\big)\Big);$$

$$U_s(k) = \prod_{j=1}^{s} \big(1 - x_j^2(m_{jk})\big);$$

$$U_s(k,\vec{t}) = \prod_{j=1}^{s} \big(1 - x_j^2(m_{jk}+t_j)\big);$$

$$U_s^*(k,\vec{t}) = \prod_{j=1}^{s} \big(1 - x_j^2(m_{jk},t_j)\big);$$

$$v_\nu(k,n) = \left(1 - \max\left(\frac{k}{N}, \frac{n}{N}\right)\right)^\nu \quad (\nu = 0,1);$$

$$u_\nu(k) = 2^{1-\nu}\left(1 - \left(\frac{k}{N}\right)^2\right)^\nu \quad (\nu = 0,1);$$

$$J_t = \{\, \vec{j}_t = (j_1,\ldots,j_s) \mid \{\, j_1,\ldots,j_s \,\} = \{\, 1,\ldots,s \,\},$$
$$j_1 < \cdots < j_t,\ j_{t+1} < \cdots < j_s \,\}.$$

Очевидно, что $|J_t| = C_s^t$; $J_0 = \{\vec{j}_0 = (1,\ldots,s)\}$. Для произвольного вектора $\vec{a} = (a_1,\ldots,a_s)$ и вектора $\vec{j}_t \in J_t$ положим:

$$\vec{a}(\vec{j}_t) = (a_{j_1},\ldots,a_{j_t}) \text{ — } t\text{-мерная проекция вектора } \vec{a};$$

$$L(\vec{j}_t) = L(\vec{P},\vec{j}_t) = \prod_{\mu=t+1}^{s} (P_{j_\mu}+1)/(2P_{j_\mu});$$

$$L(\vec{j}_0) = \prod_{j=1}^{s} \left(\frac{P_j+1}{2P_j}\right);$$

$$C(\vec{\lambda},\vec{j}_t) = C(\vec{p},\vec{\lambda},\vec{j}_t) = \prod_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu};$$

$$E(\vec{m},\vec{j}_t) = E(\vec{p},\vec{m},\vec{j}_t) = \prod_{\nu=1}^{t} m_\nu(p_{j_\nu} - m_\nu)\cdot p_{j_\nu}^{-2};$$

$$
\begin{aligned}
S(\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t) &= S(\lambda_1,\ldots,\lambda_t,m_1,\ldots,m_t,\vec{j}_t)\\
&= \sum_{k,n\in A(N)} v_1(k,n)\cdot\left(\prod_{\nu=1}^{t}\delta_{p_{j_\nu}^{\lambda_\nu+1}}(m_{j_\nu k}-m_{j_\nu n}-p_{j_\nu}^{\lambda_\nu}\cdot m_\nu)\right.\\
&\qquad \left. - C(\vec{\lambda}+\vec{1},\vec{j}_t)\right);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(m,\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t) &= R(m,\lambda_1,\ldots,\lambda_t,m_1,\ldots,m_t,\vec{j}_t)\\
&= \sum_{k,n\in A(m+1)} \left(\prod_{\nu=1}^{t}\delta_{p_{j_\nu}^{\lambda_\nu+1}}(m_{j_\nu k}-m_{j_\nu n}-p_{j_\nu}^{\lambda_\nu}\cdot m_\nu)\right.\\
&\qquad \left. - C(\vec{\lambda}+\vec{1},\vec{j}_t)\right).
\end{aligned}
$$

Из определений следует, что справедливы равенства:

