УДК 511.217

Специальные полиномы и их приложения

Н. М. Коробов

В первом параграфе настоящей работы вводятся полиномы специального вида, устанавливаются свойства этих полиномов и выясняются их связи с полиномами Бернулли. Второй параграф содержит приложения специальных полиномов к выводу новых интерполяционных формул для функций многих переменных.

Библиография: 2 названия.

§ 1. Специальные полиномы

Пусть $n \geqslant 0$, $p \geqslant 2$ — целые и при любом действительном x числа P_n и полиномы $P_n(x)$ определены равенствами

$$\begin{gathered} P_0 = 1, \quad C_p^1 P_n + \dots + C_p^{n+1} P_0 = 0 \quad (n \geqslant 1), \\ P_0(x) = 1, \quad P_n(x) = P_0 C_x^n + \dots + P_{n-1} C_x^1 + P_n \quad (n \geqslant 1). \end{gathered} \tag{1}$$

Отсюда, в частности, получим

$$\begin{gathered} P_1 = -\frac{p-1}{2}, \quad P_2 = \frac{p^2-1}{12}, \quad P_3 = -\frac{p^2-1}{24}, \\ P_1(x) = x - \frac{p-1}{2}, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{p}{2}x + \frac{p^2-1}{12}, \\ P_3(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{p+1}{4}x^2 + \frac{p^2+3p}{12}x - \frac{p^2-1}{24}. \end{gathered} \tag{2}$$

Заметим, что из определения P_n и $P_n(x)$ непосредственно следуют равенства

$$\begin{gathered} P_n(p) - P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1, n \geqslant 0; \\ p, & \text{если } n = 1, \end{cases} \\ P_n(0) = P_n \quad (n \geqslant 0). \end{gathered} \tag{3}$$

Для всякой функции $f(x)$ через $\Delta f(x)$ будем обозначать ее конечную разность:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Легко показать, что для специальных полиномов $P_n(x)$ выполняются следующие равенства.

1°. $\Delta P_n(x) = P_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1)$.

2°. $\sum_{z=0}^{x-1} P_n(z) = P_{n+1}(x) - P_{n+1} \quad (n \geqslant 0), \quad \sum_{z=0}^{p-1} P_n(z) = 0 \quad (n \geqslant 1)$.

3°. $C_p^1 P_n(x) + \dots + C_p^{n+1} P_0(x) = pC_x^n \quad (n \geqslant 1)$.

4°. При целом $x \in [0, p+n-2]$

$$P_n(x) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}} \quad (n \geqslant 0).$$

Действительно, так как

$$\Delta C_x^n = C_x^{n-1} \quad (n \geqslant 1),$$

то равенство 1° непосредственно следует из определения (1):

$$\begin{aligned} \Delta P_n(x) &= \Delta(P_0 C_x^n + \dots + P_{n-1} C_x^1 + P_n) \\ &= P_0 C_x^{n-1} + \dots + P_{n-2} C_x^1 + P_{n-1} = P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Равенства 2° — очевидные следствия 1° и (3):

$$\sum_{z=0}^{x-1} P_n(z) = \sum_{z=0}^{x-1} \Delta P_{n+1}(z) = P_{n+1}(x) - P_{n+1},$$

$$\sum_{z=0}^{p-1} P_n(z) = P_{n+1}(p) - P_{n+1} = 0.$$

Докажем равенство 3°. Так как

$$P_1(x) = x - \frac{p-1}{2},$$

то 3°, очевидно, выполняется при $n = 1$. Применим индукцию. Пусть равенство 3° справедливо при некотором $n \geqslant 1$:

$$C_p^1 P_n(z) + \dots + C_p^{n+1} P_0(z) = pC_z^n.$$

Суммируя по z от 0 до $x-1$, в силу первого из равенств 2° получим

$$C_p^1[P_{n+1}(x) - P_{n+1}] + \dots + C_p^{n+1}[P_1(x) - P_1] = pC_x^{n+1}.$$

Согласно определению чисел P_ν

$$C_p^1 P_{n+1} + \dots + C_p^{n+1} P_1 + C_p^{n+2} = 0.$$

Складывая последние два равенства получим

$$C_p^1 P_{n+1}(x) + \cdots + C_p^{n+1} P_1(x) + C_p^{n+2} P_0(x) = pC_x^{n+1},$$

чем свойство 3° доказано.

