УДК 511.6

Об алгебраических числах малой логарифмической высоты

Е. М. Матвеев

Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$ — алгебраическое число степени $d \geqslant 2$, $M(\alpha)$ — его мера Малера, тогда $\max\{\ln M(\alpha), |\ln \alpha|\} > 8/9d\ln(2.2d)$. Если α — число Салема, то $|\alpha| > \exp\bigl(1/d\,\ln(2.4d)\bigr)$.

Библиография: 12 названий.

§1. Введение

Пусть α — корень неприводимого над $\mathbb{Z}$ многочлена

$$P_\alpha(z) = a_0(z - \alpha^{(1)}) \cdots (z - \alpha^{(d)}) = a_0 z^d + \cdots + a_{d-1}z + a_d. \tag{1}$$

Комплексные числа $\alpha^{(\sigma)}$ называют сопряженными с α. Будем отождествлять α с $\alpha^{(1)}$. Мерой Малера числа α называется выражение

$$M(\alpha) = |a_0| \prod_{\sigma=1}^{d} \max\{1, |\alpha^{(\sigma)}|\}.$$

Очевидно, что $M(\alpha) \geqslant 1$, при этом из теоремы Кронекера следует, что если $M(\alpha) = 1$, то α — корень из единицы или нуль, более того, существует функция $\psi(d) > 1$, для которой из неравенства $M(\alpha) < \psi(d)$ следует, что α — корень из единицы или нуль (далее мы будет предполагать, что $\alpha \neq 0$, не оговаривая этого особо). Точный вид $\psi(d)$ неизвестен. Лемер [1] высказал гипотезу, что в качестве $\psi(d)$ можно выбрать абсолютную константу. Найденное Лемером рекордно малое значение $M(\alpha) = 1.176\ldots$ не превзойдено до сих пор. Компьютерные исследования Бойда [2] позволили проверить эту гипотезу для $d \leqslant 26$.

Из доказанных утверждений отметим следующие. Очевидно, если $M(\alpha) < 2$, то α — алгебраическая единица. В 1971 г. Смит [3] доказал, что если $M(\alpha) < \theta$, где $\theta = 1.324\ldots$ — корень уравнения $\theta^3 - \theta - 1 = 0$, то α — взаимное (возвратное) число, т.е. α и $1/\alpha$ алгебраически сопряжены. В 1979 г. Добровольский [4] доказал асимптотическую оценку

$$\psi(d) = O(1)\,(\ln\ln d/\ln d)^3, \quad d \to \infty. \tag{2}$$

Дальнейшие работы в этом направлении только улучшали константу в $O(1)$. Из них следует выделить статью Кантора и Штрауса [5] 1982 г., где впервые было предложено использовать для этих целей некоторый интерполяционный определитель.

Ввиду теоретической и практической значимости проблемы имеется множество публикаций по этому вопросу, включая монографию [6]. Большой интерес представляют явные оценки $M(\alpha)$, пусть даже худшей асимптотики, чем (1). Здесь наилучшей является оценка Бланксби и Монтгомери [7] 1971 г.

$$M(\alpha) \geqslant 1 + 1/52d\,\ln(6d) \tag{3}$$

в случае, если α — не корень из единицы.

Активно развивающаяся теория линейных форм от логарифмов алгебраических чисел (см., например, [8]) прояснила важность еще одной характеристики алгебраических чисел — $M_0(\alpha) = \max\{\ln M(\alpha), |\ln\alpha|\}$. Здесь можно сделать следующее утверждение существует такая функция $\psi_0(d) > 0$, для которой из неравенства $M_0(\alpha) < \psi_0(d)$ следует, что $\alpha = 1$. При этом утверждение аналогичное гипотезе Лемера будет неверным, поскольку для исключения корней из единицы приходится брать

$$\psi_0(d) \leqslant \pi/2d\,\ln\ln(6d) \tag{4}$$

(см. [8]). До сих пор оценки для $M_0(\alpha)$ получались путем соединения оценки для $M(\alpha)$ и для корней из 1. Отметим, что зависимость правых частей от d в (3), (4) одного порядка.

