УДК 511.36

О некоторых теоремах типа принципа переноса

А. И. Галочкин

Доказываются две теоремы, позволяющие предложить новый способ получения оценок мер взаимной трансцендентности значений E-функций Зигеля.

Библиография: 4 названия.

Пусть $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле, $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ — кольцо целых чисел в поле $\mathbb{I}$.

Теорема 1. *Пусть* α_{kj}, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,s}$, — *комплексные числа;* $\theta_1, \dots, \theta_n$ — *алгебраические числа степени* $\varkappa$ *над полем* $\mathbb{I}$. *Пусть, далее, для любого положительного* ε *и любого многочлена* $P(x_0, x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}[x_0, x_1, \dots, x_s]$ *такого, что* $P(\theta_k, x_1, \dots, x_s) \not\equiv 0$, $k = \overline{1,n}$, *выполняется неравенство*

$$\max_{k=\overline{1,n}} |P(\theta_k, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{ks})| > C_1 H^{1-\frac{\varkappa}{n}\binom{d+s}{s}-\varepsilon}, \tag{1}$$

где H *и* d — *соответственно высота многочлена* P *и его степень по переменным* $x_1, \dots, x_s$, *причем постоянная* $C_1 > 0$ *зависит только от поля* $\mathbb{I}$, *степени многочлена* P *и чисел* ε, θ_k *и* α_{kj}.

Тогда для любого натурального числа l, $1 \leqslant l \leqslant n$, *и любого целого числа* $N \geqslant d$, *удовлетворяющего условию*

$$vn - m(n-l) > 0, \tag{2}$$

где

$$m = \binom{N+s}{s}, \quad v = \binom{N-d+s}{s}, \tag{3}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 94–01–00739, и Международного научного фонда, грант MHS000.

выполняется неравенство

$$\max_{k=\overline{1,l}} |P(\theta_k, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{ks})| > C_2 H^{1-\frac{\varkappa mn}{vn-m(n-l)}-\varepsilon} \tag{4}$$

с положительной постоянной C_2, зависящей от тех же величин, что и C_1.

Лемма 1 [1, теорема 5.1]. *Пусть p, q и X — натуральные числа, $q > p$,*

$$L_k = \sum_{j=1}^{q} a_{kj} x_j, \quad k = \overline{1,p}, \quad a_{kj} \in \mathbb{R}.$$

Пусть A_k — такие постоянные, что

$$\sum_{j=1}^{q} |a_{kj}| \leqslant A_k.$$

Тогда существует набор $x_1, \ldots, x_q \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющий неравенствам

$$0 < \max_{j=\overline{1,q}} |x_j| \leqslant X, \quad |L_k| < A_k X^{1-\frac{p}{q}}, \quad k = \overline{1,p}.$$

Лемма 2. *Пусть $\varkappa$, v, l, n — натуральные числа, $l \leqslant n$; θ_k, β_{kj}, $k = \overline{l+1,n}$, $j = \overline{1,v}$, — комплексные числа. Тогда для любого числа $X \geqslant 1$ существуют не все равные нулю многочлены $b_j(x) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}[x]$, $\deg b_j(x) < \varkappa$, $j = \overline{1,v}$, высоты которых не превосходят X и для которых выполняются неравенства*

$$|b_1(\theta_k)\beta_{k1} + \cdots + b_v(\theta_k)\beta_{kv}| < C_3 X^{1-\frac{\varkappa v}{n-l}}, \quad k = \overline{l+1,n}, \tag{5}$$

где постоянная $C_3 > 0$ зависит только от поля $\mathbb{I}$ и чисел θ_k и β_{kj}.

Доказательство. Пусть $\{1, \omega\}$ — базис кольца $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ относительно $\mathbb{Z}$. Через этот базис выразим каждый из коэффициентов многочленов $b_j(x)$. Каждую из линейных форм, стоящих в левой части неравенства (5), разбиваем на действительную и мнимую части. В итоге получим $p = 2(n-l)$ линейных форм с $q = 2\varkappa v$ коэффициентами из $\mathbb{Z}$ и для завершения доказательства к этим линейным формам применим лемму 1.