Докажем равенство 4°. Рассмотрим сперва случай $n = 0$. Тогда $x \in [0, p-2]$ и, следовательно, $x+1$ не делится на p. Так как, по определению, $P_0(x) = 1$, то

$$-\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mx}{p}} = 1 - \sum_{m=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{(x+1)m}{p}} = 1,$$

чем равенство 4° доказано для $n = 0$. Применим индукцию. Пусть $x \in [1, p+n-1]$, $z \in [0, p+n-2]$ и равенство 4° доказано для некоторого $n \geqslant 0$:

$$P_n(z) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} e^{2\pi i \frac{mz}{p}}.$$

Отсюда, пользуясь первым из равенств 2°, получим

$$\sum_{z=0}^{x-1} P_n(z) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} \sum_{z=0}^{x-1} e^{2\pi i \frac{mz}{p}},$$

$$P_{n+1}(x) - P_{n+1} = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^n} \frac{e^{2\pi i \frac{mx}{p}} - 1}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1}. \qquad (4)$$

Равенство (4) выполняется, очевидно, и при $x = 0$. Следовательно, согласно второму из равенств 2°,

$$\sum_{x=0}^{p-1} [P_{n+1}(x) - P_{n+1}] = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{n+1}} \sum_{x=0}^{p-1} (e^{2\pi i \frac{mx}{p}} - 1),$$

$$P_{n+1} = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{n+1}}. \qquad (5)$$

Подставляя этот результат в (4) при $x \in [0, p+n-1]$ получим

$$P_{n+1}(x) = -\sum_{m=1}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1)^{n+1}} e^{2\pi i \frac{mx}{p}},$$

чем свойство 4° доказано при любом $n \geqslant 0$.

Рассмотрим теперь связи между специальными полиномами и полиномами Бернулли. Напомним, что числа и полиномы Бернулли определяются равенствами

$$B_0 = 1, \quad C_{n+1}^1 B_n + \cdots + C_{n+1}^n B_1 + C_{n+1}^{n+1} B_0 = 0 \quad (n \geqslant 1),$$
$$B_0(x) = 1, \quad B_n(x) = C_n^0 B_0 x^n + \cdots + C_n^{n-1} B_{n-1} x + B_n \quad (n \geqslant 1).$$

В частности

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0,$$
$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$
$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Приведем некоторые известные свойства полиномов Бернулли:

$$B_n(1) - B_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1; \\ 1, & \text{если } n = 1 \end{cases} \quad (n \geqslant 0),$$
$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad \int_0^1 B_n(x)dx = 0 \quad (n \geqslant 1).$$

Для специальных полиномов аналогом этих свойств являются свойства (3), 1° и 2°:

$$\frac{1}{p}\big[P_n(p) - P_n(0)\big] = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 1; \\ 1, & \text{если } n = 1 \end{cases} \quad (n \geqslant 0),$$
$$\Delta P_n(x) = P_{n-1}(x), \quad \sum_{z=0}^{p-1} P_n(z) = 0 \quad (n \geqslant 1).$$

Общая основа этих аналогий состоит в замене непрерывных объектов на дискретные: производных на конечные разности, интегралов на конечные суммы, рядов Фурье на конечные преобразования Фурье.

Приведем еще некоторые тождества непосредственно следующие из вида полиномов $P_\nu(x)$ и $B_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, 3$):

$$P_1(x) = pB_1\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{2}, \quad P_2(x) = \frac{p^2}{2}B_2\left(\frac{x}{p}\right) - \frac{1}{12},$$
$$P_3(x) = \frac{p^3}{6}B_3\left(\frac{x}{p}\right) - \frac{p^2}{4}B_2\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{24}.$$

Эти равенства представляют собой частные случаи общей теоремы, связывающей специальные полиномы с полиномами Бернулли.