Основной целью данной работы является получение улучшенной явной оценки снизу для $M_0(\alpha)$, $\alpha \neq 1$. В качестве основы для доказательства взята работа Миньота и Вальдшмидта [9]. Хотя она и не содержит оценки $M_0(\alpha)$, однако, в ней дается явная оценка снизу для $|\ln\alpha|$, зависящая от d и $M(\alpha)$. В настоящей работе их оценка усилена и из нее получено неравенство для $M_0(\alpha)$, лучшее, чем (3) для $\ln M(\alpha)$.

§ 2. Обозначения и общая теорема

Пусть дано поле $\mathbb{K}$ степени D над $\mathbb{Q}$, т.е. $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = D$, $\mathbb{K}^*$ — множество его ненулевых элементов. Имеется D вложений $\mathbb{K}^{(\sigma)}$ поля $\mathbb{K}$ в $\mathbb{C}$, соответственно, определены архимедовские нормирования $\mathbb{K} : |\alpha|_\sigma = |\alpha^{(\sigma)}|$,

$1 \leqslant \sigma \leqslant D$. Хотя комплексно сопряженные вложения дают одинаковые нормы, для удобства мы будем учитывать их по отдельности.

Пронумеруем простые идеалы $\mathbb{K}$ индексами $\sigma > D$, соответственно будут пронумерованы неархимедовские нормирования:

$$|\alpha|_\sigma = (\operatorname{Norm} p)^{-m}, \quad m = \operatorname{ord}_p(\alpha), \quad p = p_\sigma \quad \sigma > D.$$

Имеет место формула произведения:

$$1 = \prod_{\sigma=1}^{\infty} |\alpha|_\sigma, \quad \alpha \neq 0,$$

в котором отлично от единицы только конечное число сомножителей. Множество всех индексов будем обозначать через $\mathscr{N} = \mathscr{N}(\mathbb{K})$, а $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{K}) = \{1, \ldots, D\}$.

Если $\gamma^m \in \mathbb{K}^*$, то можно, не расширяя $\mathbb{K}$, определить:

$$|\gamma|_\sigma = |\gamma^m|_\sigma^{1/m}, \quad \sigma \in \mathscr{N}; \quad \ln \gamma^{(\sigma)} = m^{-1} \ln((\gamma^m)^{(\sigma)}), \quad \sigma \in \mathscr{D}.$$

Для таких γ тоже выполняется формула произведения.

Теорема 1. *Пусть даны различные* $\beta_1, \ldots, \beta_J \in \mathbb{K}^*$ $(J \geqslant 2)$, $\gamma^m \in \mathbb{K}^*$; *выбран набор* $\mathscr{S} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_S\} \subseteq \mathscr{D}$ *и некоторые значения* $\ln \alpha_j^{(\sigma)}$, $\alpha_j = \gamma\beta_j$, $1 \leqslant j \leqslant J$, *и* $\zeta_\sigma \in \mathbb{C}$, $\sigma \in \mathscr{S}$. *Положим*

$$H = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^{J} \sum_{\sigma \notin \mathscr{S}} \bigl|\ln |\alpha_j|_\sigma\bigr|, \quad \Lambda = \frac{1}{JS} \sum_{j=1}^{J} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} |\ln \alpha_j^{(\sigma)} - \zeta_\sigma|.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\Lambda \geqslant \exp\bigl(-1 - H/S - (D \ln J)/(J-1)S\bigr). \tag{5}$$

Лемма (см. [10]). *Пусть даны функции* $g_1(z), \ldots, g_J(z)$, *аналитические в нуле и числа* $a_1, \ldots, a_J \in \mathbb{C}$. *Тогда определитель* $\det\bigl(g_j(a_n z)\bigr)_{j=1,\ldots,J}^{n=1,\ldots,J}$ *имеет при* $z = 0$ *нуль порядка* $\geqslant J(J-1)/2$.