$$
\begin{aligned}
D_{s+1,2}(X) &= \sum_{k,n\in A(N)} v_1(k,n)\cdot V_s(k,n)\\
&\quad -\frac{N}{2^s}\sum_{k\in A(N)} u_1(k)\cdot U_s(k)+\frac{N^2}{3^{s+1}};\\
D_{s,2}(Y) &= \sum_{k,n\in A(N)} v_0(k,n)\cdot V_s(k,n)\\
&\quad -\frac{N}{2^s}\sum_{k\in A(N)} u_0(k)\cdot U_s(k)+\frac{N^2}{3^{s}};\\
D_{s+1,2}\big(X(\vec{t})\big) &= \sum_{k,n\in A(N)} v_1(k,n)\cdot V_s(k,n,\vec{t})\\
&\quad -\frac{N}{2^s}\sum_{k\in A(N)} u_1(k)\cdot U_s(k,\vec{t})+\frac{N^2}{3^{s+1}};\\
D_{s+1,2}\big(XC(\vec{t})\big) &= \sum_{k,n\in A(N)} v_1(k,n)\cdot V_s^*(k,n,\vec{t})\\
&\quad -\frac{N}{2^s}\sum_{k\in A(N)} u_1(k)\cdot U_s^*(k,\vec{t})+\frac{N^2}{3^{s+1}};\\
D_{s,2}\big(Y(\vec{t})\big) &= \sum_{k,n\in A(N)} v_0(k,n)\cdot V_s(k,n,\vec{t})\\
&\quad -\frac{N}{2^s}\sum_{k\in A(N)} u_0(k)\cdot U_s(k,\vec{t})+\frac{N^2}{3^{s}};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{s,2}\big(YC(\vec{t}\,)\big) = &\sum_{k,n\in A(N)} v_0(k,n)\cdot V_s^*(k,n,\vec{t}\,) \\
&- \frac{N}{2^s}\sum_{k\in A(N)} u_0(k)\cdot U_s^*(k,\vec{t}\,) + \frac{N^2}{3^s};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^{(1)}(X) = &\sum_{t=1}^{s}(-1)^t \sum_{\vec{j}_t\in J_t} L(\vec{j}_t)\cdot \sum_{\vec{\lambda}\in A(\vec{h}(\vec{j}_t))} C(\vec{\lambda},\vec{j}_t) \\
&\times \sum_{\vec{m}\in A(\vec{p}(\vec{j}_t))} E(\vec{m},\vec{j}_t)\cdot S(\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^{(1)}(Y) = &\sum_{t=1}^{s}(-1)^t \sum_{\vec{j}_t\in J_t} L(\vec{j}_t)\cdot \sum_{\vec{\lambda}\in A(\vec{h}(\vec{j}_t))} C(\vec{\lambda},\vec{j}_t) \\
&\times \sum_{\vec{m}\in A(\vec{p}(\vec{j}_t))} E(\vec{m},\vec{j}_t)\cdot R(N-1,\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t).
\end{aligned}
$$

В работе [18] доказаны следующие леммы и теорема.

Лемма A. *Пусть целые* $n_1,\dots,n_s,a,q,a_1,\dots,a_s$ *удовлетворяют условиям* (8). *Тогда для любой* q*-регулярной* $\vec{p}$*-ичной сетки* X *вида* (2) *и соответствующей* $\vec{p}$*-ичной сетки* Y *вида* (4) *справедливо равенство*:

$$
\sum_{n=a\cdot b(\vec{p},\vec{n}\,)\cdot q}^{(a+1)\cdot b(\vec{p},\vec{n}\,)\cdot q-1}\left(\prod_{j=1}^{s}\delta_{p_j^{n_j}}\big(m_{jn}-p_j^{n_j}\cdot x(a_j)\big)-\frac{1}{b(\vec{p},\vec{n}\,)}\right)=0.
$$

Лемма B. *Пусть целые* $n_1,\dots,n_s,a,q,a_1,\dots,a_s,r$ *удовлетворяют соотношениям* (9). *Тогда для любой* q*-регулярной* $\vec{p}$*-ичной сетки* X *вида* (2) *и соответствующей* q*-регулярной* $\vec{p}$*-ичной сетки* Y *вида* (4) *справедливо неравенство*:

$$
\left|\sum_{n=a\cdot b(\vec{p},\vec{n}\,)\cdot q}^{n=a\cdot b(\vec{p},\vec{n}\,)\cdot q+r}\left(\prod_{j=1}^{s}\delta_{p_j^{n_j}}\big(m_{jn}-p_j^{n_j}\cdot x_j(a_j)\big)-\frac{1}{b(\vec{p},\vec{n}\,)}\right)\right|<q.
$$

Лемма C. *Справедливо равенство*

$$
S(\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t)=\frac{1}{N}\sum_{m\in A(N)} R(m,\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t).
$$

Теорема A. *Пусть $\vec{p}$-ичная сетка X вида (2) и соответствующая $\vec{p}$-ичная сетка Y II рода вида (4) — q-регулярны. Тогда для любого целочисленного вектора $\vec{t} \in A(\vec{P})$ q-регулярными являются следующие пары сеток: $X(\vec{t})$ и $Y(\vec{t})$; $XC(\vec{t})$ и $YC(\vec{t})$, другими словами, свойство q-регулярности инвариантно относительно преобразований из групп G и G^*.*

В работе [11] в других обозначениях дается следующая теорема.

Теорема B. *Пусть*

$$\sigma_1 = \sigma_{s+1}(GX), \qquad \sigma_0 = \sigma_s(GY),$$
$$\sigma_1^* = \sigma_{s+1}(G^*X), \quad \sigma_0^* = \sigma_s(G^*Y).$$

Тогда справедливы равенства:

$$\sigma_\nu = \sigma_\nu^* = \sum_{k,n\in A(N)} v_\nu(k,n) \prod_{j=1}^{s} \left(\frac{P_j+1}{2P_j} - f_{j_0}(|m_{jk} - m_{jn}|) \right)$$
$$- \frac{2N^2}{3^{s+\nu}} \left(1 + \frac{3}{4N} - \frac{1}{4N^2}\right)^\nu \prod_{j=1}^{s} \left(1 + \frac{3}{4P_j} - \frac{1}{4P_j^2}\right)$$
$$+ \frac{N^2}{3^{s+\nu}} \quad (\nu = 0, 1),$$

где $f_{j_0}(k) = f_0(k)$ при $p = p_j$ $(j = 1, \ldots, s)$.

