Диофантовы приближения

Наум Ильич Фельдман

20 апреля 1994 г. скоропостижно скончался профессор кафедры теории чисел механико-математического факультета Московского университета доктор физико-математических наук Наум Ильич Фельдман.

Н. И. Фельдман родился 26 ноября 1918 г. в г. Мелитополе. В 1936 г. он окончил среднюю школу и поступил учиться на механико-математический факультет Ленинградского университета, который окончил в 1941 г.

В июле 1941 г. Наум Ильич был призван в армию, а в октябре направлен на фронт, где принял участие в боях под Москвой. С тех пор непрерывно до конца войны он находился в действующей армии и закончил свой боевой путь в Восточной Пруссии. За боевые заслуги он награжден рядом орденов и медалей.

В 1946 г. после демобилизации Наум Ильич поступил на учебу в аспирантуру механико-математического факультета Московского университета, которую закончил успешно и в 1949 г. защитил кандидатскую диссертацию. По окончании аспирантуры до 1954 года он работал заведующим кафедрой Уфимского нефтяного института, а с 1954 по 1961 год доцентом Московского геолого-разведочного института.

В сентябре 1961 г. Н. И. Фельдман перешел работать на механико-математический факультет Московского университета.

Наум Ильич был известным специалистом по теории чисел. Основными направлениями его научной деятельности были теория диофантовых приближений, теория трансцендентных чисел и диофантовы уравнения. Он опубликовал 70 статей и две монографии, которые широко известны специалистам во многих странах.

Мы остановимся здесь на двух направлениях научной деятельности Н. И. Фельдмана в теории трансцендентных чисел, развивавших метод, с помощью которого А. О. Гельфонд решил седьмую проблему Гильберта.

Первые работы Н. И. Фельдмана (1949–1951) посвящены оценкам меры трансцендентности некоторых трансцендентных чисел ω, т.е. оценкам снизу величины $|P(\omega)|$ для многочленов $P \in \mathbb{Z}[x]$, в зависимости от степени многочлена $\deg P$ и его высоты $H(P)$ — максимума модулей коэффициентов. Эта задача эквивалентна оценкам снизу расстояния $|\omega - \alpha|$ между ω и алгебраическими числами α в зависимости от степени и высоты α. Подчеркнем, что именно в работах Н. И. Фельдмана, впервые были получены оценки, зависящие от двух параметров $\deg P$ и $H(P)$. Оценки предшествующих исследований явно зависели лишь от $H(P)$. Такие результаты были получены Н. И. Фельдманом для логарифмов алгебраических чисел, алгебраических точек эллиптической функции Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами и, в частности, для числа π и периодов эллиптической функции. Позднее им были опубликованы оценки меры трансцендентности чисел e^θ при алгебраических $\theta \neq 0$, корней уравнений вида $P(z, z^\theta) = 0$, где $P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$, и отношения периодов эллиптической функции Вейерширасса, оценки совместных приближений логарифмов алгебраических чисел и периодов эллиптической функции Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами, оценки меры иррациональности отношения двух алгебраических точек эллиптической функции.

Эта линия в научном творчестве Н. И. Фельдмана прошла через всю его жизнь. Он опубликовал 20 работ посвященных оценкам меры трансцендентности различных чисел. Приведем здесь лишь следующее неравенство

$$|P(\pi)| > e^{-389d(d \log d + \log L)(1+\log d)},$$

где $d > \deg P$ и L — сумма модулей коэффициентов многочлена P, доказанное Н. И. Фельдманом в 1985 г. и справедливое при $d \geqslant d_0$. Эта оценка и сейчас не улучшена. За полгода до своей смерти осенью 1993 г. на конференции по теории чисел в Обервольфахе Н. И. Фельдман утверждал, что может уменьшить константу 389 до 151. К сожалению, этот результат так и остался не опубликованным.