Доказательство теоремы. Положим $T=(J-1)/2$ и рассмотрим

$$\Delta=\det\bigl(\alpha_j^{n-T}\bigr)_{j=1,\dots,J}^{n=0,\dots,J-1}.$$

Очевидно, $\Delta^{2m}\in\mathbb{K}$ и при различных α_j отличен от нуля.

Положим $f_\sigma(z)=|\Delta|_\sigma$, $\sigma\notin\mathscr{S}$ (фактически не зависят от z), а для $\sigma\in\mathscr{S}$

$$\begin{aligned}f_\sigma(z)&=z^{-JT}\det\Bigl(\bigl(\alpha_j^{(\sigma)}\bigr)^{z(n-T)}\Bigr)_{j=1,\dots,j}^{n=0,\dots,J-1}\\&=z^{-JT}\det\Bigl(\exp\bigl(z(n-T)(\ln\alpha_j^{(\sigma)}-\zeta_\sigma)\bigr)\Bigr)_{j=1,\dots,J}^{n=0,\dots,J-1}.\end{aligned}$$

Кроме того, положим $f(z)=\prod_{\sigma=1}^{\infty}f_\sigma(z)$.

Легко видеть, что во всех случаях $|f_\sigma(1)|=|\Delta|_\sigma$, поэтому формула произведения дает, что $|f(1)|=1$. По лемме $f(z)$ имеет устранимую особенность в нуле.

Оценим теперь $|f_\sigma(z)|$ и $|f(z)|$ сверху. Мы имеем

$$|f_\sigma(z)|\leqslant\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{J}T\bigl|\ln|\alpha_j|_\sigma\bigr|\Biggr),\quad\sigma\notin\mathscr{D}.$$

При $\sigma\in\mathscr{D}$ для определителя можно применить неравенство Адамара:

$$|f_\sigma(z)|\leqslant J^{J/2}\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{J}T\bigl|\ln|\alpha_j|_\sigma\bigr|\Biggr),\quad\sigma\in\mathscr{D},\quad\sigma\notin\mathscr{S},$$

$$|f_\sigma(z)|\leqslant|z|^{-JT}J^{J/2}\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{J}|z|T\bigl|\ln\alpha_j^{(\sigma)}-\zeta_\sigma\bigr|\Biggr),\quad\sigma\in\mathscr{S}.$$

Умножая эти неравенства, с учетом обозначений теоремы имеем

$$|f(z)|\leqslant\exp(0.5DJ\ln J+HTJ+\Lambda JST|z|-JTS\ln|z|).$$

Применим принцип максимума к окружности $|z|=R=1/\Lambda$. Если $1/\Lambda\leqslant1$, то неравенство (5) очевидно. Если $R>1$, то

$$\begin{aligned}0=\ln|f(1)|&\leqslant\max\{\ln|f(z)|:|z|=R\}\\&\leqslant0.5DJ\ln J+HTJ+TJS-TJS\ln(1/\Lambda),\end{aligned}$$

откуда с учетом, что $2T=J-1$ получаем (5).

§ 3. Оценка снизу логарифмов алгебраических чисел

Пусть $\alpha \in \mathbb{K}^*$, выбран набор $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{D}$, фиксированы некоторые значения $\ln\alpha^{(\sigma)}$, $\sigma \in \mathscr{S}$. Введем обозначения

$$\mu = \mu(\alpha, \mathscr{S}) = 0.5 \sum_{\sigma \notin \mathscr{S}} \bigl|\ln|\alpha|_\sigma\bigr|,$$
$$\lambda = \lambda(\alpha, \mathscr{S}) = S^{-1} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} |\ln\alpha^{(\sigma)}|.$$

Следующая теорема несколько перекликается с работой [11] и усиливает результат, анонсированный в [12].