Лемма D. *Для $\sigma^{(0)} = \sigma^{(1)}(Y)$ и $\sigma^{(1)} = \sigma^{(1)}(X)$ справедливы равенства:*

$$\sigma_\nu = \sigma^{(\nu)} + \frac{N^2}{3^{s+\nu}} \left(1 + \frac{3}{2N} + \frac{1}{2N^2}\right)^\nu \prod_{j=1}^{s} \left(1 + \frac{3}{2P_j} + \frac{1}{2P_j^2}\right)$$
$$- \frac{2N^2}{3^{s+\nu}} \left(1 + \frac{3}{4N} - \frac{1}{4N^2}\right)^\nu \prod_{j=1}^{s} \left(1 + \frac{3}{4P_j} - \frac{1}{4P_j^2}\right)$$
$$+ \frac{N^2}{3^{s+\nu}} \quad (\nu = 0, 1).$$

Лемма E. *Справедливы равенства:*

$$\sigma_\nu = \sigma^{(\nu)} + \Theta_\nu \quad (\nu = 0, 1),$$

где $0 \leqslant \Theta_\nu \leqslant 4 \cdot (5/8)^s$.

§ 2. Доказательство основного результата

Ниже доказательство основного результата будет приведено в двух формах: слабой и усиленной, отличающихся величиной константы в $s!$ раз.

Лемма 1. *Для любой q-регулярной $\vec{p}$-ичной сетки X вида* (2) *и соответствующей q-регулярной $\vec{p}$-ичной сетки Y вида* (4) *справедливы неравенства*:

$$|R(m,\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t)| < q^2/C(\vec{\lambda}+\vec{1},\vec{j}_t),$$
$$|S(\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t)| < q^2/C(\vec{\lambda}+\vec{1},\vec{j}_t).$$

Доказательство. Пусть натуральное Q задано равенством:

$$Q = q/C(\vec{\lambda}+\vec{1},\vec{j}_t), \quad m+1 = b\cdot Q + r, \quad 0 \leqslant r < Q,$$
$$W(k,n) = \prod_{\nu=1}^{t} \delta_{p_{j_\nu}^{\lambda_\nu+1}}(m_{j_\nu k} - m_{j_\nu n} - p_{j_\nu}^{\lambda_\nu} m_\nu) - \frac{q}{Q}. \tag{10}$$

Тогда

$$R(m,\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t) = \sum_{u,v=0}^{b-1} \sum_{k=uQ}^{uQ+Q-1} \sum_{n=vQ}^{vQ+Q-1} W(k,n)$$
$$+ \sum_{u=0}^{b-1} \sum_{k=uQ}^{uQ+Q-1} \sum_{n=bQ}^{m} W(k,n)$$
$$+ \sum_{v=0}^{b-1} \sum_{k=bQ}^{m} \sum_{n=vQ}^{vQ+Q-1} W(k,n) + \sum_{k,n=bQ}^{m} W(k,n).$$

Так как $p_j^{n_j} \cdot x_j(a_j)$ при $a_j \in A(p_j^{\lambda_j})$ пробегает полную систему вычетов по модулю $p_j^{\lambda_j}$, то из леммы А следует, что

$$\sum_{k=uQ}^{uQ+Q-1} W(k,n_0) = \sum_{n=vQ}^{vQ+Q-1} W(k_0,n) = 0$$

для любых n_0 и k_0. Отсюда вытекает справедливость равенства

$$R(m,\vec{\lambda},\vec{m},j_t) = \sum_{k,n=bQ}^{m} W(k,n). \tag{11}$$

Применяя лемму B, получим

$$\left|\sum_{k=bQ}^{m} W(k,n)\right| < q, \tag{12}$$

и, следовательно,

$$\left|\sum_{k,n=bQ}^{m} W(k,n)\right| < r\cdot q < Q\cdot q = \frac{q^2}{C(\vec\lambda+\vec 1,\vec j_t)},$$

что и доказывает лемму, так как в силу леммы C $S(\vec\lambda,\vec m,\vec j_t)$ есть среднее арифметическое величин $R(m,\vec\lambda,\vec m,\vec j_t)$ при $m\in A(N)$.