Будем обозначать через $C_4, C_5, \ldots$ положительные постоянные, не зависящие от X и H.

Доказательство теоремы 1. По лемме 2 для любого $X \geqslant 1$ существует ненулевой многочлен

$$Q(x_0, x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}[x_0, x_1, \ldots, x_s], \tag{6}$$

высота которого не превосходит X, степени удовлетворяют неравенствам

$$\deg_{x_0} Q < \varkappa, \quad \deg_{x_1, \ldots, x_s} Q \leqslant N - d, \tag{7}$$

и

$$|Q(\theta_k, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{ks})| < C_4 X^{1-\frac{\varkappa v}{n-l}}, \quad k = \overline{l+1, n}. \tag{8}$$

Числа β_{kj} в лемме 2 суть произведения степеней

$$\alpha_{k1}^{\mu_1} \cdots \alpha_{ks}^{\mu_s}, \quad \mu_j \in \mathbb{Z}^+, \quad \mu_1 + \cdots + \mu_s \leqslant N - d,$$

а число v определяется из (3).

Так как $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — алгебраические числа степени $\varkappa$, то

$$Q(\theta_k, x_1, \ldots, x_s) \not\equiv 0, \quad k = \overline{1, n},$$

а тогда по условию теоремы

$$Q(\theta_k, x_1, \ldots, x_s) P(\theta_k, x_1, \ldots, x_s) \not\equiv 0, \quad k = \overline{1, n},$$

и в силу (7)

$$\deg_{x_1, \ldots, x_s}(PQ) \leqslant N. \tag{9}$$

Поэтому по условию (1) теоремы для чисел

$$R_k = Q(\theta_k, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{ks}) P(\theta_k, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{ks}) \tag{10}$$

при любом $\varepsilon_1 > 0$ выполняется неравенство

$$\max_{k=\overline{1,n}} |R_k| > C_5 (XH)^{1-\frac{\varkappa m}{n}-\varepsilon_1}, \tag{11}$$

где число m определяется посредством (3). Из (8) и (10) следует, что

$$\begin{aligned} &|R_k| < C_6 X M_l, && k = \overline{1, l}, \\ &|R_k| < C_7 H X^{1-\frac{\varkappa v}{n-l}}, && k = \overline{l+1, n}, \end{aligned}$$

где
$$M_l = \max_{k=\overline{1,l}} |P(\theta_k, \alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{ks})|, \tag{12}$$
что вместе с (11) приводит к оценке
$$XM_l + HX^{1-\frac{\varkappa v}{n-l}} > 2C_8(XH)^{1-\frac{\varkappa m}{n}-\varepsilon_1}. \tag{13}$$

Выберем число X так, чтобы выполнялось равенство
$$HX^{1-\frac{\varkappa v}{n-l}} = C_8(XH)^{1-\frac{\varkappa m}{n}-\varepsilon_1}. \tag{14}$$
Тогда из неравенства (13) получим, что
$$XM_l > C_8(XH)^{1-\frac{\varkappa m}{n}-\varepsilon_1}, \tag{15}$$
и для завершения доказательства теоремы нам осталось выразить X через H из равенства (14) и подставить это значение в оценку (15). При выполнении условия (2) и достаточно малом ε_1 мы получим оценку (4) для величины (12). Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, в частности, что при каждом k числа $\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{ks}$ алгебраически независимы. Подобную теорему можно доказать и в случае алгебраически зависимых величин. Пусть, по-прежнему, $\alpha_{kj} \in \mathbb{C}$, а $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — алгебраические числа степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{I}$. Для каждого натурального числа d из произведения степеней
$$x_1^{\nu_1} \cdots x_s^{\nu_s}, \quad \nu_j \in \mathbb{Z}^+, \quad \nu_1 + \cdots + \nu_s \leqslant d,$$
выделим максимальную подсистему
$$x_1^{\nu_{j1}} \cdots x_s^{\nu_{js}}, \quad j = \overline{1,u}, \quad u = u(d), \tag{16}$$
такую, что для любого ненулевого многочлена
$$L(x_0, y_1, \ldots, y_u) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}[x_0, y_1, \ldots, y_u]$$
линейного относительно переменных $y_1, \ldots, y_u$ и степени, меньшей $\varkappa$ по x_0, хотя бы одно из чисел
$$L(\theta_k, \beta_{k1}, \ldots, \beta_{ku}), \quad k = \overline{1,n},$$
отлично от нуля при
$$\beta_{kj} = \alpha_{k1}^{\nu_{j1}} \cdots \alpha_{ks}^{\nu_{js}}, \quad j = \overline{1,u}, \quad u = u(d). \tag{17}$$