Теорема 2. *Пусть дано $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\alpha \neq 1$, выбран набор $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{D}$, фиксированы некоторые значения $(\ln\alpha^{(\sigma)})$, $\sigma \in \mathscr{S}$. Тогда*

$$\operatorname{sh}(\lambda/2) \geqslant \exp\bigl(-(D\ln 2 + \mu)/S\bigr). \tag{6}$$

Следствие 1 (оценка типа неравенства Лиувилля). *В обозначениях теоремы 2 при $\beta = \bigl(3+\sqrt{5}\bigr)/2$ выполняется*

$$\lambda \geqslant 2\ln\beta\exp\bigl(-(D\ln 2 + \mu)/S\bigr). \tag{7}$$

Следствие 2. *Если $\alpha \neq 1$ — алгебраическая единица, то $\lambda(\alpha, \mathscr{D}) \geqslant \ln\beta$, $\beta = \bigl(3+\sqrt{5}\bigr)/2$. Для указанного β имеет место равенство $\lambda(\beta, \mathscr{D}) = \ln\beta$.*

Следствие 3. *Если $\alpha \neq 0, 1$ удовлетворяет уравнению* (1), *то*

$$\max\biggl\{\ln|a_0|, \ln|a_d|, \frac{1}{d}\sum_{\sigma=1}^{d} |\ln\alpha^{(\sigma)}|\biggr\} \geqslant \ln 2.$$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим следующие числа: $f_\sigma = \ln|(\alpha-1)^2/\alpha|_\sigma$, $\sigma \in \mathscr{N}$. Для $\sigma \notin \mathscr{S}$ имеем неравенства

$$f_\sigma \leqslant \ln 4 + \bigl|\ln|\alpha|_\sigma\bigr|, \quad \sigma \in \mathscr{D}, \quad f_\sigma \leqslant \bigl|\ln|\alpha|_\sigma\bigr|, \quad \sigma \notin \mathscr{D}.$$

Для $\sigma \in \mathscr{S}$ положим $z_\sigma = (\ln\alpha^{(\sigma)})$, $x_\sigma = |z_\sigma|/2$, тогда

$$f_\sigma = \ln 4 + 2\ln|\operatorname{sh}(z_\sigma/2)| \leqslant \ln 4 + 2\ln\bigl(\operatorname{sh}(x_\sigma)\bigr), \quad \sigma \in \mathscr{S}.$$

Складывая эти неравенства, с учетом обозначения для μ и формулы произведения имеем

$$0 = \sum_{\sigma \in \mathscr{N}} f_\sigma \leqslant D\ln 4 + 2\mu + 2g, \quad g = \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} \ln\bigl(\operatorname{sh}(x_\sigma)\bigr).$$

Максимизируем выражение $g = g(x)$ при ограничении

$$\lambda = 2S^{-1} \sum_{\sigma \in \mathscr{S}} x_\sigma. \tag{8}$$

Функция $\ln\bigl(\operatorname{sh}(x)\bigr)$ выпукла вверх, а g симметрично зависит от x_σ, поэтому достигает максимума, когда все x_σ равны (из (8) следует, что они равны $\lambda/2$). Соответствующее значение g равно $S \ln\bigl(\operatorname{sh}(\lambda/2)\bigr)$. Это значит, что

$$S \ln\bigl(\operatorname{sh}(\lambda/2)\bigr) \geqslant g \geqslant -D \ln 2 - \mu,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Доказательство следствий. Если $\lambda \geqslant \ln\beta$, то (7) следует непосредственно ввиду $D \geqslant S$. Если же $\lambda \leqslant \ln\beta$, то здесь $\operatorname{sh}(\lambda/2)/\lambda \leqslant \operatorname{sh}\bigl(\ln\sqrt{\beta}\bigr)/\ln\beta = 1/2\ln\beta$, значит, $\lambda \geqslant 2\ln\beta\operatorname{sh}(\lambda/2)$. Отсюда с учетом (6) получается (7).

Если α — алгебраическая единица и $\mathscr{D} = \mathscr{S}$, то $D = S$ и $\mu = 0$. Решая (6) относительно λ, получаем следствие 2.