Теорема 1. *Для любой q-регулярной $\vec p$-ичной сетки X вида (2) и соответствующей q-регулярной $\vec p$-ичной сетки Y вида (4) справедливы неравенства*

$$\sigma_{s+1}(GX)=\sigma_{s+1}(G^*X)\leqslant\frac{q^2}{6^s}\left(\prod_{j=1}^{s}\frac{p_j^2-1}{\ln p_j}\right)\cdot\ln^s N+O(\ln^{s-1}N);$$

$$\sigma_s(GY)=\sigma_s(G^*Y)\leqslant\frac{q^2}{6^s}\left(\prod_{j=1}^{s}\frac{p_j^2-1}{\ln p_j}\right)\cdot\ln^s N+O(\ln^{s-1}N).$$

Доказательство. По теореме B и леммам D, E

$$\sigma_{s+1}(GX)=\sigma_{s+1}(G^*X)=\sigma^{(1)}(X)+O(1);$$
$$\sigma_s(GY)=\sigma_s(G^*Y)=\sigma^{(1)}(Y)+O(1).$$

Оценивая $S(\vec\lambda,\vec m,\vec j_t)$ и $R(N-1,\vec\lambda,\vec m,\vec j_t)$ по лемме 1, получим:

$$\sigma^{(1)}(X)\leqslant\sigma,\quad \sigma^{(1)}(Y)\leqslant\sigma,$$

где

$$\sigma=\sum_{t=1}^{s}\sum_{\vec j_t\in J_t}L(\vec j_t)\cdot\sum_{\vec\lambda\in A(\vec h(\vec j_t))}C(\vec\lambda,\vec j_t)\cdot\sum_{\vec m\in A(\vec p(\vec j_t))}E(\vec m,\vec j_t)\cdot q^2/C(\vec\lambda+\vec 1,\vec j_t).$$

Преобразуем выражение для σ:

$$\frac{C(\vec\lambda,\vec j_t)}{C(\vec\lambda+\vec 1,\vec j_t)}=\prod_{\nu=1}^{t}p_{j_\nu}^{\lambda_\nu+1}/p_{j_\nu}^{\lambda_\nu}=\prod_{\nu=1}^{t}p_{j_\nu}; \tag{13}$$

$$\sum_{\vec{m}\in A(\vec{p}(\vec{j}_t))} E(\vec{m},\vec{j}_t) = \prod_{\nu=1}^{t}\Biggl(\sum_{m_\nu\in A(p_{j_\nu})} m_\nu\cdot(p_{j_\nu}-m_\nu)/p_{j_\nu}^2\Biggr)$$
$$= \prod_{\nu=1}^{t}\left(\frac{p_{j_\nu}(p_{j_\nu}-1)}{2p_{j_\nu}} - \frac{(p_{j_\nu}-1)\cdot p_{j_\nu}\cdot(2p_{j_\nu}-1)}{6p_{j_\nu}^2}\right)$$
$$= \prod_{\nu=1}^{t}\frac{p_{j_\nu}^2-1}{6p_{j_\nu}}; \qquad (14)$$

$$\sum_{\vec{\lambda}\in A(\vec{h},\vec{j}_t)} C(\vec{\lambda},\vec{j}_t)\cdot\sum_{\vec{m}\in A(\vec{p}(\vec{j}_t))} E(\vec{m},\vec{j}_t)\cdot q^2/C(\vec{\lambda}+\vec{1},\vec{j}_t)$$
$$= q^2\sum_{\vec{\lambda}\in A(\vec{h}(\vec{j}_t))}\prod_{\nu=1}^{t}\frac{p_{j_\nu}^2-1}{6} = \frac{q^2}{6^t}\prod_{\nu=1}^{t}(p_{j_\nu}^2-1)\cdot h_{j_\nu};$$

$$\sigma = \sum_{t=1}^{s}\sum_{\vec{j}_t\in J_t} L(\vec{j}_t)\cdot\frac{q^2}{6^t}\prod_{\nu=1}^{t}\bigl((p_{j_\nu}^2-1)\cdot h_{j_\nu}\bigr)$$
$$= q^2\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{P_j+1}{2P_j}+\frac{(p_j^2-1)\cdot h_j}{6}\right) - q^2\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{P_j+1}{2P_j}\right).$$

Так как $h_j = [\ln N/\ln p_j]+1 = \ln N/\ln p_j + O(1)$, то

$$\sigma = q^2\left(\prod_{j=1}^{s}\frac{p_j^2-1}{6\cdot\ln p_j}\right)\cdot\ln^s N + O(\ln^{s-1}N),$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Лемму 1 можно усилить, что позволяет улучшить константу в теореме 1.