Пусть при $\nu = 1, 2, \ldots, n$ величины $A_\nu(n)$ определены тождеством

$$x(x-1)\cdots(x-n+1) = A_1(n)x^n - A_2(n)x^{n-1} + \cdots \pm A_n(n)x. \quad (6)$$

Заметим, что числа $A_\nu(n)$ (числа Стирлинга) удовлетворяют соотношениям

$$A_\nu(n+1) = nA_{\nu-1}(n) + A_\nu(n),$$
$$A_0(n) = A_{n+1}(n) = 0, \quad A_1(n) = 1,$$

упрощающим вычисление коэффициентов разложения (6).

Теорема 1. *При $n \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$n!P_{n+1}(x) = A_1(n)\frac{p^{n+1}B_{n+1}\left(\frac{x}{p}\right) - B_{n+1}}{n+1} - \cdots \pm A_n(n)\frac{p^2B_2\left(\frac{x}{p}\right) - B_2}{2},$$

где $A_\nu(n)$ — числа Стирлинга, а B_ν и $B_\nu(x)$ соответственно числа и полиномы Бернулли.

Доказательству теоремы предпошлем одну лемму.

Лемма 1. *Пусть $p \geqslant 2$, n, m, x — натуральные числа,причем x кратно p, и m не делится на p. Тогда*

$$\sum_{z=0}^{x-1} C_z^n e^{-2\pi i\frac{mz}{p}} = -\frac{e^{2\pi i\frac{m}{p}}}{e^{2\pi i\frac{m}{p}} - 1}C_x^n - \cdots - \frac{e^{2\pi i\frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i\frac{m}{p}} - 1)^n}C_x^1.$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{z=0}^{x-1} C_z^n e^{-2\pi i\frac{mz}{p}} = C_x^n\sum_{z=0}^{x-1} e^{-2\pi i\frac{mz}{p}} - \sum_{z=0}^{x-1}(C_{z+1}^n - C_z^n)\sum_{k=0}^{z} e^{-2\pi i\frac{mk}{p}}. \quad (7)$$

Так как при x кратном p, и m не делящемся на p

$$\sum_{z=0}^{x-1} e^{-2\pi i\frac{mz}{p}} = 0,$$

то из (7) следует,что

$$\sum_{z=0}^{x-1} C_z^n e^{-2\pi i\frac{mz}{p}} = -\sum_{z=0}^{x-1} C_z^{n-1}\frac{e^{-2\pi i\frac{mz}{p}} - e^{2\pi i\frac{m}{p}}}{1 - e^{2\pi i\frac{m}{p}}}$$
$$= -\frac{e^{2\pi i\frac{m}{p}}}{e^{2\pi i\frac{m}{p}} - 1}C_x^n + \frac{1}{e^{2\pi i\frac{m}{p}} - 1}\sum_{z=0}^{x-1} C_z^{n-1}e^{-2\pi i\frac{mz}{p}}.$$

Отсюда, очевидно, следует утверждение леммы 1.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. При целом z обозначим через $\delta_p(z)$ характеристическую функцию делимости на p:

$$\delta_p(z) = \frac{1}{p}\sum_{m=0}^{p-1} e^{2\pi i\frac{mz}{p}} = \begin{cases} 1, & \text{если } z \text{ кратно } p; \\ 0, & \text{если } z \text{ не кратно } p. \end{cases} \tag{8}$$