Если α — не алгебраическая единица, то $|a_0| \geqslant 2$ или $|a_d| \geqslant 2$ и утверждение следствия 3 очевидно. Если же α — алгебраическая единица, то утверждение следует из следствия 2 с учетом того, что $\ln\beta > \ln 2$.

Лиувиллева оценка (7) хотя и достаточно тривиальна, однако, неулучшаема в области $\mu \gg D \gg S$. Если же $\mu \ll D$, то теорема 1 позволяет улучшить зависимость нижней оценки для λ от D. Для этого в условиях теоремы надо выбрать некоторое значение $J \geqslant 2$ и положить $T = (J-1)/2$, $\alpha_j = \alpha^{j-1-T}$, $1 \leqslant j \leqslant J$, а также взять $\zeta_\sigma = 0$, $\sigma \in \mathscr{S}$. Константы Λ и H тогда будут равны $\Lambda = C(J)\lambda$, $H = 2C(J)\mu$, где

$$C(J) = \sum_{j=1}^{J} \frac{|j-1-T|}{J} = \begin{cases} J/4 - 1/4J, & J \text{ нечетно}, \\ J/4, & J \text{ четно}. \end{cases} \tag{9}$$

Неравенство (5) примет тогда вид

$$\lambda \geqslant \exp\bigl(-1 - 2C(J)\mu/S - \ln C(J) - (D\ln J)/(J-1)S\bigr). \tag{10}$$

Пусть, например, $\mu > 0$ и ограничено, $S = 1$, тогда, взяв

$$J = \bigl[\bigl((D/\mu)\ln(D/\mu)\bigr)^{1/2}\bigr], \tag{11}$$

получим оценку

$$|\ln\alpha| \geqslant \exp\Bigl(-\bigl(1+o(1)\bigr)\bigl(D\mu\ln(D/\mu)\bigr)^{1/2}\Bigr), \quad D \to \infty.$$

Асимптотически эта оценка несколько лучше, чем в [9]. Если же допустить, что μ может быть мало, то J можно выбрать лучше, чем в (11).

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $[\mathbb{K}:\mathbb{Q}] = D$. *Выбран набор* $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{D}$, $\operatorname{Card}\mathscr{S} = S$, *и некоторые значения* $(\ln\alpha^{(\sigma)})$, $\sigma \in \mathscr{S}$. *Пусть* $(\eta, b) = (0.25, 4.4)$ *или* $\eta \geqslant 0$, $b = 4.8$ *и выполняется*

$$\mu/S \leqslant 2\eta/(\eta+2)\xi, \quad \lambda \leqslant 1/(\eta+2)\xi. \tag{12}$$

Тогда $\alpha = 1$. *Здесь* $\xi = \xi(\delta) = \delta\ln(b\delta)$, $\delta = D/S$.

Примечание. В условиях теорем 2 и 3 фигурирует параметр $\mu = \mu(\alpha, \mathscr{S})$. Его можно заменить на худшую константу равную $\mu(\alpha, \varnothing) \geqslant \mu(\alpha, \mathscr{S})$, что было в предшествующих работах, где эта характеристика присутствует в виде $\mu(\alpha, \varnothing) = Dh(\alpha)$, а $h(\alpha)$ называется абсолютной логарифмической высотой α и равна $h(\alpha) = (\ln M(\alpha))/d$.

Отметим также, что для α, не являющихся корнями из единицы, (12) асимптотически не поглощается оценкой (2). Это вызвано тем, что в определении μ участвуют не все сопряженные и μ/S может быть мало. Кроме того, параметр $\delta = D/S$ может быть $\ll d$. Различие особенно заметно в случае $\mu(\alpha, \mathscr{S}) = 0$, например, для чисел Салема.

Число Салема — это алгебраическое число степени > 2, у которого $|\alpha|_1 > 1$, $|\alpha|_2 < 1$, а остальные $|\alpha|_\sigma = 1$ (см. [6]). Числа Салема доставляют наибольшие трудности при исследовании малых алгебраических чисел (см. [2]), константа Лемера — это число Салема, число β из следствия 2 тоже можно считать числом Салема (если отбросить ограничение на степень). Числа Салема взаимны, поэтому не охватываются теоремой Смита [3].