Лемма 2. *Для любой q-регулярной $\vec{p}$-ичной сетки X вида* (2) *и соответствующей q-регулярной $\vec{p}$-ичной сетки Y вида* (4) *при $q/C(\vec{\lambda}+\vec{1},\vec{j}_t)\geqslant N$ справедливы неравенства*:

$$|R(m,\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t)| < q\cdot N \quad \text{при} \quad m\in A(N);$$
$$|S(\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t)| < q\cdot N.$$

Доказательство. Сохраняя обозначения доказательства леммы 1 заметим, что в (10) $Q \geqslant N$, $b=0$, $r=m+1 \leqslant N$. Отсюда и из неравенств (11) и (12) получим

$$|R(m,\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t)| \leqslant \sum_{n\in A(m+1)} \left| \sum_{k\in A(m+1)} W(k,n) \right| < q\cdot(m+1) \leqslant q\cdot N,$$

что и доказывает утверждение леммы.

Прежде, чем переходить к доказательству усиления теоремы 1, введем следующие обозначения. Пусть

$$\begin{aligned} T(\vec{j}_t) &= T(q,N,\vec{p},\vec{n},\vec{j}_t) \\ &= \{\,\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_t) \mid \lambda_\nu \in A(h_{j_\nu})\ (\nu=1,\ldots,t), \\ &\qquad\qquad \bigl(q/C(\vec{\lambda}+\vec{1},\vec{j}_t)\bigr) < N\,\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \frac{\ln^t N/q}{s^t\cdot \ln p_{j_1}\cdots \ln p_{j_t}} &\leqslant |T(\vec{j}_t)| \leqslant h_{j_1}\cdots h_{j_t} \\ &\leqslant (\ln^t N/q)\prod_{a=1}^{t}\left(\frac{1}{\ln p_{j_a}}+\frac{1}{\ln N}\right). \end{aligned} \qquad (15)$$

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$|T(\vec{j}_t)| \leqslant \frac{\ln^t(N/q)}{t!\cdot \ln p_{j_1}\cdots \ln p_{j_t}}.$$

Доказательство. Заменяя сумму на интеграл, получим:

$$\begin{aligned} |T(\vec{j}_t)| &= \sum_{\vec{\lambda}\in T(\vec{j}_t)} 1 = \sum_{q\cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1}\cdots p_{j_t}^{\lambda_t+1}<N} 1 \\ &= \sum_{(\lambda_1+1)\ln p_{j_1}+\cdots+(\lambda_t+1)\ln p_{j_t}<\ln N-\ln q} 1 \\ &= \int\limits_{([x_1]+1)\ln p_{j_1}+\cdots+([x_t]+1)\ln p_{j_t}<\ln N/q}\cdots\int dx_1\cdots dx_t \\ &< \int\limits_{x_1\ln p_{j_1}+\cdots+x_t\ln p_{j_t}<\ln N/q}\cdots\int dx_1\cdots dx_t \\ &= \frac{1}{\ln p_{j_1}\cdots \ln p_{j_t}} \int\limits_{y_1+\cdots+y_t<\ln N/q}\cdots\int dy_1\cdots dy_t \\ &= \frac{\ln^t(N/q)}{t!\cdot \ln p_{j_1}\cdots \ln p_{j_t}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любой q-регулярной $\vec{p}$-ичной сетки X вида* (2) *и соответствующей q-регулярной $\vec{p}$-ичной сетки Y вида* (4) *справедливы неравенства*:

$$\sigma_{s+1}(GX) = \sigma_{s+1}(G^*X) \leqslant \frac{q^2}{s!\cdot 6^s}\left(\prod_{j=1}^{s}\frac{p_j^2-1}{\ln p_j}\right)\cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N);$$
$$\sigma_{s}(GY) = \sigma_{s}(G^*Y) \leqslant \frac{q^2}{s!\cdot 6^s}\left(\prod_{j=1}^{s}\frac{p_j^2-1}{\ln p_j}\right)\cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N). \tag{16}$$

Доказательство. По теореме B и леммам D и E

$$\sigma_{s+1}(GX) = \sigma_{s+1}(G^*X) = \sigma^{(1)}(X) + O(1);$$
$$\sigma_{s}(GY) = \sigma_{s}(G^*Y) = \sigma^{(1)}(Y) + O(1).$$

Согласно введенным обозначениям

$$\sigma^{(1)}(X) = \sum_{t=1}^{s}(-1)^t \sum_{\vec{j}_t\in J_t} L(\vec{j}_t)\cdot \sum_{\vec{\lambda}\in A(\vec{h}(\vec{j}_t))} C(\vec{\lambda},\vec{j}_t) \times \sum_{\vec{m}\in A(\vec{p}(\vec{j}_t))} E(\vec{m},\vec{j}_t)\cdot S(\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t);$$
$$\sigma^{(1)}(Y) = \sum_{t=1}^{s}(-1)^t \sum_{\vec{j}_t\in J_t} L(\vec{j}_t)\cdot \sum_{\vec{\lambda}\in A(\vec{h}(\vec{j}_t))} C(\vec{\lambda},\vec{j}_t) \times \sum_{\vec{m}\in A(\vec{p}(\vec{j}_t))} E(\vec{m},\vec{j}_t)\cdot R(N-1,\vec{\lambda},\vec{m},\vec{j}_t).$$