Покажем, что при любых натуральных $p \geqslant 2$, n и x выполняется равенство

$$p\sum_{z=0}^{x-1} C_{pz}^n = P_{n+1}(px) - P_{n+1}. \tag{9}$$

Действительно, согласно (8)

$$\begin{aligned} p\sum_{z=0}^{x-1} C_{pz}^n &= p\sum_{z=0}^{px-1} C_z^n\delta_p(z) = \sum_{m=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{px-1} C_z^n e^{2\pi i\frac{mz}{p}} \\ &= C_{px}^{n+1} + \sum_{m=1}^{p-1}\sum_{z=0}^{px-1} C_z^n e^{-2\pi i\frac{mz}{p}}. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь леммой 1 и равенством (5), получим

$$\begin{aligned} p\sum_{z=o}^{x-1} C_{pz}^n &= C_{px}^{n+1} - \sum_{m=1}^{p-1}\left(\frac{e^{2\pi i\frac{m}{p}}}{e^{2\pi i\frac{m}{p}}-1}C_{px}^n + \cdots + \frac{e^{2\pi i\frac{m}{p}}}{(e^{2\pi i\frac{m}{p}}-1)^n}C_{px}^1\right) \\ &= C_{px}^{n+1} + P_1C_{px}^n + \cdots + P_nC_{px}^1. \end{aligned}$$

Но, согласно (1),

$$C_{px}^{n+1} + P_1C_{px}^n + \cdots + P_nC_{px}^1 = P_{n+1}(px) - P_{n+1}$$

и, следовательно,

$$p\sum_{z=0}^{x-1} C_{pz}^n = P_{n+1}(px) - P_{n+1}.$$

Покажем теперь, что при любых натуральных n и x справедливо равенство

$$\begin{aligned} n!\big(P_{n+1}(px) - P_{n+1}\big) = A_1(n)p^{n+1}\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}}{n+1} - \cdots \\ \pm A_n(n)p^2\frac{B_2(x) - B_2}{2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Действительно, согласно (9) и (6), получим

$$
\begin{aligned}
n!\big(P_{n+1}(px) - P_{n+1}\big) &= p\sum_{z=0}^{x-1} pz(pz-1)\cdots(pz-n+1)\\
&= A_1(n)p^{n+1}\sum_{z=0}^{x-1} z^n - \cdots \pm A_n(n)p^2\sum_{z=0}^{x-1} z.
\end{aligned}
$$

Отсюда, так как

$$
\sum_{z=0}^{x-1} z^\nu = \frac{B_{\nu+1}(x) - B_{\nu+1}}{\nu+1},
$$

следует равенство (10).

Равенство полиномов (10), доказанное для натуральных x, будет, очевидно, справедливо и при произвольных значениях x. Заменим в (10) x на $\frac{x}{p}$:

$$
\begin{aligned}
n!\big(P_{n+1}(x) - P_{n+1}\big) = A_1(n)p^{n+1}\frac{B_{n+1}\left(\frac{x}{p}\right) - B_{n+1}}{n+1} - \cdots\\
\pm A_n(n)p^2\frac{B_2\left(\frac{x}{p}\right) - B_2}{2}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Проводя суммирование по x и пользуясь вторым из равенств 2°, получим

$$
\begin{aligned}
-n!pP_{n+1} = \sum_{x=0}^{p-1}\Bigg(A_1(n)p^{n+1}\frac{B_{n+1}\left(\frac{x}{p}\right) - B_{n+1}}{n+1} - \cdots\\
\pm A_n(n)p^2\frac{B_2\left(\frac{x}{p}\right) - B_2}{2}\Bigg).
\end{aligned}
$$

Отсюда, так как

$$
B_\nu = p^{\nu-1}\sum_{x=0}^{p-1} B_\nu\left(\frac{x}{p}\right),
$$

следует, что

$$
n!P_{n+1} = A_1(n)\frac{p^{n+1}-1}{n+1}B_{n+1} - \cdots \pm A_n(n)\frac{p^2-1}{2}B_2.
$$

Подставляя этот результат в равенство (11), получаем утверждение теоремы 1.

Исследование свойств чисел и полиномов Бернулли удобно проводить с помощью производящих функций

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nt^n}{n!},$$
$$\frac{te^{tx}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)t^n}{n!}.$$

Пользуясь свойством 4°, можно установить вид производящих функций для чисел P_n и специальных полиномов:

$$\frac{pt}{(t+1)^p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_nt^n,$$
$$\frac{pt(t+1)^x}{(t+1)^p-1}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n.$$

Как и в случае полиномов Бернулли, использование производящих функций значительно упрощает изучение свойств чисел P_n и специальных полиномов $P_n(x)$.