Следствие 4. *Пусть* $\deg\alpha = d \geqslant 2$, *тогда*

$$M_0(\alpha) = \max\{\ln M(\alpha), |\ln\alpha|\} > 8/9d\,\ln(2.2d), \tag{13}$$

Если α — *число Салема, то*

$$|\alpha| = M(\alpha) > \exp\bigl(1/d\,\ln(2.4d)\bigr). \tag{14}$$

Доказательство теоремы 3. Предположим пока, что α — не корень из 1, следовательно, числа $\alpha_j = \alpha^{j-1-T}$ различны и к ним можно применить теорему 1. Если $J = 2$, то лучше применять (7). Перепишем (7), (10) в виде

$$\begin{gathered} C_1(J) + 2C(J)\mu/S + \ln C(J) + \ln(J)\delta/(J-1) + \ln\lambda \geqslant 0, \\ C_1(2) = -\ln\ln\beta = 0.0383\ldots, \quad C_1(J) = 1, \quad J \geqslant 3. \end{gathered} \tag{15}$$

Введем также вспомогательную функцию

$$f_J(\delta,\eta) = C_1(J) + J\eta/(2+\eta)\xi(\delta) + \ln(J)\delta/(J-1) + \ln\bigl(J/8(1+\eta/2)\xi(\delta)\bigr).$$

Если предположить выполнение (12), то для получения противоречия с учетом (9), (15) достаточно подобрать такое $J \geqslant 2$, что будет выполняться $f_J(\delta, \eta) < 0$. Для этого покроем интервал $[1, \infty)$ отрезками $[\delta_{J0}, \delta_{J1}]$, $J \geqslant 2$, где концы отрезков определяются следующим образом

$$\delta_{2,0} = 1; \quad \delta_{J0} = \xi^{-1}(J), \quad J > 2; \quad \delta_{J1} = \xi^{-1}(J+1), \quad J \geqslant 2.$$

Легко проверяется, что $\partial^2 f/\partial^2\delta > 0$, значит, f выпукла вниз и достаточно проверить $f_J(\delta) < 0$ только на концах интервалов. Поскольку для концов отрезков выполняется $\xi(\delta_{Jk}) = J + k$, то составляющая f, зависящая от η, будет

$$J\eta/(2+\eta)\xi(\delta) - \ln(1+\eta/2) \leqslant \eta/(2+\eta) - \ln(1+\eta/2) \leqslant 0$$

(последнее неравенство проверяется дифференцированием, равенство будет при $\eta = 0$). Значит, при $b = 4.8$ достаточно рассмотреть $\eta = 0$. Таким образом, нам надо проверить только две пары (η, b). Для $J \leqslant 1000$ сделаем это компьютерным перебором. Пусть теперь $J > 1000$. Так как $C_1(J) = 1$, то

$$f_J(\delta, \eta) \leqslant 1 + \eta/(2+\eta) - \ln(8+4\eta) + \delta\ln(J)/(J-1)$$

и нам осталось оценить последнее слагаемое. Для удобства положим $\varepsilon_1 = 1/(J-1)$, $\varepsilon_2 = (k+1)/(J+k)$, $x = \ln(b\delta)$, тогда в силу выбора $\delta = \delta_{Jk}$ имеем $J + k = \delta\ln(b\delta) = \delta x$ и $g = \delta\ln(J)/(J-1) - 1 = \ln\bigl(Jx/b(J+k)\bigr)/x(1-\varepsilon_2) + (1+k)\varepsilon_1$. Функция $\ln(x/c)/x$ принимает максимальное значение в точке $x = ce$ равное $1/ce$. У нас $c = (J+k)b/J$, поэтому

$$g - (1+k)\varepsilon_1 \leqslant J/be(J+k)(1-\varepsilon_2) = J/be(J-1) = 1/be + \varepsilon_1/be,$$
$$f_J(\delta_{Jk}) \leqslant 2 + \eta/(2+\eta) + 1/be - \ln(8+4\eta) + (2+1/be)\varepsilon_1,$$

и тоже при $\varepsilon_1 \leqslant 0.001$ будет $f < 0$.