Пусть $T'(\vec{j}_t) = A(\vec{h}(\vec{j}_t))\setminus T(\vec{j}_t)$. Для всех $\vec{\lambda}\in T(\vec{j}_t)$ применим лемму 1, а для $\vec{\lambda}\in T'(\vec{j}_t)$ — лемму 2. Получим

$$\sigma^{(1)}(X) \leqslant \sigma_1+\sigma_2,\quad \sigma^{(1)}(Y) \leqslant \sigma_1+\sigma_2, \tag{17}$$

где

$$\sigma_1 = \sum_{t=1}^{s}\sum_{\vec{j}_t\in J_t} L(\vec{j}_t)\cdot \sum_{\vec{\lambda}\in T(\vec{j}_t)} C(\vec{\lambda},\vec{j}_t)\cdot \sum_{\vec{m}\in A(\vec{p}(\vec{j}_t))} E(\vec{m},\vec{j}_t)\cdot q^2/C(\vec{\lambda}+\vec{1},\vec{j}_t);$$
$$\sigma_2 = \sum_{t=1}^{s}\sum_{\vec{j}_t\in J_t} L(\vec{j}_t)\cdot \sum_{\vec{\lambda}\in T'(\vec{j}_t)} C(\vec{\lambda},\vec{j}_t)\cdot \sum_{\vec{m}\in A(\vec{p}(\vec{j}_t))} E(\vec{m},\vec{j}_t)\cdot q\cdot N.$$

Из равенств (13), (14) получим

$$\sigma_1 = \sum_{t=1}^{s} \sum_{\vec{j}_t \in J_t} L(\vec{j}_t) \cdot \sum_{\vec{\lambda} \in T(\vec{j}_t)} \frac{q^2}{6^t} \prod_{\nu=1}^{t} \left(p_{j_\nu}^2 - 1\right)$$
$$= \sum_{t=1}^{s} \sum_{\vec{j}_t \in J_t} L(\vec{j}_t) \cdot \frac{q^2}{6^t} \prod_{\nu=1}^{t} \left(p_{j_\nu}^2 - 1\right) \cdot |T(\vec{j}_t)|.$$

Пользуясь (15), выделяем главный член:

$$\sigma_1 = \frac{q^2}{6^s} \prod_{\nu=1}^{s} \left(p_{j_\nu}^2 - 1\right) \cdot |T(\vec{j}_s)| + O(\ln^{s-1} N).$$

Применяя лемму 3, находим:

$$\sigma_1 \leqslant \frac{q^2}{s! \cdot 6^s} \left(\prod_{j=1}^{s} \left(\frac{p_j^2 - 1}{\ln p_j} \right) \right) \cdot \ln^s N + O(\ln^{s-1} N). \tag{18}$$

Аналогично из равенства (14) получим:

$$\sigma_2 = \sum_{t=1}^{s} \sum_{\vec{j}_t \in J_t} L(\vec{j}_t) \cdot \sum_{\vec{\lambda} \in T'(\vec{j}_t)} C(\vec{\lambda}, \vec{j}_t) \cdot q \cdot N \cdot \prod_{\nu=1}^{t} \left(\frac{p_{j_\nu}^2 - 1}{6 \cdot p_{j_\nu}} \right)$$
$$= \sum_{t=1}^{s} \sum_{\vec{j}_t \in J_t} L(\vec{j}_t) \cdot \frac{q \cdot N}{6^t} \cdot \left(\prod_{\nu=1}^{t} \left(\frac{p_{j_\nu}^2 - 1}{p_{j_\nu}} \right) \right) \cdot \sum_{\vec{\lambda} \in T'(\vec{j}_t)} \left(\prod_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu} \right). \tag{19}$$

Рассмотрим внутреннюю сумму по λ:

$$\sigma(\vec{j}_t) = \sum_{\vec{\lambda} \in T'(\vec{j}_t)} \prod_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu} = \sum_{\substack{\lambda_\nu \in A(h_{j_\nu}) \\ (\nu=1,\ldots,t) \\ q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1} \cdots p_{j_t}^{\lambda_t + 1} \geqslant N}} \prod_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu}.$$