Теорема 2. *Пусть для любого положительного* ε *и любого многочлена*

$$P_1(x_0, x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}[x_0, x_1, \dots, x_s]$$

либо $P_1(\theta_k, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{ks}) = 0$, $k = \overline{1, n}$, *либо выполняется неравенство*

$$\max_{k=\overline{1,n}} |P_1(\theta_k, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{ks})| > C_9 H^{1 - \frac{\varkappa}{n} u(d) - \varepsilon}, \tag{18}$$

где величины H *и* d *имеют тот же смысл, что и в теореме* 1, *а* $u(d)$ *определено посредством* (16).

Тогда для любого натурального числа l, $1 \leqslant l \leqslant n$, *и любого целого числа* $N \geqslant d$, *удовлетворяющего условию* (2) *при*

$$m = u(N), \quad v = u(N - d), \tag{19}$$

и для любого многочлена

$$P_2(x_0, x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}[x_0, x_1, \dots, x_s],$$

такого, что

$$P_2(\theta_k, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{ks}) \neq 0, \quad k = \overline{1, l}, \tag{20}$$

выполняется неравенство

$$\max_{k=\overline{1,l}} |P_2(\theta_k, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{ks})| > C_{10} H^{1 - \frac{\varkappa m n}{v n - m(n-l)} - \varepsilon},$$

где H *и* d — *соответственно высота и степень по* $x_1, \dots, x_s$ *многочлена* P_2, *положительные постоянные* C_9 *и* C_{10} *зависят от тех же величин, что и* C_1 *в теореме* 1, *а числа* m *и* v *определяются с помощью* (19).

Доказательство этой теоремы близко к доказательству теоремы 1, поэтому приведем только его схему.

При помощи леммы 2 построим многочлен $Q(x_0, x_1, \dots, x_s)$, удовлетворяющий условиям (6), (7) и (8) с $v = u(N - d)$. Этот многочлен строится в виде линейной формы от чисел (17) с заменой $u(d)$ на $u(N - d)$ при $N \geqslant d$. В соответствии с определением функции $u(x)$ хотя бы одно из чисел $Q(\theta_k, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{ks})$, $k = \overline{1, n}$, отлично от нуля. Более того, отлично от нуля хотя бы одно из чисел $Q(\theta_k, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{ks})$, $k = \overline{l+1, n}$: в противном случае для многочлена Q оценки (8) и (18) при достаточно большой высоте многочлена будут противоречивыми. Поэтому, ввиду условия (20), хотя бы одно из чисел

$$P_2(\theta_k, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{ks}) Q(\theta_k, \alpha_{k1}, \dots, \alpha_{ks}), \quad k = \overline{l+1, n},$$

отлично от нуля. Оставшаяся часть доказательства, начиная с неравенства (9), повторяется дословно с $m = u(N)$ и $v = u(N-d)$.

Доказанные теоремы позволяют устанавливать связь между двумя типами количественных результатов в методе Зигеля. Введем необходимые обозначения и сформулируем соответствующие результаты.