Второе направление исследований Н. И. Фельдмана связано с эффективными оценками снизу модулей линейных форм

$$\beta_0 + \beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m,$$

где α_j, β_j — алгебраические числа, в зависимости от высот и степеней этих алгебраических чисел и других параметров, а также приложениям подобных оценок. В случае $m = 1$ мы фактически имеем здесь оценки меры трансцендентности числа $\log \alpha_1$, а при $m = 2$ и $\beta_0 = 0$ – оценку меры трансцендентности отношения логарифмов алгебраических чисел. Оценки в последнем случае были получены в ряде работ А. О. Гельфонда. В 1966 г. А. Бейкеру удалось получить первые эффективные оценки линейных форм от логарифмов для произвольного $m \geqslant 1$ и применить их для эффективизации решения ряда теоретико-числовых задач. Впоследствии в ряде работ самого А. Бейкера и других математиков эти оценки уточнялись, выяснялась их зависимость от различных параметров, важных в тех или иных приложениях. Многочисленные работы были посвящены и приложениям указанных оценок. Активную роль в этой деятельности принял и Н. И. Фельдман. Ему, в частности, первому удалось доказать в 1968 г. оценку линейной формы, степенную в зависимости от высоты H коэффициентов β_j линейной формы. Развивая использованные при этом идеи, Н. И. Фельдман в 1971 г. впервые доказал эффективное степенное усиление теоремы Лиувилля. А именно, что для любого алгебраического числа α степени $n \geqslant 3$ существуют эффективные положительные константы γ и C такие, что для любого рационального числа p/q справедливо неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant q^{-n+\gamma}.$$

В той же работе было получено и существенное усиление доказанных ранее А. Бейкером эффективных границ для решений уравнения Туэ.

Н. И. Фельдман неоднократно возвращался к полученным ранее результатам и пытался усовершенствовать их доказательства, улучшить оценки. Так, он опубликовал несколько работ об оценке меры трансцендентности числа π, считая эту задачу своеобразным полигоном, на котором удобно шлифовать различные технические приемы.

Н. И. Фельдман придумал множество технических усовершенствований доказательств и новых приемов, вошедших в настоящее время в обиход и зачастую используемых без ссылок на его работы. Так, им впервые было доказано наилучшее в настоящее время неравенство типа теоремы Лиувилля для оценки снизу модуля многочлена от нескольких переменных в алгебраической точке, введены многочлены, названные впоследствии многочленами Фельдмана, позволившие исключить лишние факториальные множители в производных вспомогательной функции и тем самым существенно усилить известные оценки, получены точные оценки целых коэффициентов в представлении производных степени эллиптической функции Вейерштрасса в виде многочлена от самой функции и ее первых двух производных. Он нашел эффективную конструкцию приближений Эрмита–Паде для совокупностей некоторых обобщенных гипергеометрических функций, вариант изложения метода Бейкера оценки линейных форм от логарифмов алгебраических чисел с использованием только функций от одной комплексной переменной и многое другое. Н. И. Фельдман искусно работал с разнообразными функциональными определителями. Явное вычисление таких определителей заменяло ему общие теоремы о числе нулей вспомогательных функций и зачастую способствовало улучшению оценок. Он любил в шутку повторять, что теория трансцендентных чисел — наполовину теория определителей.

Н. И. Фельдман был выдающимся педагогом. Он любил все формы педагогической деятельности и отдавал ей много сил и времени. Читал общие и специальные курсы по математике, руководил специальными семинарами по теории чисел, являлся руководителем студентов, выполняющих курсовые и дипломные работы, руководил аспирантами. Из его учеников 6 защитили кандидатские диссертации.

Наум Ильич отличался высокой порядочностью, принципиальностью, добротой и благожелательностью в общении с друзьями, коллегами и учениками. Он пользовался большим уважением среди студентов, аспирантов, коллег по кафедре и факультету и многих математиков, у которых память о нем как известном ученом, выдающемся педагоге и замечательном человеке останется навсегда.

Ю. В. Нестеренко