Разобьем область суммирования $T'(\vec{j}_t)$ на следующие t областей:

$$T_1'(\vec{j}_t), T_2'(\vec{j}_t), \ldots, T_t'(\vec{j}_t),$$

где

$$
\begin{aligned}
T_1'(\vec{j}_t) &= \{\, \vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_t) \mid \lambda_\nu \in A(h_{j_\nu})\ (\nu = 1, \dots, t),\ q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1} \geqslant N \,\};\\
T_2'(\vec{j}_t) &= \{\, \vec{\lambda} \mid \lambda_\nu \in A(h_{j_\nu})\ (\nu = 1, \dots, t),\ q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1} \leqslant N,\\
&\qquad\qquad q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1} \cdot p_{j_2}^{\lambda_2+1} \geqslant N \,\};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
T_t'(\vec{j}_t) &= \{\, \vec{\lambda} \mid \lambda_\nu \in A(h_{j_\nu})\ (\nu = 1, \dots, t),\ q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1} \cdots p_{j_{t-1}}^{\lambda_{t-1}+1} < N,\\
&\qquad\qquad q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1} \cdots p_{j_t}^{\lambda_t+1} \geqslant N \,\}.
\end{aligned}
$$

Получим

$$
\sigma(\vec{j}_t) = \sum_{\mu=1}^{t} \sigma(\mu, \vec{j}_t), \tag{20}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\sigma(1, \vec{j}_t) &= \sum_{\substack{\lambda_1 \in A(h_{j_1})\\ q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1} \geqslant N}} \ \sum_{\lambda_2 \in A(h_{j_2})} \cdots \sum_{\lambda_t \in A(h_{j_t})} \prod_{\nu=1}^{t} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu}\\
&= \sum_{\substack{\lambda_1 \in A(h_{j_1})\\ q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1} \geqslant N}} p_{j_1}^{-\lambda_1} \cdot \left(\prod_{\nu=2}^{t} \sum_{\lambda_\nu \in A(h_{j_\nu})} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu} \right);\\
\sigma(\mu, \vec{j}_t) &= \sum_{\substack{\lambda_\nu \in A(h_{j_\nu})\\ (\nu=1,\dots,\mu-1)\\ q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1} \cdots p_{j_{\mu-1}}^{\lambda_{\mu-1}+1} < N}} \prod_{\nu=1}^{\mu-1} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu} \sum_{\substack{\lambda_\mu \in A(h_{j_\mu})\\ q \cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1} \cdots p_{j_\mu}^{\lambda_\mu+1} \geqslant N}} p_{j_\mu}^{-\lambda_\mu}\\
&\quad \times \left(\prod_{\nu=\mu+1}^{t} \sum_{\substack{\lambda_\nu \in A(h_{j_\nu})\\ (\mu=2,\dots,t)}} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu} \right).
\end{aligned}
$$

Так как

$$
\sum_{\lambda_\nu \in A(h_{j_\nu})} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu} \leqslant \sum_{\lambda=0}^{\infty} p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu} = \frac{p_{j_\nu}}{p_{j_\nu} - 1};
$$

$$\sum_{\substack{\lambda_\mu\in A(h_{j_\mu})\\ q\cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1}\cdots p_{j_\mu}^{\lambda_\mu+1}\geqslant N}} p_{j_\mu}^{-\lambda_\mu} \leqslant \sum_{\lambda\geqslant\frac{\ln N-\ln q-(\lambda_1+1)\ln p_{j_1}-\dots-(\lambda_\mu+1)\cdot\ln p_{j_{\mu-1}}}{\ln p_{j_\mu}}-1} p_{j_\mu}^{-\lambda}$$

$$\leqslant \frac{p_{j_\mu}}{p_{j_\mu}-1}\cdot\frac{q\cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1}\cdots p_{j_{\mu-1}}^{\lambda_{\mu-1}+1}\cdot p_{j\,\mu}}{N},$$

то

$$\sigma(1,\vec{j}_t)\leqslant\left(\prod_{\nu=2}^{t}\frac{p_{j_\nu}}{p_{j_\nu}-1}\right)\cdot\frac{q\cdot p_{j_1}}{N};$$

$$\sigma(\mu,\vec{j}_t)\leqslant\left(\sum_{\substack{\lambda_\nu\in A(h_{j_\nu})\\(\nu=1,\dots,\mu-1)\\ q\cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1}\cdots p_{j_{\mu-1}}^{\lambda_{\mu-1}+1}<N}}\prod_{\nu=1}^{\mu-1}p_{j_\nu}^{-\lambda_\nu}\right)$$

$$\times\frac{q\cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1}\cdots p_{j_{\mu-1}}^{\lambda_{\mu-1}+1}\cdot p_{j_\mu}}{N}\cdot\prod_{\nu=\mu}^{t}\frac{p_{j_\nu}}{p_{j_\nu-1}}$$