Пусть теперь α — корень степени $N > 1$ из 1. Определим J из условия $J \leqslant \delta\ln(4.8\delta) < J+1$. Если $J \leqslant N$, то числа α^{j-1}, $1 \leqslant j < J$, различны и можно действовать, как в случае, когда α — не корень из 1. Если же $J > N$, то $N < \delta\ln(4.8\delta)$ и

$$\lambda \geqslant 2\pi/N > 2\pi/\delta\ln(4.8\delta),$$

что тоже противоречит (12) и доказывает теорему.

В теореме 3 определены значения b только для двух наиболее употребительных случаев, соответствующих значениям $\eta = 0, 0.25$. При необходимости можно найти более точное значение b и для других η.

Доказательство следствия 4. Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha = \alpha_1$ — взаимное, т.е. $\alpha^{-1} = \alpha^{(\sigma)}$. Возьмем набор $\mathscr{S} = \{1, \sigma\}$, тогда $S = 2$, $\lambda = |\ln \alpha|$, и (13), (14) непосредственно получаются из (12) для η соответственно равного $0.25, 0$ (числа Салема взаимны и для них $\mu = 0$). Так же непосредственно получаем (13) для комплексного α, добавляя комплексно сопряженное $\alpha^{(\sigma)}$.

Пусть теперь α — действительное невзаимное. При $d > 2$ применим теорему Смита. Это дает $\ln M(\alpha) \geqslant \ln \theta = 0.28\ldots$, откуда тоже следует (13). При $d = 2$ имеем $M(\alpha) \geqslant \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ и тоже получаем (13).

Московская государственная текстильная
академия им. А.Н. Косыгина

Поступило
01.11.94

Список литературы

[1] *Lehmer D. H.* Factorization of certain cyclotomic functions // Ann. Math. 1933. V. 34. №2. P. 461–479.
[2] *Boyd D. W.* Reciprocal polynomials having small measure. I, II // Math. Comput. 1980. V. 35. №152. P. 1361–1377; 1989. V. 53. №187. P. 355–357, S1–S5.
[3] *Smyth C. J.* On the product of conjugates outside the unit circle of an algebraic integer // Bull. London Math. Soc. 1971. V. 3. P. 169–175.
[4] *Dobrowolski E.* On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial // Acta Arith. 1979. V. XXXIV. P. 391–401.
[5] *Cantor D. C., Straus E. G.* On a conjecture of D.H. Lehmer // Acta Arith. 1982. V. XLII. P. 97–100; Corrigenda // Acta Arith. 1983. V. XLII. P. 325.
[6] *Bertin M. J., Decomp-Guilloux A., Grandet-Hugot M., Pathiaux-Delefosse M., Schreiber J. P.* Pisot and Salem numbers. Berlin: Birkhäuser Verlag, 1992.
[7] *Blanksby P. E., Montgomery H. L.* Algebraic integers near the unit circle // Acta Arith. 1971. V. XVIII. P. 355–369.
[8] *Waldschmidt M.* A lower bound for linear forms in logarithms // Acta Arith. 1980. V. XXXVII. P. 257–283.
[9] *Mignotte M., Waldschmidt M.* On algebraic numbers of small height: linear forms in one logarithm // J. Number Th. 1994. V. 47. P. 43–62.
[10] *Laurent M.* Sur quelques résultats récents de transcendance // Journées arithmétiques Luminy, 1989, Astérisque. 1991. V. 198–200. P. 209–230.
[11] *Zagier D.* Algebraic numbers close both to 0 and 1 // Math. Comput. 1993. V. 61. №203. P. 485–491.
[12] *Матвеев Е. М.* Об одном типе мультипликативных алгебраических решеток // Международная конференция “Современные проблемы теории чисел”. Тезисы докладов. Тула: ТГПИ, 1993. С. 107.