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраическое числовое поле степени $\varkappa$ над полем $\mathbb{I}$, $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ — совокупность $\mathbb{K}$E-функций (определение дано в [2, гл. 3, § 1]), составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y_i' = Q_{i0}(z) + \sum_{j=1}^{s} Q_{ij}(z) y_j, \quad i = \overline{1, s}, \quad Q_{ij}(z) \in \mathbb{C}(z). \tag{21}$$

Для многочлена $P(x_0, x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \ldots, x_s]$ и числа $\alpha \in \mathbb{K}$ будем обозначать через $P^{[k]} = P^{[k]}\bigl(\alpha, f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha)\bigr)$, $k = \overline{1, \varkappa}$, значения многочлена, в котором коэффициенты, число α и коэффициенты E-функций $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ заменены на соответствующие сопряженные им числа в поле $\mathbb{K}$.

Теорема A [2, гл. 11, § 3]. *Пусть совокупность $\mathbb{K}$E-функций $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ линейно независима вместе с числом 1 над полем $\mathbb{C}(z)$ и составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (21), число $\alpha \in \mathbb{K}$ отлично от нуля и от полюсов коэффициентов $Q_{ij}(z)$ системы. Тогда для любой линейной формы*

$$L = h_0 + h_1 f_1(\alpha) + \cdots + h_s f_s(\alpha)$$

при любом $\varepsilon > 0$ и

$$H = \max_{\substack{j = \overline{0, s} \\ k = \overline{1, \varkappa}}} |h_j^{[k]}| \neq 0$$

выполняется неравенство

$$\max_{k = \overline{1, \varkappa}} |L^{[k]}| > C_{11} H^{-s-\varepsilon},$$

где постоянная $C_{11} > 0$ не зависит от H.

Теорема B (см. [2, гл. 12, § 2] или [3]). *Пусть совокупность $\mathbb{K}$E-функций $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ алгебраически независима над полем $\mathbb{C}(z)$ и составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (21), число $\alpha \in \mathbb{K}$ отлично от нуля и от полюсов коэффициентов $Q_{ij}(z)$ системы. Тогда для любого ненулевого многочлена*

$$P(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}[x_1, \ldots, x_s], \quad d = \deg P,$$

справедливо неравенство

$$|P\big(f_1(\alpha),\ldots,f_s(\alpha)\big)| > C_{12}H^{-\frac{2(2s)^s}{s!}\varkappa^{s+1}d^s}, \tag{22}$$

где H — максимум модулей всех коэффициентов многочлена и всех сопряженных им чисел в поле $\mathbb{K}$, а постоянная $C_{12} > 0$ не зависит от H.

Обычно последние две теоремы доказываются независимо друг от друга с применением вспомогательных утверждений из метода Зигеля. Теорема 1 позволяет вывести теорему B непосредственно из теоремы A.

Действительно, положим в теореме 1 $n = \varkappa$,

$$\alpha_{kj} = f_j^{[k]}(\alpha), \quad k = \overline{1,\varkappa}, \quad j = \overline{1,s}.$$

Поскольку E-функция

$$f_1^{\nu_1}(z)\cdots f_s^{\nu_s}(z), \quad \nu_j \in \mathbb{Z}^+, \quad \nu_1+\cdots+\nu_s \leqslant d,$$

составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений типа (21) и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то из теоремы 1 получаем неравенство (4) с $l = 1$. Из этого неравенства оценка (22) выводится посредством такого же выбора параметра, как и при доказательстве теоремы 1 главы 12 книги [2].

С помощью теоремы 2 удается установить оценку многочлена от значений E-функций при условии, что многочлен при этих значениях отличен от нуля. При этом не предполагается алгебраическая независимость E-функций. Точная формулировка и доказательство этого результата опубликованы в работе [4].

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Фельдман Н. И.* Приближения алгебраических чисел. М.: Изд-во МГУ, 1981.

[2] *Шидловский А. Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

[3] *Галочкин А. И.* Оценка меры трансцендентности значений E-функций // Матем. заметки. 1968. Т. 3. №4. С. 377–386.

[4] *Галочкин А. И.* Оценки снизу многочленов от значений алгебраически зависимых E-функций // ФПМ (Фундаментальная и прикладная математика). 1995. Т. 1. №1. С. 305–309.