$$=\frac{q}{N}\cdot\left(\prod_{\nu=1}^{\mu}p_{j_\mu}\right)\left(\prod_{\nu=\mu}^{t}\frac{p_{j_\nu}}{p_{j_\mu}-1}\right)\cdot\sum_{\substack{\lambda_\nu\in A(h_{j_\mu})\\(\nu=1,\dots,\mu-1)\\ q\cdot p_{j_1}^{\lambda_1+1}\cdots p_{j_{\mu-1}}^{\lambda_{\mu-1}+1}<N}}1$$

$$=\frac{q}{N}\cdot\left(\prod_{\nu=1}^{\mu}p_{j_\mu}\right)\cdot\left(\prod_{\nu=\mu}^{t}\frac{p_{j_\nu}}{p_{j_\mu}-1}\right)\cdot|T(\vec{j}\,'_{\mu-1})|$$

$$=O\left(\frac{\ln^{\mu-1}N}{N}\right),$$

где $\vec{j}\,'_\mu=(j_1,\dots,j_{\mu-1},j'_\mu,\dots,j'_s)$, $\{j'_\mu,\dots,j'_s\}=\{j_\mu,\dots,j_s\}$ и $j'_\mu<\dots<j'_s$. Отсюда и из (20) следует, что

$$\sigma(\vec{j}_t)=O\left(\frac{\ln^{t-1}N}{N}\right). \tag{21}$$

Подставляя оценку (21) в равенство (19), получим, что

$$\sigma_2=O\left(\sum_{t=1}^{s}N\cdot\frac{\ln^{t-1}N}{N}\right)=O(\ln^{s-1}N).$$

Отсюда, из (17), (18) следует утверждение теоремы.

Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого

Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Roth K. F.* On irregularities of distribution // Mathematika. 1954. V. 1. P. 73–79.

[2] *Davenport H.* Note on irregularities of distribution // Mathematika. 1956. V. 3. P. 131–135.

[3] *Roth K. F.* On irregularities of distribution IV // Acta Arith. 1980. V. XXXVII. P. 67–75.

[4] *Chen W. W. L.* On irregularities of distribution // Mathematika. 1980. V. 27. № 2. P. 153–170.

[5] *Chen W. W. L.* On irregularities of distribution II // Quart. J. Math. 1983. V. 34. № 2. P. 257–279.

[6] *Добровольский Н. М.* Эффективное доказательство теоремы Рота о квадратичном отклонении // УМН. 1984. Т. 39. № 4 (238). С. 155–156.

[7] *Добровольский Н. М.* Оценки отклонений модифицированных сеток Хэммерсли–Рота // Деп. в ВИНИТИ. 1984. № 1365–84.

[8] *Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Муньос М. П.* Алгоритм построения оптимальных модифицированных сеток Хэммерсли–Рота // Математическое моделирование в физико-технических задачах. Тула: Приокское книжное издательство, 1989. С. 92–95.

[9] *Добровольский Н. М., Ванькова В. С.* Новые оценки для модифицированных сеток Хэммерсли–Рота // Деп. в ВИНИТИ. 1990. № 4992–В90.

[10] *Ванькова В. С., Добровольский Н. М.* Об одном алгоритме для многомерных сеток // Республиканская научно-теоретическая конференция “Теория чисел и ее приложения”. Тезисы докладов. Ташкент, 1990.

[11] *Ванькова В. С., Добровольский Н. М., Есаян А. Р.* О преобразованиях многомерных сеток // Деп. в ВИНИТИ. № 447-91.

[12] *Ванькова В. С.* Оценка квадратичного отклонения сеток Холтона. Тула, 1991; // Деп. в ВИНИТИ 18.03.91. № 1157–В91.

[13] *Ванькова В. С.* Квадратичное отклонение сеток Фора–Чена. Тула, 1991; // Деп. в ВИНИТИ 21.11.91. № 4372–И91.

[14] *Ванькова В. С.* Об алгоритмах поиска оптимальных сеток Хэммерсли–Рота и Холтона. Тула, 1991; // Деп. в ВИНИТИ 21.11.91. № 4371–В91.

[15] *Ванькова В. С.* Многомерные теоретико-числовые сетки. Дисс. ... к. ф.-м. н. М.: МГПУ, 1992.

[16] *Ванькова В. С.* О квадратичном отклонении q-регулярных p-ичных сеток // Международная конференция “Современные проблемы теории чисел”. Тезисы докладов. Тула: ТГПИ, 1993. С. 24.

[17] *Добровольский Н. М.* Группы преобразований многомерных сеток // Международная конференция “Современные проблемы теории чисел”. Тезисы докладов. Тула: ТГПИ, 1993. С. 46.

[18] *Добровольский Н. М., Ванькова В. С.* О регулярных p-ичных сетках // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 22–32.

[19] *Добровольский Н. М.* Средние по орбитам многомерных сеток // Матем. заметки. 1995. Т. 58. № 1. С. 48–66.