§ 2. Интерполяционные формулы

В этом параграфе рассматриваются функции s переменных, определенные в рациональных точках с общим знаменателем $p \geqslant 2$:

$$f\left(\frac{x_1}{p},\dots,\frac{x_s}{p}\right),\quad 0\leqslant x_\nu\leqslant p-1\quad(\nu=1,2,\dots,s).$$

При $s=1$ наряду с принятым ранее обозначением конечной разности будем пользоваться обозначениями

$$\Delta^0 f\left(\frac{x}{p}\right)=f\left(\frac{x}{p}\right),\quad \Delta^1 f\left(\frac{x}{p}\right)=f\left(\frac{x+1}{p}\right)-f\left(\frac{x}{p}\right).$$

Конечную разность порядка $n \geqslant 1$ определим с помощью рекуррентного соотношения

$$\Delta^n f\left(\frac{x}{p}\right)=\Delta^1\left(\Delta^{n-1} f\left(\frac{x}{p}\right)\right).$$

В случае функции двух переменных будем применять следующие обозначения

$$\Delta^{1,0} f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) = f\left(\frac{x_1+1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) - f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right),$$

$$\Delta^{0,1} f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) = f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2+1}{p}\right) - f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right),$$

$$\Delta^{n_1,n_2} f\left(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\right) = \begin{cases} \Delta^{1,0}\Big(\Delta^{n_1-1,n_2} f\big(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\big)\Big); \\ \Delta^{0,1}\Big(\Delta^{n_1,n_2-1} f\big(\frac{x_1}{p}, \frac{x_2}{p}\big)\Big). \end{cases}$$

Аналогично определяются конечные разности для функций многих переменных.

Лемма 2. *Пусть функция* $f\left(\frac{x}{p}\right)$ *определена для целых* x *и имеет период равный* p. *Тогда для любого натурального* n *выполняется равенство*

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) P_n(k).$$

Доказательство. Пользуясь преобразованием Абеля

$$\sum_{k=0}^{p-1} F(k)\varphi(k) = F(p)\sum_{k=0}^{p-1}\varphi(k) - \sum_{k=0}^{p-1}\big(F(k+1)-F(k)\big)\sum_{z=0}^{k}\varphi(z)$$

при $F(k) = f\left(\frac{k+x}{p}\right)$ и $\varphi(k)=1$, получим

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k+x}{p}\right) = pf\left(\frac{x}{p}\right) - \sum_{k=0}^{p-1}\Delta^1 f\left(\frac{k+x}{p}\right)(k+1). \tag{12}$$

В силу периодичности функции $f\left(\frac{x}{p}\right)$ справедливы равенства

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k+x}{p}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right), \quad \sum_{k=0}^{p-1}\Delta^1 f\left(\frac{k+x}{p}\right) = 0.$$

Пользуясь этими равенствами, получим из (12)

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^1 f\left(\frac{k+x}{p}\right)\left(k - \frac{p-1}{2}\right),$$

что совпадает с утверждением леммы при $n = 1$:

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^1 f\left(\frac{k+x}{p}\right) P_1(k).$$

Применим индукцию. Пусть лемма верна при некотором $n \geqslant 1$:

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{(-1)^{n-1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) P_n(k). \quad (13)$$

Применяя преобразование Абеля и пользуясь свойствами 2°, получим

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) P_n(k)& \\
&= \Delta^n f\left(\frac{x+1-n}{p}\right) \sum_{k=0}^{p-1} P_n(k) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n+1} f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) \sum_{z=0}^{k} P_n(z) \\
&= -\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n+1} f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right) \Bigl(P_{n+1}(k+1) - P_{n+1}\Bigr) \\
&= -\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n+1} f\left(\frac{k+x-n}{p}\right) P_{n+1}(k).
\end{aligned}$$

Подставляя этот результат в равенство (13), получим

$$f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) + \frac{(-1)^{n}}{p}\sum_{k=0}^{p-1} \Delta^{n+1} f\left(\frac{k+x-n}{p}\right) P_{n+1}(k),$$

чем лемма 2 доказана для любого $n \geqslant 1$.

Определим функции $\varphi_n(x)$ с помощью равенств

$$\varphi_n(x) = (-1)^{n-1} P_n\left(p\left\{\frac{x+n-1}{p}\right\}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (14)$$

где $\left\{\frac{x+n-1}{p}\right\}$ — дробная доля числа $\frac{x+n-1}{p}$.

Лемма 3. *Пусть функция* $f\left(\frac{x_1}{p},\dots,\frac{x_s}{p}\right)$ *периодична с периодом* p *по каждой из переменных* $x_1,\dots,x_s$. *Тогда при любом* $n \geqslant 1$ *справедливо равенство*

$$f\left(\frac{x_1}{p},\dots,\frac{x_s}{p}\right)=\frac{1}{p^s}\sum_{\tau_1,\dots,\tau_s=0}^{1}\sum_{k_1,\dots,k_s=0}^{p-1}\Delta^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}f\left(\frac{k_1}{p},\dots,\frac{k_s}{p}\right)\times\prod_{\nu=1}^{s}\varphi_n^{\tau_\nu}(k_\nu-x_\nu). \quad (15)$$

Доказательство. Покажем, что утверждение леммы 2 можно записать в виде

$$f\left(\frac{x}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{\tau=0}^{1}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^{n\tau}f\left(\frac{k}{p}\right)\varphi_n^{\tau}(k-x). \quad (16)$$

Действительно, согласно (14)

$$\Delta^{n\tau}f\left(\frac{k}{p}\right)\varphi_n^{\tau}(k-x)=\begin{cases} f\left(\frac{k}{p}\right), & \text{если}\quad \tau=0;\\ (-1)^{n-1}\Delta^n f\left(\frac{k}{p}\right)P_n\left(p\left\{\frac{k-x+n-1}{p}\right\}\right), & \text{если}\quad \tau=1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{p}\sum_{\tau=0}^{1}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^{n\tau}f\left(\frac{k}{p}\right)\varphi_n^{\tau}(k-x)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}f\left(\frac{k}{p}\right)+\frac{(-1)^{n-1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^n f\left(\frac{k}{p}\right)P_n\left(p\left\{\frac{k-x+n-1}{p}\right\}\right). \quad (17)$$

Теперь, пользуясь леммой 2 и замечая, что

$$\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^n f\left(\frac{k}{p}\right)P_n\left(p\left\{\frac{k-x+n-1}{p}\right\}\right)=\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right)P_n(k),$$

из (17) получаем равенство (16):

$$\frac{1}{p}\sum_{\tau=0}^{1}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^{n\tau}f\left(\frac{k}{p}\right)\varphi_n^{\tau}(k-x)$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}f\left(\frac{k}{p}\right)+\frac{(-1)^{n-1}}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\Delta^n f\left(\frac{k+x+1-n}{p}\right)P_n(k)$$
$$=f\left(\frac{x}{p}\right).$$

Применяя равенство (16) последовательно по каждой из переменных функции $f\left(\frac{x_1}{p},\dots,\frac{x_s}{p}\right)$, получаем утверждение леммы 3.

Пусть функция $F\left(\frac{k_1}{p},\dots,\frac{k_s}{p}\right)$, принадлежит классу $E_{s,p}^{\alpha}$. Легко показать (см. [1] и [2]), что тогда при любом натуральном α справедлива следующая формула приближенного суммирования

$$\frac{1}{p^s}\sum_{k_1,\dots,k_s=0}^{p-1}F\left(\frac{k_1}{p},\dots,\frac{k_s}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}F\left(\frac{a_1k}{p},\dots,\frac{a_sk}{p}\right)+O\left(p^{-\alpha}\ln^{\alpha s}p\right), \tag{18}$$

где $a_1,\dots,a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, имеющие индекс равный s.

Теорема 2. *Пусть $\alpha\geqslant 2$ — четное, $n=\alpha/2$, $f(y_1,\dots,y_s)$ — периодическая функция из класса H_s^{α} и индекс оптимальных коэффициентов $a_1,\dots,a_s$ равен s. Тогда справедлива интерполяционная формула*

$$f\left(\frac{x_1}{p},\dots,\frac{x_s}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{\tau_1,\dots,\tau_s=0}^{1}\sum_{k=1}^{p}\Delta^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}f\left(\frac{a_1k}{p},\dots,\frac{a_sk}{p}\right)\times\prod_{\nu=1}^{s}\varphi_n^{\tau_\nu}(a_\nu k-x_\nu)+O(p^{-n}\ln^{sn}p). \tag{19}$$

Доказательство. Согласно теореме 28 из [2] для периодических функций $f\in H_s^{\alpha}$ при четном $\alpha\geqslant 4$ и $n=\alpha/2$ справедлива интерполяционная формула

$$f\left(\frac{x_1}{p},\dots,\frac{x_s}{p}\right)=\frac{1}{p}\sum_{\tau_1,\dots,\tau_s=0}^{1}\sum_{k=1}^{p}f^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}\left(\frac{a_1k}{p},\dots,\frac{a_sk}{p}\right)\times\prod_{\nu=1}^{s}\psi_n^{\tau_\nu}\left(\frac{a_\nu k-x_\nu}{p}\right)+O(p^{-n}\ln^{sn}p). \tag{20}$$

Здесь $f^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}$ — смешанные частные производные функции f порядка $n\tau_1+\dots+n\tau_s$ и

$$\psi_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}B_n(\{x\}).$$

Легко видеть, что интерполяционная формула теоремы 2 является конечным аналогом интерполяционной формулы (20). Доказательство теоремы 2 представляет собой дословное повторение доказательства теоремы 28 цитированной работы с заменой в нем кратных интегралов на кратные суммы, смешанных частных производных $f^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}$ на смешанные конечные разности $\Delta^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}f$, рядов Фурье на конечные ряды Фурье и полиномов Бернулли $B_n(x)$ на специальные полиномы $P_n(x)$.

Действительно, сперва убеждаемся в том, что в лемме 3 функция

$$\Delta^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}f\left(\frac{k_1}{p},\dots,\frac{k_s}{p}\right)\prod_{\nu=1}^{s}\varphi_n^{\tau_\nu}(k_\nu-x_\nu).$$

принадлежит классу $E^n_{s,p}$. Затем, применяя к сумме

$$\frac{1}{p^s}\sum_{k_1,\dots,k_s=0}^{p-1}\Delta^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}f\left(\frac{k_1}{p},\dots,\frac{k_s}{p}\right)\prod_{\nu=1}^{s}\varphi_n^{\tau_\nu}(k_\nu-x_\nu)$$

формулу приближенного суммирования (18), из равенства (15) получаем утверждение теоремы 2.

Замечание. Для того, чтобы с помощью формулы (20) приближенно вычислить функцию f в любой из p^s точек равномерной сетки

$$\left(\frac{x_1}{p},\dots,\frac{x_s}{p}\right),\quad 0\leqslant x_\nu\leqslant p-1\quad(\nu=1,2,\dots,s)$$

необходимо знать не только значения функции f в специально выбранных p точках, но и значения в этих точках ее частных производных $f^{n\tau_1,\dots,n\tau_s}$. В отличие от этого интерполяционная формула (19), полученная в теореме 2, при том же числе слагаемых в приближающей сумме, требует лишь знания избранных значений функции f и не нуждается в знании значений ее производных. Другим преимуществом интерполяционной формулы (19) является то, что она справедлива не только при четных $\alpha\geqslant 4$, но и при $\alpha=2$.

Институт истории
естествознания и техники РАН

Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Коробов Н. М.* О некоторых вопросах теории диофантовых приближений // УМН. 1967. Т. 22. №3. С. 83–118.
[2] *Коробов Н. М.* Теоретикочисловые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.